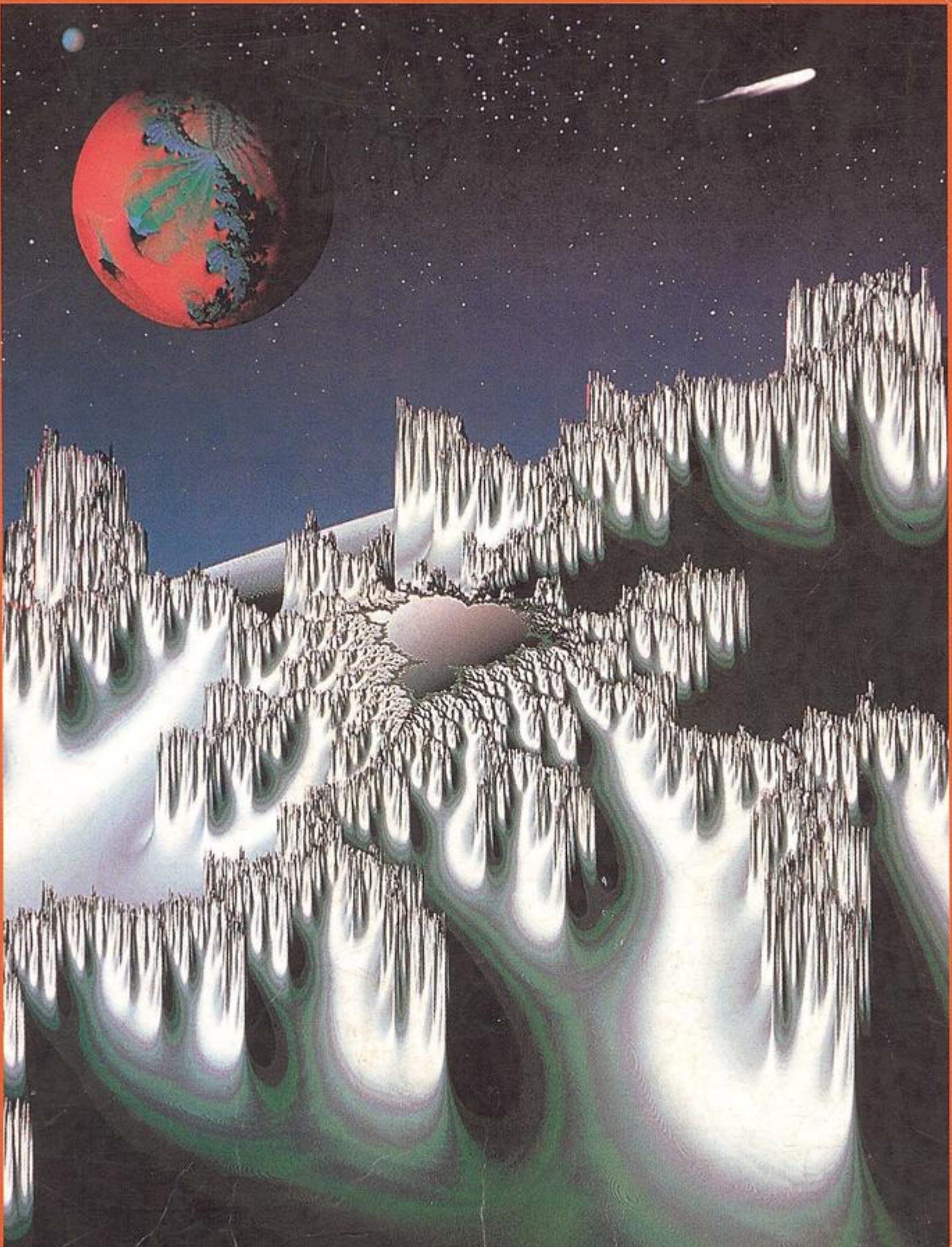
Matemática 2

MANOEL PAIVA



Livro do
Professor
Venda proibida

EDITORA
MODERNA

MANOEL RODRIGUES PAIVA

Matemática

Volume 2

1ª edição

CÓPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL

EDITORA
MODERNA

EDITORA
MODERNA

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Ana Maria Onofre
Dalva F. N. Muramatsu
Ricardo Seballos

PREPARAÇÃO DO TEXTO
Sérgio Roberto Torres

EDIÇÃO DE ARTE
Marcel Destailleur

CAPA
Anne Marie Bardot
Foto: "Sacred Lake (fractal)"
© Gregory Sams/SPL-Stock Photos

PESQUISA ICONOGRÁFICA
Vera Lucia da Silva Barrionuevo
Sérgio Scazufca

GRÁFICOS
Sidnei Moura

ILUSTRAÇÕES
Paulo Manzi

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Formato Comunicação Ltda.

COORDENAÇÃO DO PCP
Fernando Dalto Degan
IMPRESSÃO E ACABAMENTO
Cromosete Gráfica e Editora Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues, 1950 -
Matemática / Manoel Rodrigues Paiva. — São Paulo :
Moderna, 1995.

Obra em 3 volumes.

1. Matemática (2º grau) 2. Matemática (2º grau) - Problemas,
exercícios, etc. 3. Matemática (Vestibular) I. Título.

95-0798 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2º grau 510.7

ISBN 85-16-01214-X
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 6090-1500
Fax (0_ _11) 6090-1501
www.moderna.com.br
2002

Impresso no Brasil

3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

1. A filosofia da obra

A matemática, mais do que nunca, está presente em nosso cotidiano. Com o advento dos computadores, os jovens estudam essa ciência até em jogos de lazer. Por isso é preciso aproveitar esse fato e resgatar o espírito crítico do jovem, essencial ao aprendizado da ciência matemática.

Apresento nesta obra os meus vinte e dois anos de experiência como professor. Hoje, com plena convicção, afirmo que a matemática deve caminhar paralelamente à realidade do nosso dia-a-dia.

Sempre que possível, mostraremos aplicações práticas dos assuntos estudados, sem no entanto nos distanciarmos da precisão dos conceitos.

Os atributos básicos para um bom aprendizado — interpretação de texto, raciocínio e iniciativa — serão constantemente exigidos.

2. A estrutura da obra

Em cada um dos capítulos a teoria vem detalhadamente acompanhada de exercícios resolvidos, de modo que o aluno possa aprender mesmo sem ajuda do professor.

Ao final de cada capítulo apresentamos três séries de exercícios propostos: os básicos, os complementares e as questões dos vestibulares. Os básicos têm como finalidade a fixação do aprendizado. Os complementares exigem criatividade e desembaraço em relação ao assunto estudado. E as questões dos vestibulares mostram como o conhecimento de matemática é exigido dos candidatos às universidades brasileiras.

3. Palavra final

A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.

O autor

Ao amor de minha mulher,
Lúcia, e de meus filhos:
Priscilla, Emerson e Ewerton.

Sumário

Capítulo 1 – Seqüências finitas e infinitas 1

1. Conceituação, 1. 2. Termos equidistantes dos extremos de uma seqüência, 3. 3. Lei de formação de uma seqüência, 4.

Capítulo 2 – O que é uma progressão aritmética? 9

1. Introdução, 9. 2. Progressão aritmética (P.A.), 10. 3. Classificação das progressões aritméticas, 11. 4. Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, 12.

Capítulo 3 – Interpolação aritmética 17

1. Meios aritméticos, 17. 2. Interpolação aritmética, 17. 3. Propriedades de uma P.A., 17. 4. Representação genérica de uma P.A., 19.

Capítulo 4 – Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. 22

1. Introdução, 22. 2. Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A., 22.

Capítulo 5 – Problemas literais sobre P.A. 26

Capítulo 6 – O que é progressão geométrica? 28

1. Introdução, 28. 2. Progressão geométrica (P.G.), 28. 3. Classificação das progressões geométricas, 30. 4. Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, 32.

Capítulo 7 – Interpolação geométrica 37

1. Meios geométricos, 37. 2. Interpolação geométrica, 37. 3. Propriedades de uma progressão geométrica, 38. 4. Representação genérica de uma P.G., 40.

Capítulo 8 – Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G. 43

1. Introdução, 43. 2. Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.G., 44. 3. Produto dos *n* primeiros termos de uma P.G., 46.

Capítulo 9 – Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica 49

1. Introdução, 49. 2. Cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G., 50.

Capítulo 10 – Progressões geométricas em cálculos de juro composto 55

1. Introdução, 55. 2. Juro composto, 55. 3. Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante, 56. 4. Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa variável, 57.

Capítulo 11 – Matrizes – conceitos básicos 61

1. Introdução, 61. 2. Matriz, 61. 3. Matrizes especiais, 62. 4. Matriz transposta, 64. 5. Elementos correspondentes em matrizes do mesmo tipo, 64. 6. Igualdade de matrizes, 64.

Capítulo 12 – Operações com matrizes 68

1. Introdução, 68. 2. Adição de matrizes, 69. 3. Multiplicação de número por matriz, 69. 4. Subtração de matrizes, 70. 5. Multiplicação de matrizes, 71.

Capítulo 13 – Determinantes – uma nova função 79

1. Introdução, 79. 2. Múltipla de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz, 79. 3. Soma de duas filas paralelas de uma matriz, 80. 4. Matrizes equiparáveis, 80. 5. Matriz triangular, 82. 6. Determinante de uma matriz quadrada, 84.

Capítulo 14 – Propriedades dos determinantes – parte 1 89

1. Introdução, 89. 2. Cofator, 90. 3. Propriedades dos determinantes, 91.

Capítulo 15 – Propriedades dos determinantes – parte 2 99

Capítulo 16 – Classificação de um sistema linear 112
1. Introdução, 112. **2.** Equação linear, 112. **3.** Sistema linear, 113. **4.** Solução de um sistema linear, 114. **5.** Classificação de um sistema linear, 115.

Capítulo 17 – Resolução de um sistema linear por escalonamento 119
1. Conceituação, 119. **2.** Sistema linear escalonado, 119. **3.** Resolução de um sistema linear escalonado, 119. **4.** Sistemas lineares equivalentes, 122. **5.** Escalonamento de um sistema linear, 122.

Capítulo 18 – Resolução de um sistema linear através de determinantes 129
1. Teorema de Cramer, 129. **2.** Sistema linear homogêneo, 132.

Capítulo 19 – Discussão de um sistema linear 138
1. Conceituação, 138.

Capítulo 20 – Matrizes inversas 146
1. Matriz inversível, 146. **2.** Cálculo da matriz inversa, 148.

Capítulo 21 – Análise combinatória – métodos de contagem 154
1. Introdução, 154. **2.** Princípio fundamental de contagem, 154. **3.** Generalização do princípio fundamental de contagem, 156.

Capítulo 22 – Princípio aditivo de contagem 161
Conceituação, 161.

Capítulo 23 – Arranjo simples 167
1. Tipos de agrupamento, 167. **2.** O conceito de arranjo simples, 168. **3.** Cálculo do número de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, 170.

Capítulo 24 – Fatorial 173
1. Conceituação, 173. **2.** Cálculo do número de arranjos simples através de fatoriais, 175. **3.** Extensão do cálculo $A_{n,\,p}$ para $n = 0$ ou $p = 0$, 176.

Capítulo 25 – Permutação simples 180
1. Conceituação, 180.

Capítulo 26 – Permutação com elementos repetidos 187
1. Conceituação, 187.

Capítulo 27 – Combinação simples 191
1. Conceituação, 191. **2.** Critério para diferenciar arranjo de combinação, 194.

Capítulo 28 – Permutação circular 200
1. Conceituação, 200.

Capítulo 29 – Número binomial 204
1. Conceituação, 204. **2.** Números binomiais complementares, 205. **3.** Propriedades, 205. **4.** Triângulo de Pascal, 207.

Capítulo 30 – Binômio de Newton 213
1. Introdução, 213. **2.** Teorema do binômio de Newton, 214. **3.** Somatório, 216.

Capítulo 31 – Termo geral do binômio de Newton 220
Conceituação, 220.

Capítulo 32 – O conceito de probabilidade 224
1. Introdução, 224. **2.** Experimento aleatório, 224. **3.** Espaço amostral de um experimento aleatório, 224. **4.** Evento de um espaço amostral, 226. **5.** Espaço amostral equiprovável, 227. **6.** Probabilidade, 228.

Capítulo 33 – Propriedades da probabilidade 232
1. Eventos complementares, 232. **2.** Propriedades das probabilidades, 233.

Capítulo 34 – Adição de probabilidades 237

Capítulo 35 – Probabilidade condicional 241
Conceituação, 241.

Capítulo 36 – Multiplicação de probabilidades 244
1. Eventos independentes, 244. **2.** Produto de probabilidades, 245.

Capítulo 37 – Noções de estatística 250
1. O que é estatística?, 250. **2.** Universo estatístico ou população estatística, 250. **3.** Amostra, 250. **4.** Rol, 251. **5.** Distribuição de freqüência, 251. **6.** Amplitude de uma classe, 253. **7.** Classes unitárias, 253. **8.** Freqüência relativa de uma classe, 254. **9.** Representações gráficas de uma distribuição de freqüência, 257. **10.** Histograma, 259.

Capítulo 38 – Medidas de posição e de dispersão 267
1. Introdução, 267. **2.** Medidas de posição, 267. **3.** Medidas de dispersão, 272.

Capítulo 39 – Teorema – técnicas de demonstração 284
1. Introdução, 284. **2.** Teorema – conceituação, 284. **3.** Teoremas da forma $p \Rightarrow q$, 284. **4.** Teoremas da forma $p \Leftrightarrow q$, 286.

Capítulo 40 – Geometria espacial de posição – os primeiros postulados 291
1. Introdução, 291. **2.** Conceitos primitivos, 292. **3.** Postulados, 293. **4.** Figuras geométricas, 297. **5.** Segmento de reta, 299. **6.** Resumo dos postulados e teoremas, 301.

Capítulo 41 – Conjunto convexo 304
1. Conceituação, 304. **2.** Postulados da separação, 306. **3.** Resumo dos postulados, 310.

Capítulo 42 – Retas 314
1. Posições relativas de duas retas, 314. **2.** Determinação de um plano, 317. **3.** Resumo dos postulados e teoremas, 321.

Capítulo 43 – Retas e planos 326
1. Posições relativas entre reta e plano, 326. **2.** Resumo dos teoremas apresentados, 332.

Capítulo 44 – Planos 336
1. Posições relativas entre dois planos, 336. **2.** Resumo dos teoremas, 344.

Capítulo 45 – Perpendicularismo entre reta e reta e entre reta e plano 349
1. Retas perpendiculares, 349. **2.** Ângulos de duas retas reversas, 350. **3.** Retas ortogonais, 350. **4.** Reta perpendicular a plano, 353. **5.** Resumo dos teoremas, 360.

Capítulo 46 – Perpendicularismo entre planos 364
1. Planos perpendiculares, 364. **2.** Resumo dos teoremas, 368.

Capítulo 47 – Geometria métrica espacial, projeções ortogonais e distâncias 372
1. Projeção ortogonal, 372. **2.** Ângulos entre reta e plano, 375. **3.** Distâncias, 377. **4.** Resumo dos teoremas, 383.

Capítulo 48 – Ângulos no espaço 387
1. Ângulo – revisão, 387. **2.** Diedro ou ângulo diédrico, 388. **3.** Ângulos formados por dois planos secantes, 392. **4.** Triedros, 394. **5.** Ângulos poliédricos convexos, 399. **6.** Resumo dos teoremas, 402.

Capítulo 49 – Poliedros 406
1. Região poligonal convexa, 406. **2.** Poliedro convexo, 406. **3.** Relação de Euler, 409. **4.** Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo, 412. **5.** Resumo dos teoremas, 414.

Capítulo 50 – Poliedros notáveis 417

1. Poliedros de Platão, 417. **2.** Poliedros regulares, 422. **3.** Resumo dos teoremas, 424.

Capítulo 51 – Prismas 427

1. Conceituação, 427. **2.** Paralelepípedo, 430. **3.** Cubo, 434. **4.** Resumo dos teoremas, 436.

Capítulo 52 – Comparação de volumes 439

1. Princípio de Cavalieri, 439. **2.** Volume de um prisma qualquer, 441. **3.** Prismas regulares, 443. **4.** Resumo dos teoremas, 450.

Capítulo 53 – Pirâmides 454

1. Conceituação, 454. **2.** Resumo dos teoremas, 462.

Capítulo 54 – Volume de uma pirâmide 465

1. Razão entre a área de uma secção transversal e a área da base de uma pirâmide triangular, 465. **2.** Relação entre volumes de pirâmides de mesma altura e bases equivalentes, 468. **3.** Volume de uma pirâmide triangular, 470. **4.** Volume de uma pirâmide qualquer, 471. **5.** Tronco de pirâmide de bases paralelas, 474. **6.** Resumo dos teoremas, 478.

Capítulo 55 – Cilindro 483

1. Circunferência e círculo – revisão, 483. **2.** Cilindro circular, 484. **3.** Tronco de cilindro circular reto, 490. **4.** Resumo dos teoremas, 495.

Capítulo 56 – Cone 499

1. Setor circular – revisão, 499. **2.** Cone circular, 500. **3.** Tronco de cone circular de bases paralelas, 511. **4.** Resumo dos teoremas, 514.

Capítulo 57 – Esfera 519

1. Conceituação, 519. **2.** Posições relativas entre um plano e uma esfera, 520. **3.** Volume da esfera, 523. **4.** Área da superfície esférica, 526. **5.** Fuso esférico, 527. **6.** Cunha esférica, 529. **7.** Esferas tangentes, 531. **8.** Resumo dos teoremas, 533.

Capítulo 58 – Inscrição e circunscrição de sólidos 537

1. Prisma e cilindro circular, 537. **2.** Pirâmide e cilindro circular, 539. **3.** Pirâmide e cone circular, 541. **4.** Cilindro circular e cone circular, 543. **5.** Esfera e cubo, 545. **6.** Esfera e cilindro circular reto, 547. **7.** Esfera e cone circular reto, 548. **8.** Resumo dos teoremas, 551.

Respostas 557

Capítulo 1

Seqüências finitas e infinitas

1. Conceituação

Na lista de chamada de sua classe, o nome de cada aluno está associado a um número natural não-nulo. Por exemplo:

1. Alberto Vieira de Moraes,
2. Alessandra Rodrigues Fontana,
3. Alex Stanley,

⋮

30. Valdir de Souza e Ramos.

Quando associamos os números naturais 1, 2, 3, ..., 30 aos elementos do conjunto B dos alunos, de modo que cada um dos números — 1, 2, 3, ..., 30 — esteja associado a um único elemento de B, estamos estabelecendo uma **seqüência**, onde:

- o número 1 é associado ao primeiro elemento da seqüência,
- o número 2 é associado ao segundo elemento da seqüência,
- o número 3 é associado ao terceiro elemento da seqüência,

⋮

- o número 30 é associado ao trigésimo elemento da seqüência.

Para representar uma **seqüência**, escrevemos entre parênteses os seus elementos separados um a um por vírgulas, de modo que da esquerda para a direita tenhamos: (primeiro elemento, segundo elemento, terceiro elemento, ...).

Desse modo a seqüência da lista de chamada fica representada assim:

$$(\underbrace{\text{Alberto Vieira de Moraes}}_{\textbf{Primeiro elemento}}, \underbrace{\text{Alessandra Rodrigues Fontana}}_{\textbf{Segundo elemento}}, \underbrace{\text{Alex Stanley}}_{\textbf{Terceiro elemento}},$$

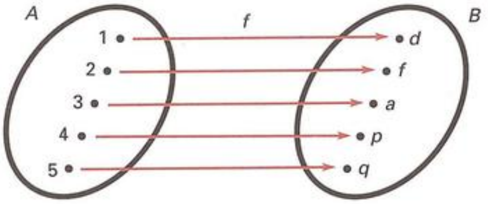
$$\ldots, \underbrace{\text{Valdir de Souza e Ramos}}_{\textbf{Trigésimo elemento}}).$$

Generalizando, podemos definir:

Seqüência finita é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, $A \subset \mathbb{N}^*$, e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não-vazio.

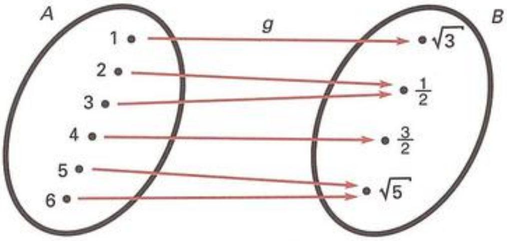
Exemplos

a) Consideremos a função *f* descrita pelo diagrama:



Essa função é uma seqüência finita que pode ser representada simplesmente por (d, f, a, p, q).

b) Consideremos a função *g* descrita pelo diagrama:



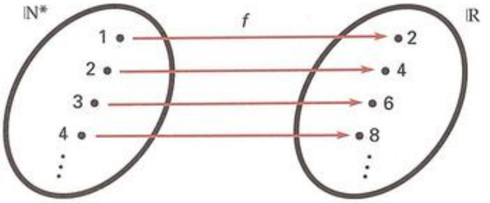
Essa função é a seqüência finita:

$$\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}\right).$$

Seqüência infinita é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não-vazio.

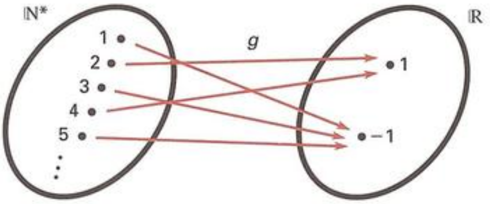
Exemplos

a) Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n$, isto é:



Essa função é uma seqüência infinita que pode ser representada por $(2, 4, 6, 8, ...)$.

b) Observe a função $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $g(n) = (-1)^n$, ou seja:



Essa função é a seqüência infinita:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...).$$

Convenções

I. Cada elemento de uma seqüência também pode ser denominado **termo da seqüência**.

II. O termo de uma seqüência que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n. Isto é:

a_1 indica o primeiro termo da seqüência,
a_2 indica o segundo termo da seqüência,
a_3 indica o terceiro termo da seqüência,
⋮
a_n indica o enésimo termo da seqüência.

Exemplo

Na seqüência $(3, 7, 11, 15, ...)$ temos que: $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, ...

III. Podemos representar uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de maneira abreviada através do símbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou simplesmente por (a_n) quando não há possibilidade de confusão quanto à variação do índice n.

IV. Os termos a_n e a_{n+1} de uma seqüência são chamados de **termos consecutivos** em que a_n é o antecessor de a_{n+1}, e este é o sucessor de a_n.

Exercício resolvido

R.1 Escrever a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dos números naturais múltiplos de 3, em ordem crescente, e determinar os elementos a_1, a_2 e a_7.

Resolução

A seqüência pedida é (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...). Temos que: a_1 indica o primeiro elemento da seqüência; logo $a_1 = 0$; a_2 indica o segundo elemento da seqüência; logo $a_2 = 3$; a_7 indica o sétimo elemento da seqüência; logo $a_7 = 18$.

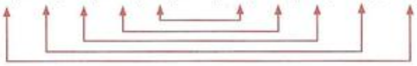
2. Termos equidistantes dos extremos de uma seqüência

Numa seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos da seqüência**. Dois termos a_i e a_j são chamados de **equidistantes dos extremos** se, e somente se, o número de termos que antecedem a_i é igual ao número de termos que sucedem a_j.

Um termo a_s é chamado de **termo médio de uma seqüência com número ímpar de termos** se, e somente se, o número de termos que antecedem a_s é igual ao número de termos que o sucedem.

Exemplo

Na seqüência: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$ temos que:



- a_1 e a_{11} são os extremos da seqüência;
- os termos equidistantes dos extremos são: a_2 e a_{10}, a_3 e a_9, a_4 e a_8, a_5 e a_7;
- o número de termos que antecedem a_6 é igual ao número de termos que o sucedem; por isso, o termo a_6 é chamado de "**termo médio** da seqüência".

Exercícios resolvidos

R.2 Provar que, "se a_s e a_t são termos equidistantes dos extremos da seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, então $s + t = n + 1$".

Resolução

Como a_s e a_t são equidistantes dos extremos, então k termos precedem a_s e outros k termos sucedem a_t:

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_k}_{\textbf{k termos}}, a_s, ..., a_t, \underbrace{a_{t+1}, a_{t+2}, ..., a_{t+k}}_{\textbf{k termos}}).$$

Note, portanto, que $s = k + 1$ e $t + k = n$:

$$\begin{cases} s = k + 1 \\ t + k = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = k + 1 \\ t = n - k. \end{cases}$$

Logo, $s + t = k + 1 + n - k = 1 + n$.

(c.q.d.)

R.3 Na seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{50})$, tem-se que a_{19} e a_t são termos equidistantes dos extremos. Determinar t.

Resolução

Pelo exercício anterior, devemos ter: $19 + t = 50 + 1 \Rightarrow t = 32$.

R.4 Provar que "se a_s é termo médio da seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, então $2s = n + 1$".

Resolução

Sendo a_s o termo médio da seqüência, temos que existem k termos antecedendo a_s e outros k termos sucedendo-o: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_{s+k})$.

Note, portanto, que $s = k + 1$ e $s + k = n$:

$$\begin{cases} s = k + 1 \\ s + k = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = k + 1 \\ s = n - k. \end{cases}$$

Logo, $s + s = k + 1 + n - k \Rightarrow 2s = 1 + n$.

(c.q.d.)

R.5 Na seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{57})$, tem-se que a_s é o seu termo médio. Determinar s.

Resolução

Pelo exercício anterior, devemos ter: $2s = 57 + 1 \Rightarrow s = 29$.

3. Lei de formação de uma seqüência

Um conjunto de informações capazes de determinar todos os termos de uma seqüência e a ordem em que se apresentam é chamado de **lei de formação da seqüência**.

3.1. Tipos de lei de formação

I. **Lei de formação por recorrência**

Uma seqüência fica determinada se conhecemos um de seus termos e uma sentença que expresse cada termo em função de seu antecessor (ou sucessor). O conjunto de informações que determina a seqüência dessa maneira é denominado **lei de formação por recorrência**.

Exemplo

Considere a seguinte seqüência: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2 + a_n. \end{cases}$

As informações $a_1 = 5$ e $a_{n+1} = 2 + a_n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, determinam todos os termos da seqüência e a ordem em que se apresentam. Vejamos:

- o primeiro termo da seqüência é 5; isto é, $a_1 = 5$;
- na igualdade $a_{n+1} = 2 + a_n$, atribuindo-se a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da seqüência, isto é:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = 2 + a_1 \therefore a_2 = 2 + 5 \therefore a_2 = 7, \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = 2 + a_2 \therefore a_3 = 2 + 7 \therefore a_3 = 9, \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = 2 + a_3 \therefore a_4 = 2 + 9 \therefore a_4 = 11, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, a seqüência é (5, 7, 9, 11, ...).

II. **Lei de formação que expressa cada termo em função de sua posição**

Uma seqüência fica determinada se cada termo a_n é expresso em função de sua posição n.

Exemplo

Considere a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n^2 + 3$. Para determinar os termos dessa seqüência, basta atribuirmos a n os valores 1, 2, 3, ... na igualdade $a_n = n^2 + 3$:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 1^2 + 3 \therefore a_1 = 4, \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 2^2 + 3 \therefore a_2 = 7, \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 \therefore a_3 = 12, \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 4^2 + 3 \therefore a_4 = 19, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto a seqüência é (4, 7, 12, 19, ...).

III. **Lei de formação através de uma propriedade comum aos termos de uma seqüência**

Uma propriedade p determina uma seqüência se, e somente se, existe uma única seqüência cujos termos satisfazem p.

Exemplo

Considere os nomes dos alunos de sua sala de aula escritos em ordem alfabética. A propriedade p, "ser nome de um aluno de sua classe e obedecer a ordem alfabética", determina uma seqüência.

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar o quinto termo da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que: $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 + 1. \end{cases}$

Resolução

O quinto termo da seqüência é indicado por a_5. Para determiná-lo, basta atribuirmos a n os valores 1, 2, 3 e 4 na igualdade $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1$:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = (a_1)^2 + 1 \therefore a_2 = 0^2 + 1 \therefore a_2 = 1, \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = (a_2)^2 + 1 \therefore a_3 = 1^2 + 1 \therefore a_3 = 2, \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = (a_3)^2 + 1 \therefore a_4 = 2^2 + 1 \therefore a_4 = 5, \\ n = 4 &\Rightarrow a_5 = (a_4)^2 + 1 \therefore a_5 = 5^2 + 1 \therefore a_5 = 26. \end{aligned}$$

R.7 Determinar o vigésimo termo da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 5n + 3$.

Resolução

O vigésimo termo é indicado por a_{20}. Para determiná-lo, basta atribuirmos a n o valor 20, na igualdade $a_n = 5n + 3$, isto é, $n = 20 \Rightarrow a_{20} = 5 \cdot 20 + 3 \therefore a_{20} = 103$.

R.8 Seja a seguinte tabela:

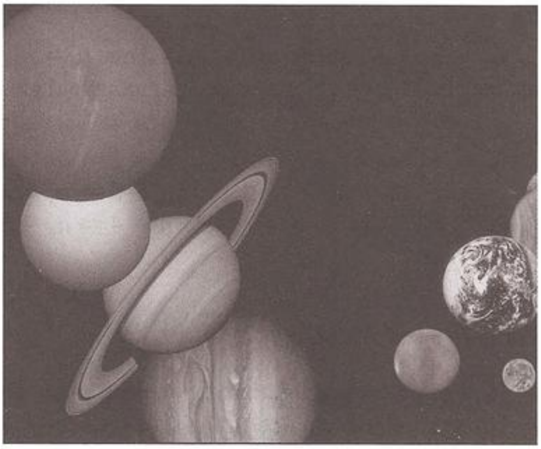
Planeta	Diâmetro equatorial (km)
Mercúrio	4878
Vênus	12104
Terra	12756,28
Marte	6786,8
Júpiter	142796
Saturno	120000
Urano	50800
Netuno	48600
Plutão	3000

Escrever a seqüência dos nomes dos planetas do Sistema Solar segundo a ordem crescente de seus diâmetros equatoriais.

Resolução

A propriedade p, "ser planeta do Sistema Solar e obedecer à ordem crescente dos diâmetros equatoriais", determina a seguinte seqüência:

(Plutão, Mercúrio, Marte, Vênus, Terra, Netuno, Urano, Saturno, Júpiter).



Montagem fotográfica com imagens de planetas do Sistema Solar.

R.9 Seja a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 3n$. Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da seqüência (a_n), calcular S_4.

Resolução

O símbolo S_4 indica a soma dos quatro primeiros termos da seqüência (a_n), ou seja, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Temos que:

$$a_n = 3n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \cdot 1 = 3 \\ a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ a_3 = 3 \cdot 3 = 9 \\ a_4 = 3 \cdot 4 = 12. \end{cases} \qquad \text{Logo, } S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30.$$

R.10 A soma S_n dos n primeiros termos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é dada por $S_n = 2n + 5$.

a) Determinar a soma dos seis primeiros termos da seqüência.
b) Determinar o primeiro termo da seqüência.
c) Determinar o sétimo termo da seqüência.

Resolução

a) Para obter a soma dos seis primeiros termos da seqüência, basta substituir a variável n por 6 na igualdade:

$$S_n = 2n + 5, \text{ ou seja, } S_6 = 2 \cdot 6 + 5 \Rightarrow S_6 = 17.$$

b) Note que a sentença $S_n = 2n + 5$ expressa a soma dos n primeiros termos da seqüência, por exemplo:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_1 = a_1.$$

Assim, S_1 é igual ao próprio a_1. Logo, temos: $\begin{cases} a_1 = S_1 \\ S_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 7.$

c) Para determinar o termo a_7, basta efetuarmos $S_7 - S_6$; observe por quê:

$$S_7 - S_6 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = a_7.$$

Temos que: $S_7 = 2 \cdot 7 + 5 = 19$ e $S_6 = 2 \cdot 6 + 5 = 17$.
Logo, $a_7 = S_7 - S_6 = 19 - 17 \therefore a_7 = 2$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.8, B.11, B.12, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.9, B.10, B.13, B.14, C.2, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Na seqüência (6, 5, 9, 13, 18, 15, −2, ...), identifique os termos a_1, a_3, a_4 e a_6.

B.2 Na seqüência (3, 2, 5, 9, 6, 6, 6, ...), identifique os termos a_1, a_2, a_3, a_5, a_6 e a_7.

B.3 Na seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{60})$, são termos equidistantes dos extremos:
a) a_{20} e a_{40}. b) a_{20} e a_{39}. c) a_{19} e a_{40}. d) a_{20} e a_{41}. e) a_{19} e a_{39}.

B.4 Os termos a_s e a_t são equidistantes dos extremos de uma seqüência finita de 57 termos. Calcule $s + t$.

B.5 Na seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{73})$, tem-se que a_{23} e a_s são termos equidistantes dos extremos. Determine s.

B.6 Os termos a_s e a_{2s} são equidistantes dos extremos na seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{35})$. Determine s.

B.7 O termo médio da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{93})$ é a_s. Determine s.

B.8 Sendo a_{31} o termo médio da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, determine n.

B.9 Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ cada uma das seguintes seqüências:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = 9 + a_n, \end{cases}$

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 3 \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \end{cases}$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 5n + 3$,

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n^2 + 2n$.

B.10 Apresente sob a forma $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ a seqüência tal que: $a_n = \begin{cases} 2n, \text{ se } 1 \leqslant n \leqslant 4 \\ a_{n-1} + 8, \text{ se } 5 \leqslant n \leqslant 7. \end{cases}$

B.11 Cada uma das leis de formação a seguir determina uma seqüência. Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ou $(a_1, a_2, a_3, ...)$ cada uma dessas seqüências.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = 2a_n + 5, \end{cases}$

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n^2 + n$,

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 3a_{n-1}, \end{cases}$

d) $(a_1, a_2, a_3, ..., a_9)$ tal que
$$a_n = \begin{cases} 5n, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \leqslant 4 \\ 2n^2, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } 5 \leqslant n \leqslant 9. \end{cases}$$

B.12 Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, ...)$ cada uma das seqüências:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n}$,

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n^2}$,

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

B.13 Considere as seqüências:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n + 4$,
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $b_n = n - 4$.

Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, ...)$ a seqüência: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $c_n = a_n - b_n$.

B.14 São dadas as seqüências:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = -2a_n + 5, \end{cases}$
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $b_n = 3a_n$,
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $c_n = a_n + 2b_n$.

Obtenha o termo c_4 da seqüência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

B.15 As seqüências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ são tais que: $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = \frac{2c_n}{n^2}$, $c_n = 3 + a_n$, para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determine os três primeiros termos da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b) Determine uma lei de formação da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que expresse o termo a_n em função de n.

B.16 As seqüências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ são tais que: $a_n = 1 + c_n$, $b_n = n - 1$, $c_n = (b_n)^2 - n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determine os três primeiros termos da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b) Determine uma lei de formação da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que expresse o termo a_n em função de n.

Exercícios complementares

C.1 Os termos das seqüências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ obedecem às seguintes condições para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_{n+1} = q_n$, $q_{n+1} = p_n + q_n$, $p_1 = 1$ e $q_1 = 1$. Determine a_4.

C.2 Os termos das seqüências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ obedecem às seguintes condições para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = n + 1$, $b_n = n - 1$ e $c_n = \begin{cases} b_{n+1}, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } 1 \leqslant n \leqslant 3 \\ a_{n-2}, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geqslant 4. \end{cases}$

a) Determine os cinco primeiros termos da seqüência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b) Determine uma lei de formação da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que expresse o termo a_n em função de c_n.

C.3 A soma S_n dos n primeiros termos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ é dada por $S_n = n^2 + 4n$ para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule a soma dos dez primeiros termos da seqüência.
b) Determine o primeiro termo da seqüência.
c) Determine o sexto termo da seqüência.

C.4 O produto P_n dos n primeiros termos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ é dado por $P_n = 2n^3$ para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule o produto dos dez primeiros termos da seqüência.
b) Determine o primeiro termo da seqüência.
c) Determine o sexto termo da seqüência.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) A soma dos n primeiros termos de uma sucessão é dada por $S_n = n(n + 1)$. Então o vigésimo termo da sucessão é:

a) 420 b) 380 c) 60 d) 40 e) 20

Nota: "sucessão" é sinônimo de "seqüência".

V.2 (PUC-SP) Na seqüência cujos termos obedecem à fórmula de recorrência $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = (a_n - 2)^2$, $\forall n$, $n \in \mathbb{N}^*$, o sexto termo é:

a) 1 b) -1 c) 3 d) 6 e) 9

V.3 (FGV-SP) A seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é tal que $y_n - y_{n-1} = 2n$, para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$. Sabendo-se que $y_1 = -1$, o termo y_4 é igual a:

a) 21 b) 17 c) 27 d) 31 e) 51

Capítulo 2

O que é uma progressão aritmética?

1. Introdução

Um contribuinte esqueceu-se de pagar um certo imposto. Verificou então que haveria multa pelo atraso, a qual deveria ser paga do seguinte modo: no primeiro dia após o vencimento, a multa seria de 38 UTI (unidade terrível de impostos); e a cada dia, a partir do segundo dia de atraso, seriam acrescidas 2 UTI à multa do dia anterior. A tabela a seguir mostra alguns exemplos:

Número de dias em atraso	Multa em UTI
1	38
2	$38 + 2 = 40$
3	$40 + 2 = 42$
4	$42 + 2 = 44$
5	$44 + 2 = 46$
⋮	⋮

Se o nosso amigo distraído está com 53 dias em atraso, qual a multa que lhe cabe? Podemos escrever a tabela anterior sob a forma:

Número de dias em atraso	Multa em UTI
1	$38 + 0 \cdot 2$
2	$38 + 1 \cdot 2$
3	$38 + 2 \cdot 2$
4	$38 + 3 \cdot 2$
5	$38 + 4 \cdot 2$
⋮	⋮

Observe que, para n dias de atraso, a multa é de $38 + (n - 1)2$ UTI. Assim, para 53 dias de atraso, a multa será de $38 + (53 - 1)2 = 142$ UTI.

Note que, na seqüência das multas (38, 40, 42, 44, ...), cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante (no caso, a constante é 2). Seqüências como essa são denominadas **progressões aritméticas**.

2. Progressão aritmética (P.A.)

Definição

Progressão aritmética é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante r. O número r é chamado de "**razão** da progressão aritmética".

Exemplos

a) (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22) é uma P.A. finita de razão $r = 3$.
b) (10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4 ...) é uma P.A. infinita de razão $r = -2$.
c) (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = 0$.

Exercício resolvido

R.1 Verificar se é, ou não, progressão aritmética a seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ dada pela lei de formação $a_n = 3n + 5$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 5$.

Resolução

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + 5 \therefore a_1 = 8, \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + 5 \therefore a_2 = 11, \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + 5 \therefore a_3 = 14, \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + 5 \therefore a_4 = 17, \\ n = 5 &\Rightarrow a_5 = 3 \cdot 5 + 5 \therefore a_5 = 20. \end{aligned}$$

Note que cada termo da seqüência (8, 11, 14, 17, 20), a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente com 3. Logo, a seqüência é uma P.A. finita de razão 3.

2.1. Cálculo da razão de uma progressão aritmética

Teorema

A razão r de uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é dada por: $\boxed{r = a_{n+1} - a_n,}$ $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração

De fato, se $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é P.A. de razão r, então:

$$a_2 = a_1 + r,\ a_3 = a_2 + r,\ a_4 = a_3 + r, ..., a_{n+1} = a_n + r,\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Isolando a razão r em cada uma das igualdades, temos:

$$r = a_2 - a_1,\ r = a_3 - a_2,\ r = a_4 - a_3, ..., r = a_{n+1} - a_n,\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

(c.q.d.)

A recíproca do teorema anterior também é verdadeira, isto é:

Teorema

Se $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é tal que $a_{n+1} - a_n = r$ (r constante), $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, então a seqüência é P.A.

A demonstração é imediata.

Em outras palavras, os teoremas anteriores afirmam que "uma seqüência é P.A. se, e somente se, a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor, é constante".

Exercícios resolvidos

R.2 Calcular a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, sabendo que $a_7 = \frac{1}{3}$ e $a_8 = \frac{1}{2}$.

Resolução

A razão r da P.A. é tal que: $r = a_8 - a_7 \therefore r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \therefore r = \frac{1}{6}$.

R.3 Verificar se a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 3n + 8$ é ou não P.A.

Resolução

Devemos verificar se a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor é constante ou não.

Temos que: $a_n = 3n + 8$ e $a_{n+1} = 3(n + 1) + 8$ são termos consecutivos da seqüência $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, obtemos:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 8 - (3n + 8) = 3.$$

Como essa diferença é constante, concluímos que a seqüência é P.A.

3. Classificação das progressões aritméticas

Uma progressão aritmética pode ser **crescente**, **decrescente** ou **constante**.

3.1. P.A. crescente

Uma P.A. é **crescente** se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é **maior** que o termo precedente.

Exemplo

(2, 5, 8, 11, 14, ...) é uma P.A. crescente de razão $r = 3$.

Uma condição necessária e suficiente para que uma P.A. seja **crescente** é que sua **razão** (r) seja **positiva** ($r > 0$).

3.2. P.A. decrescente

Uma P.A. é decrescente se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo precedente.

Exemplo

(12, 8, 4, 0, −4, −8, ...) é uma P.A. decrescente de razão $r = -4$.

Uma condição necessária e suficiente para que uma P.A. seja **decrescente** é que sua **razão** (r) seja **negativa** ($r < 0$).

3.3. P.A. constante

Uma P.A. é constante se, e somente se, todos os seus **termos** são **iguais** entre si.

Exemplo

(6, 6, 6, ...) é uma P.A. constante.

Uma condição necessária e suficiente para que uma P.A. seja **constante** é que sua **razão** (r) seja **zero** ($r = 0$).

Exercício resolvido

R.4 Classificar como crescente, decrescente ou constante a P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cuja lei de formação é $a_n = 5n - 3$.

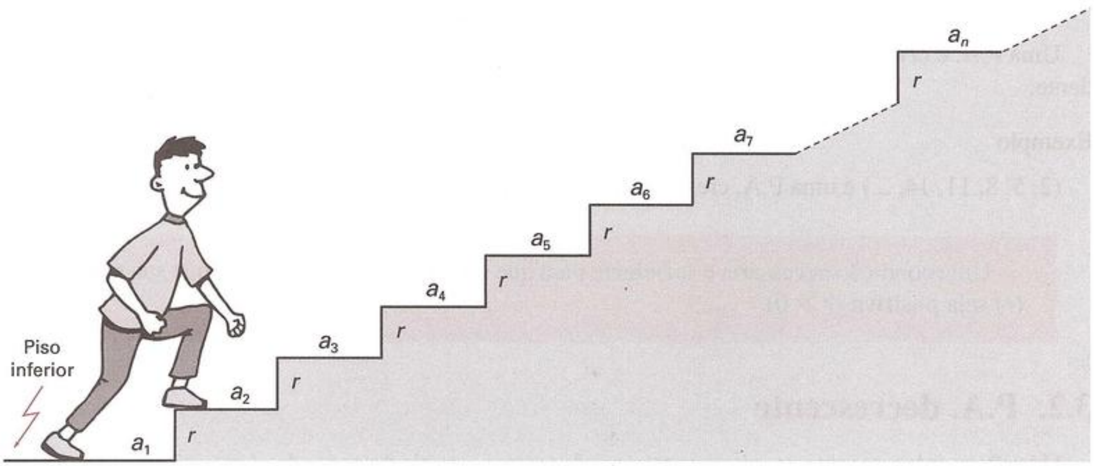
Resolução

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \cdot 1 - 3 \therefore a_1 = 2; n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 \cdot 2 - 3 \therefore a_2 = 7.$$

A razão r da P.A. é dada por: $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 7 - 2 \therefore r = 5$. Como $r > 0$, temos uma P.A. crescente.

4. Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Numa progressão aritmética um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (r) e do primeiro termo (a_1) através de uma fórmula matemática. Para entendermos essa fórmula, consideremos uma escada que une dois pisos. Ao piso inferior associamos um número a_1 que indica a altitude (altura em relação ao nível do mar) desse piso. Aos patamares da escada associamos as respectivas altitudes: $a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$ (conforme a figura).



Sendo r a altura de cada degrau, observe que as altitudes $a_1, a_2, a_3, ...$ formam, nessa ordem, uma P.A. Se um indivíduo estiver na altitude a_1, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_7?

Observando a figura, percebemos que o indivíduo deve subir seis degraus ($6r$). Assim, a altitude a_7 é igual à soma $a_1 + 6r$, isto é: $a_7 = a_1 + 6r$.

Se o indivíduo estiver na altitude a_1, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_n?

Ora, estando na altitude a_1, o indivíduo não terá subido nenhum degrau; na altitude a_2 terá subido um degrau; na altitude a_3 terá subido dois degraus; na altitude a_4 terá subido três degraus; e assim por diante.

Ou seja:

$$a_1 = a_1 + 0r,\ a_2 = a_1 + 1r,\ a_3 = a_1 + 2r,\ a_4 = a_1 + 3r, \ldots$$

na altitude a_n terá subido $n - 1$ degraus. Assim, a altitude a_n pode ser expressa como:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\,r,} \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Generalizando, temos:

Numa P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r tem-se: $a_n = a_1 + (n - 1)r, \ \ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. Essa sentença é chamada de **fórmula do termo geral da P.A.**

Exercícios resolvidos

R.5 Determinar o 61º termo da P.A. (9, 13, 17, 21, ...).

Resolução

$$a_1 = 9,\ \ r = 4,\ \ n = 61,\ \ a_{61} = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 61$, temos que:

$$a_{61} = a_1 + (61 - 1)r \ \ \therefore\ \ a_{61} = a_1 + 60r \ \ \therefore\ \ a_{61} = 9 + 60 \cdot 4 \ \ \therefore\ \ a_{61} = 249.$$

R.6 Determinar a razão da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$.

Resolução

$$a_1 = 2,\ \ a_8 = 3,\ \ n = 8,\ \ r = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 8$, temos:

$$a_8 = a_1 + 7r \ \therefore\ 3 = 2 + 7r \Rightarrow r = \frac{1}{7}.$$

R.7 Determinar o número de termos da P.A. (4, 7, 10, ..., 136).

Resolução

$$a_1 = 4,\ \ a_n = 136,\ \ r = 3,\ \ n = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos que:

$$136 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \ \ \therefore\ \ 136 = 4 + 3n - 3 \ \ \therefore\ \ 3n = 135 \Rightarrow n = 45.$$

Logo, a P.A. possui 45 termos.

R.8 Determinar a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 12$ e $a_3 + a_5 = 18$.

Resolução

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos: $a_4 = a_1 + 3r$, $a_3 = a_1 + 2r$ e $a_5 = a_1 + 4r$.
Logo:

$$\begin{cases} a_1 + \overbrace{a_4} = 12 \\ \underbrace{a_3} + \underbrace{a_5} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + \overbrace{a_1 + 3r} = 12 \\ \underbrace{a_1 + 2r} + \underbrace{a_1 + 4r} = 18 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2a_1 + 3r = 12 \\ 2a_1 + 6r = 18. \end{cases}$$

Subtraímos, então, essas igualdades, membro a membro: $-3r = -6 \therefore r = 2$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7 (a, b, c), B.8, B.11, B.13, B.15, B.17, C.4, C.6, C.9, C.11.

Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7 (d, e, f), B.9, B.10, B.12, B.14, B.16, B.18, C.1, C.2, C.3, C.5, C.7, C.8, C.10, C.12.

Exercícios básicos

B.1 Verifique se é ou não progressão aritmética cada uma das seguintes seqüências:

a) $(a_1, a_2, a_3, ..., a_6)$ tal que $a_n = 5n + 1$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$;

b) $(a_1, a_2, a_3, ..., a_9)$ tal que $a_n = n^2$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 9$;

c) $(a_1, a_2, a_3, ... a_8)$ tal que $a_n = \frac{n}{3} + 1$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 8$.

B.2 Quais das seqüências são progressões aritméticas?

a) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = 1 - 3n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 5$.

b) $(a_1, a_2, a_3, ..., a_7)$ tal que $a_n = \frac{n + 1}{n}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 7$.

c) $(a_1, a_2, a_3, ... a_6)$ tal que $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{3}, \ \forall n, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \leq 6. \end{cases}$

B.3 A seqüência (a_n), dada por $a_n = 4n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é progressão aritmética? Justifique sua resposta. (**Sugestão:** como, neste caso, a variável n deve assumir infinitos valores, a melhor maneira de se verificar se é, ou não, P.A., consiste em calcular a diferença $a_{n+1} - a_n$; se tal diferença for constante, então a seqüência é P.A.; caso contrário, não é.)

B.4 Verifique se é, ou não, progressão aritmética a seqüência (a_n) tal que $a_n = n^2 + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

B.5 Calcule a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, sabendo que $a_{15} = \frac{2}{3}$ e $a_{16} = \frac{2}{5}$.

B.6 Qual é a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja lei de formação é $a_n = 5n - 1$?

B.7 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das seguintes progressões aritméticas:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 8 - 3n$.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 2n + 1$.

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3} - n$.

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 8. \end{cases}$

e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{n^2 + 4n + 4}{(n + 2)^2}$.

f) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{7}{3} + \frac{n}{2}$.

B.8 Determine o 51º termo da P.A. (5, 9, 13, 17, ...).

B.9 Qual é o 62º termo da P.A. (98, 93, 88, ...)?

B.10 Obtenha o 25º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = \frac{2}{3}$ e $a_2 = \frac{11}{8}$.

B.11 Encontre a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 14$ e $a_{16} = 45$.

B.12 Calcule a razão da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tal que $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

B.13 Quantos termos possui a P.A. (12, 18, 24, ..., 222)?

B.14 Determine o número de termos da P.A. cujo último termo é $\dfrac{103}{6}$, o primeiro é $\dfrac{1}{2}$ e a razão é $\dfrac{1}{3}$.

B.15 Calcule o número de múltiplos de 7 existentes entre 10 e 200.

B.16 Quantos números inteiros divisíveis por 13 existem entre 100 e 1000?

B.17 Determine a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_9 = 15$ e $a_3 + a_6 = 18$.

B.18 Obtenha o primeiro termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_7 = 10$ e $a_3 + a_4 = 5$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $a_7 = 3x + 5$ e $a_8 = 6x + 7$ são termos consecutivos de uma P.A. crescente, podemos afirmar que:

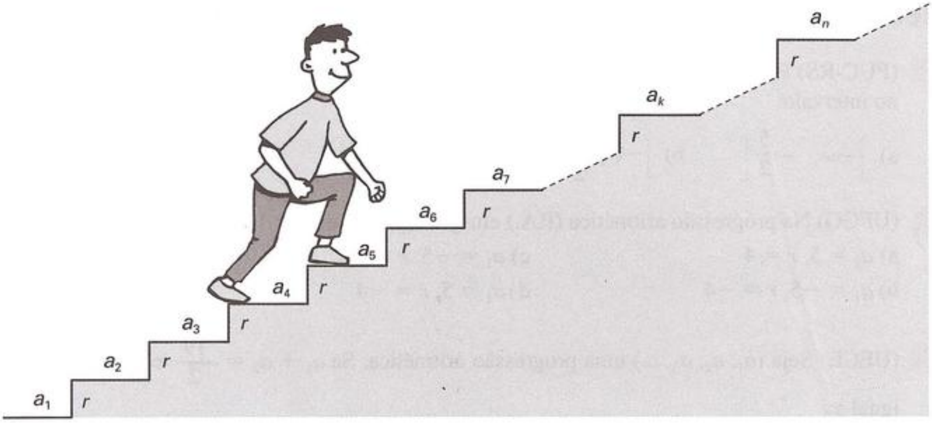
a) $x > 0$ b) $x > -\dfrac{2}{3}$ c) $x = 6$ d) $x = 1$ e) $x < -\dfrac{2}{3}$

C.2 Numa P.A. decrescente tem-se que $a_{21} = 5x + 3$ e $a_{22} = 2x - 4$. Pode-se afirmar que:

a) $x > -\dfrac{7}{3}$ b) $x < \dfrac{1}{5}$ c) $x = 0$ d) $x = 8$ e) $x > 1$

C.3 Determine o número de termos da P.A.: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{2 - 5\sqrt{2}}{3}, ..., \dfrac{24 - 71\sqrt{2}}{3}\right)$.

C.4 Considere a mesma escada que nos auxiliou na obtenção da fórmula do termo geral:



a) Se o indivíduo estiver na altitude a_4, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_7?
b) De acordo com a conclusão do item (a), complete a igualdade $a_7 = a_4 + (....)r$.
c) Se o indivíduo estiver na altitude a_{21}, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_{30}?
d) De acordo com a conclusão do item (c), complete a igualdade: $a_{30} = a_{21} + (....)r$.
e) Se um indivíduo estiver na altitude a_k $(k < n)$, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_n?
f) De acordo com a conclusão do item (e), complete a igualdade: $a_n = a_k + (....)r$. (Essa sentença é uma extensão da fórmula do termo geral da P.A.)
g) Se no item anterior tivermos $k \geqslant n$, a fórmula continua válida?

C.5 Sendo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma progressão aritmética de razão r, classifique cada afirmação como V ou F:
a) $a_{30} = a_1 + 29r$ c) $a_7 = a_3 + 4r$ e) $a_{31} = a_5 + 20r$ g) $a_n = a_k + (n - k)r$
b) $a_{30} = a_1 + 30r$ d) $a_{28} = a_8 + 20r$ f) $a_{12} = a_{18} - 6r$

C.6 Determine o 62º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de razão $r = 2$, tal que $a_{20} = 5$. **Sugestão:** expresse a_{62} em função de a_{20} e de r.

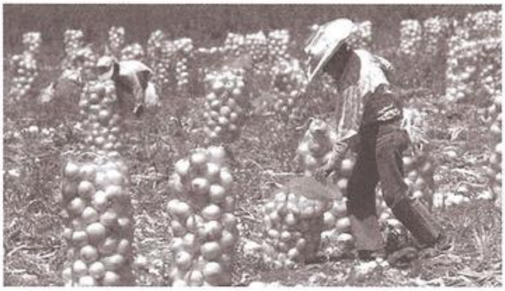
C.7 Obtenha o 46º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de razão $r = 5$ tal que $a_{12} = -8$.

C.8 Encontre o 28º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_8 = 13$ e $a_{10} = 73$.

C.9 Calcule a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_4 + a_6 = 16$ e $a_{10} + a_8 = 40$. **Sugestão:** expresse a_6, a_{10} e a_8 em função de a_4 e r.

C.10 Determine o 21º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_3 + a_{10} = 46$ e $a_8 - a_6 = 8$.

C.11 Supondo que a produção mundial de alimentos cresce em progressão aritmética de razão r (toneladas) e que no ano de 1993 a produção foi de x (toneladas), qual será a produção no ano de 2025?


MAITRE-GAILLARD/GAMMA-SIGLA

C.12 O cometa de mais longo período que se conhece é o Herschel-Rigollet. Seu período é 156 anos. Esse cometa passou pelo periélio em agosto de 1939. Qual será o primeiro ano, após o ano 4000, em que o cometa Herschel-Rigollet passará novamente por aquele ponto?

C.13 Uma propaganda deve ir ao ar de 45 em 45 min, começando às 14 h. Qual é o número de apresentações diárias dessa propaganda?

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) Para que a progressão aritmética de razão $r = 5 - 2x$ seja decrescente, x deve assumir valores no intervalo:

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$ b) $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$ c) $\left]-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[$ d) $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ e) $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

V.2 (UFGO) Na progressão aritmética (P.A.) em que $a_{11} = 35$ e $a_6 = 15$, temos:
a) $a_1 = 5, r = 4$ c) $a_1 = -5, r = 4$ e) $a_1 = 4, r = 5$
b) $a_1 = -5, r = -4$ d) $a_1 = 5, r = -4$

V.3 (UECE) Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão aritmética. Se $a_1 + a_2 = \frac{19}{2}$ e $a_2 + a_3 = \frac{25}{2}$, então a_3 é igual a:

a) 4 b) $\frac{11}{2}$ c) $\frac{13}{2}$ d) 7 e) n.d.a.

Capítulo 3

Interpolação aritmética

1. Meios aritméticos

Numa P.A. finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, os termos $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$ são chamados de "**meios aritméticos** da P.A.".

Exemplo

Na P.A. (1, 4, 7, 10, 13, 16) temos que 4, 7, 10, 13 são os meios aritméticos da P.A.

2. Interpolação aritmética

Interpolar (ou inserir) k meios aritméticos entre dois números a e b, nessa ordem, significa determinar a P.A. de $k + 2$ termos, em que a representa o primeiro termo e b o último.

Exercício resolvido

R.1 Interpolar cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.A. de sete termos com $a_1 = 1$ e $a_7 = 25$:

$$(\underset{a_1}{1}, \underbrace{..., ..., ..., ..., ...,}_{\textbf{Meios aritméticos}} \underset{a_7}{25}).$$

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos que: $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 25 = 1 + 6r \therefore r = 4$.

Logo, a P.A. é (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25).

3. Propriedades de uma P.A.

Propriedade A.1

Numa P.A. finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão r.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois $k + 1 + n - k = n + 1$. Calculando a soma desses termos, temos:

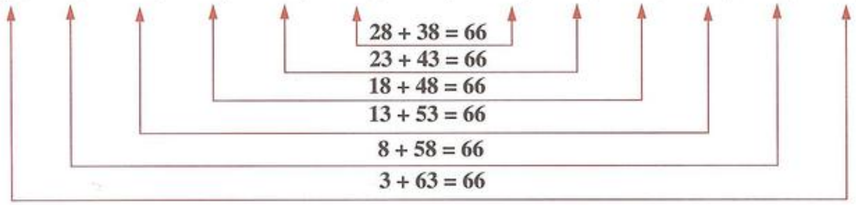
$$\underbrace{a_{k+1}} + \overbrace{a_{n-k}} = \underbrace{a_1 + (k+1-1)\,r} + \overbrace{a_1 + (n-k-1)\,r} =$$

$$= a_1 + \cancel{kr} + a_1 + (n-1)\,r - \cancel{kr} = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,r} = a_1 + \underbrace{a_n}$$

(c.q.d.)

Exemplo

$$(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ 38,\ 43,\ 48,\ 53,\ 58,\ 63).$$



Propriedade A.2

A seqüência (a, b, c) é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre a e c, isto é: $b = \dfrac{a + c}{2}$.

Demonstração

Temos que:

$$(a,\ b,\ c) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow b - a = c - b$$

$$b - a = c - b \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}.$$

Logo, (a, b, c) é P.A. $\Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2}$.

(c.q.d.)

Exemplos

a) Note que na P.A. (8, 11, 14) temos $11 = \dfrac{8 + 14}{2}$.

b) Para que a seqüência $(5, x, 1)$ seja P.A., devemos ter $x = \dfrac{5 + 1}{2} \Rightarrow x = 3$.

Propriedade A.3

Numa P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é igual à média aritmética entre os extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma P.A. com número ímpar de termos: $(a_1, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_n)$.

Temos que a seqüência (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) também é P.A. Pela propriedade A.2, temos que:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}. \quad \textbf{(I)}$$

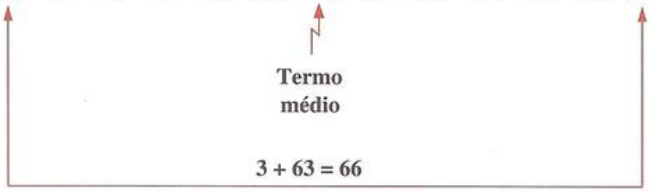
Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos a_1 e a_n. Logo, pela propriedade A.1, podemos concluir que: $a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + a_n$. **(II)**

Finalmente, por (I) e (II) temos: $a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

(c.q.d.)

Exemplo

$$(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ 38,\ 43,\ 48,\ 53,\ 58,\ 63).$$



$$33 = \frac{3 + 63}{2}.$$

Exercícios resolvidos

R.2 Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{51})$, tem-se que $a_1 + a_{51} = 28$.

a) Calcular $a_4 + a_{48}$.

b) Determinar o termo a_{26}.

Resolução

a) a_4 e a_{48} são termos equidistantes dos extremos da P.A., pois $4 + 48 = 51 + 1$.
Logo, pela propriedade A.1, temos: $a_4 + a_{48} = a_1 + a_{51} = 28$.

b) a_{26} é o termo médio da P.A., pois $2 \cdot 26 = 51 + 1$.
Logo, pela propriedade A.3, temos: $a_{26} = \dfrac{a_1 + a_{51}}{2} \Rightarrow a_{26} = \dfrac{28}{2} = 14$.

R.3 Determinar o valor de x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(x + 3, 21, 6x + 4)$ seja P.A.

Resolução

A seqüência será P.A. se, e somente se, o termo médio for igual à média aritmética entre os extremos (prop. A.2), isto é: $21 = \dfrac{x + 3 + 6x + 4}{2} \therefore 7x + 7 = 42 \therefore x = 5$.

4. Representação genérica de uma P.A.

É de grande utilidade, para a resolução de certos problemas, sabermos representar genericamente uma P.A. Como exemplos, mostraremos algumas representações.

- P.A. de três termos:

$$(x, x + r, x + 2r) \text{ ou } (x - r, x, x + r), \text{ em que a razão é } r.$$

- P.A. de quatro termos:

$$(x, x + r, x + 2r, x + 3r) \text{ ou } (x - 3r, x - r, x + r, x + 3r), \text{ em que a razão é } 2r.$$

Exercícios resolvidos

R.4 Determinar a P.A. crescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e que o produto deles é -8.

Resolução

Quando se conhece a soma dos termos, a representação mais cômoda é $(x - r, x, x + r)$. Pelo enunciado, temos que:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \Rightarrow 3x = 3 \ \therefore\ x = 1 \quad \textbf{(I)} \\ (x - r)\,x\,(x + r) = -8. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = -8 \ \therefore 1 - r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 9 \ \therefore r = \pm 3$.

Como devemos ter uma P.A. crescente, só interessa a razão positiva, isto é, $r = 3$.
Assim, a P.A. procurada $(x - r, x, x + r)$ para $x = 1$ e $r = 3$ é $(-2, 1, 4)$.

R.5 Numa P.A. de quatro termos, a soma do primeiro com o quarto termo é 2 e o produto do segundo pelo terceiro termo é -8. Determinar a P.A.

Resolução

Como conhecemos a soma do primeiro com o quarto termo, a representação mais cômoda é $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$. Essa representação é mais conveniente pois ao igualarmos a 2 a soma do primeiro com o quarto termo já conseguimos o valor de x. Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} x - 3r + x + 3r = 2 \Rightarrow 2x = 2 \ \therefore\ x = 1 \quad \textbf{(I)} \\ (x - r)(x + r) = -8. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $(1 - r)(1 + r) = -8 \ \therefore 1 - r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 9 \ \therefore r = \pm 3$.
Temos, então, duas possibilidades para a P.A. $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$:
$1^{\underline{a}}$) $x = 1$ e $r = 3 \Rightarrow (-8, -2, 4, 10)$;
$2^{\underline{a}}$) $x = 1$ e $r = -3 \Rightarrow (10, 4, -2, -8)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.6, B.8, B.11, B.13, C.4, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, B.7, B.9, B.10, B.12, B.14, C.1, C.2, C.3, C.5, C.6, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Interpole seis meios aritméticos entre 4 e 67, nessa ordem.

B.2 Insira (ou interpole) cinco meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem.

B.3 Qual é a razão da P.A. que se obtém interpolando quinze meios aritméticos entre 3 e 5, nessa ordem?

B.4 Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{70})$, tem-se que $a_{11} + a_{60} = 42$. Calcule $a_1 + a_{70}$.

B.5 Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{100})$, tem-se que $a_1 + a_{100} = 353$. Calcule $a_{10} + a_{91}$.

B.6 Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{91})$, tem-se que $a_1 + a_{91} = 432$. Calcule o valor de a_{46}.

B.7 O termo médio de uma P.A. é 45 e o primeiro termo é 12. Calcule o valor do último termo dessa P.A.

B.8 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(1 - x,\ x - 2,\ 2x - 1)$ seja P.A.

B.9 Qual é o valor real de x tal que a seqüência $(x - 3,\ x^2 + 2,\ 5x + 3)$ seja P.A.?

B.10 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(2 - 4x,\ 3 - x^2,\ 1 - x)$ seja P.A. crescente.

B.11 Numa P.A. decrescente de três termos a soma desses termos é 6 e o produto deles é -24. Determine a P.A.

B.12 Encontre a P.A. crescente de três termos sabendo que a soma desses termos é $-\frac{1}{2}$ e que o produto dos extremos é $-\frac{1}{12}$.

B.13 Determine a P.A. crescente de quatro termos, sabendo que a soma desses termos é 28 e que o produto do segundo pelo terceiro termo é 45.

B.14 Obtenha a razão da P.A. crescente de quatro termos, sabendo que a soma desses termos é 8 e que o produto deles é -15.

Exercícios complementares

C.1 Qual é a razão da P.A. que se obtém interpolando k meios aritméticos entre a e b, nessa ordem?

C.2 Interpolando k meios aritméticos entre 9 e 10, nessa ordem, obtém-se a P.A. $\left(9, \frac{55}{6}, \frac{56}{6}, ..., 10\right)$. Determine k.

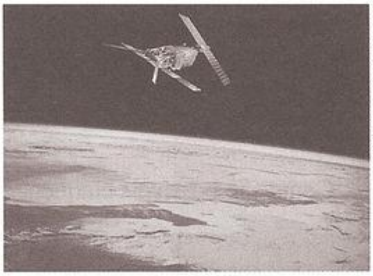
C.3 Para que valor real de x a seqüência $(x^3 + 3,\ x^2 + 6x,\ 13x - 3)$ é P.A. decrescente?

C.4 Determine x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que a seqüência $(1,\ 3 + 2 \text{ sen } x,\ 14 \text{ sen } x)$ seja P.A.

C.5 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(2 \log_2 x,\ 2 + 3 \log_2 x,\ 8 \log_2 x)$ seja P.A.

C.6 Numa P.A. de cinco termos, a soma dos extremos é 6 e o quociente do quarto pelo terceiro termo é 2. Determine o segundo termo da P.A.

C.7 Um satélite artificial, em órbita circular em torno da Terra, realiza uma volta completa a cada 6 h. Às 18 h do dia 15 de janeiro de 1992 e às 12 h do dia 25 de janeiro de 1992 esse satélite esteve sobre a cidade de São Paulo. Quantas voltas em torno da Terra deu o satélite nesse intervalo de tempo?


ESA/SPL-STOCK PHOTOS

C.8 Em uma estrada são instalados telefones SOS a cada 2,8 km. Calcule o número de telefones instalados no trecho que vai do quilômetro 5 até o quilômetro 61, sabendo que nessas duas marcas há telefones instalados. Conte inclusive esses dois telefones.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) A razão da P.A. que se obtém inserindo nove meios aritméticos entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, nessa ordem, é:

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{40}$ c) $\frac{1}{60}$ d) $\frac{1}{80}$ e) $\frac{1}{100}$

V.2 (FGV-SP) Quatro números constituem uma progressão aritmética. A sua soma vale 24 e a soma de seus quadrados vale 164. O maior desses números é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) n.d.a.

V.3 (Fesp-SP) Se $17 - 5x$, $6 + 2x$ e $1 + 6x$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então o valor de x é:

a) 0 b) -1 c) 1 d) 3 e) 2

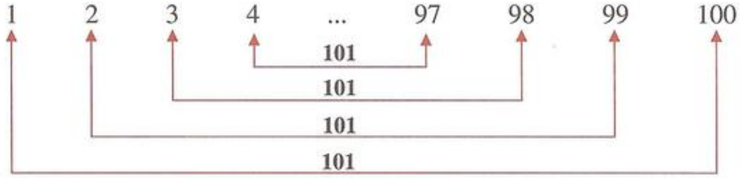
Capítulo 4

Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

1. Introdução

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Büttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um gurizote de oito anos de idade aproximou-se da mesa do senhor Büttner e, mostrando-lhe sua prancheta, proclamou: "Taí". O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele gurizote viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2, com o penúltimo, 99, é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3, com o antepenúltimo, 98, é igual a 101; e, assim por diante, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos:



Como são possíveis cinqüenta somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Esse raciocínio pode ser estendido para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer, como veremos a seguir.

2. Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Antes de apresentarmos uma fórmula para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A., analisemos dois casos particulares:

I. Consideremos a P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$. Indicando por S_6 a soma dos seis termos da P.A., temos que: $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$.

Sabemos que numa P.A. finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Assim, nessa P.A.: $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$.

Portanto, temos:

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow S_6 = (a_1 + a_6) + (a_2 + a_5) + (a_3 + a_4)$$
$$\therefore S_6 = (a_1 + a_6) + (a_1 + a_6) + (a_1 + a_6) \quad \therefore S_6 = (a_1 + a_6)3.$$

Isto é, a soma dos seis termos da P.A. é igual ao produto da soma dos extremos pela metade do número de termos.

E se a P.A. tiver um número ímpar de termos? Será que mesmo assim a soma desses termos pode ser calculada da maneira descrita anteriormente? Vejamos.

II. Consideremos a P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$. Indiquemos por S_7 a soma dos seus sete termos:

$$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

Verificamos que:

- $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5$, pela propriedade dos termos equidistantes dos extremos;
- $a_4 = \dfrac{a_1 + a_7}{2}$, pela propriedade do termo médio da P.A.

Assim, temos que:

$$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = (a_1 + a_7) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_5) + a_4$$

$$\therefore\ S_7 = (a_1 + a_7) + (a_1 + a_7) + (a_1 + a_7) + \frac{(a_1 + a_7)}{2}\ \therefore\ S_7 = \frac{(a_1 + a_7)\,7}{2}.$$

Note, portanto, que nesse caso também a soma dos termos da P.A. é igual ao produto da soma dos extremos pela metade do número de termos.

Podemos generalizar a conclusão obtida em (I) e (II) enunciando o seguinte:

Teorema

> A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é dada por:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{e} \quad S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1.$$

Somemos, membro a membro, essas igualdades:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Note que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos, $(a_1 + a_n)$, ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos. Pela propriedade dos termos equidistantes dos extremos podemos escrever:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{\textbf{n parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

$$\therefore\ 2S_n = (a_1 + a_n)n\ \therefore\ S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a soma dos trinta primeiros termos da P.A. (4, 9, 14, 19, ...).

Resolução

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$ para $n = 30$, temos: $S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30})\,30}{2}$.

Precisamos calcular o valor de a_{30}. Pelo termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ temos:

$$a_{30} = a_1 + 29r \quad \therefore \quad a_{30} = 4 + 29 \cdot 5 \quad \therefore \quad a_{30} = 149.$$

Logo, $S_{30} = \dfrac{(4 + 149)\,30}{2} = 2295.$

R.2 Calcular a soma dos termos da P.A. finita (5, 8, 11, ..., 122).

Resolução

Precisamos conhecer o número de termos da P.A.

$$a_1 = 5,\ a_n = 122,\ \mathrm{r} = 3,\ n = ?$$

Pela fórmula do termo geral da P.A., $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos que:

$$122 = 5 + (n - 1)3 \quad \therefore 122 = 5 + 3n - 3 \quad \therefore 120 = 3n \quad \therefore n = 40.$$

Aplicamos agora a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$ para $n = 40$:

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40})\,40}{2} \quad \therefore \; S_{40} = \frac{(5 + 122)\,40}{2} \quad \therefore \; S_{40} = 2\,540.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.6, B.8, B.10, C.1, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, B.7, B.9, B.11, C.2, C.3, C.4, C.6, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a soma dos oitenta primeiros termos da P.A. (6, 9, 12, 15, 18, ...).

B.2 Obtenha a soma dos 51 primeiros termos da P.A. (−15, −11, −7, −3, 1, ...).

B.3 Determine a soma dos termos da P.A. finita (6, 10, 14, ..., 134).

B.4 Qual é a soma dos termos da P.A. finita (−30, −21, −12, ..., 213).

B.5 A P.A. (a_1, a_2, a_3, ...) é tal que $a_4 + a_5 = 89$ e $a_2 + a_6 = 78$. Qual é a soma dos seus vinte primeiros termos?

B.6 Calcule a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 100 e 300.

B.7 Encontre a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 200 e 500.

B.8 Calcule o número de termos da P.A. cujo primeiro termo é 1, o último termo é 157 e a soma de seus termos é 3160.

B.9 Sendo S_n a soma dos termos da P.A. (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) de razão $r = 4$ e com $a_1 = 6$, determine n de modo que $S_n = 1456$.

B.10 A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 2n^2$. Determine o primeiro termo e a razão da P.A.

B.11 Determine o quinto termo da P.A. cuja soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = 2n^2 + 6n$.

Exercícios complementares

C.1 Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da P.A. (4, 7, 10, 13, ...), determine o menor valor de n tal que $S_n > 40n$.

C.2 Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da P.A. (−12, −8, −4, 0, 4, 8, ...), determine o maior valor de n tal que $S_n < 60$.

C.3 O símbolo S_n indica a soma dos n primeiros termos da P.A. (1, 5, 9, ...). Determine o maior valor de n tal que $S_n < 78$.

C.4 O produto $P = a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^{100}$ é igual a:
a) $P = a^{3600}$ b) $P = a^{2800}$ c) $P = a^{7000}$ d) $P = a^{5050}$ e) $P = a^{4800}$

C.5 A letra grega Σ (sigma) é usada, nas ciências exatas, para indicar uma soma. Por exemplo, a expressão: $\sum_{j=1}^{5} 2j$, que se lê "somatório de $2j$, com j variando (em $\mathbb{N}$) de 1 até 5", é calculada atribuindo-se os valores 1, 2, 3, 4 e 5 à variável j da expressão $2j$ e a seguir somando-se os resultados obtidos. Isto é, primeiro obtemos os valores de $2j$:

$$j = 1 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 1 = 2;\ j = 2 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 2 = 4;\ j = 3 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 3 = 6;$$
$$j = 4 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 4 = 8;\ j = 5 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 5 = 10.$$

Somando esses valores, encontramos: $\sum_{j=1}^{5} 2j = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$.

De acordo com essa idéia, calcule: a) $\sum_{j=1}^{50} 2j$ b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1)$

C.6 Determine n de modo que $\sum_{j=1}^{n} (2j + 3) = 1085$.

C.7 Determine o maior valor de n de modo que $\sum_{j=1}^{n} (5j - 25) \leqslant 550$.

C.8 Calcule o valor da expressão $\sum_{j=20}^{30} (3j + 1)$.

C.9 Calcule o valor da expressão $\sum_{j=15}^{28} (2 - 3j)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-SP) A soma dos múltiplos de 9 compreendidos entre 65 e 249 é:
a) 2835 b) 3150 c) 5670 d) 4328 e) 2941

V.2 (FEI-SP) Se em uma progressão aritmética a soma dos n primeiros termos é $3n^2$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, então a razão dessa progressão é:
a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

V.3 (Cescem) O valor da expressão $E = \sum_{j=1}^{20} (2j + 1) - \sum_{k=8}^{15} 3k$ é:
a) 128 b) 276 c) 440 d) 368 e) 164

V.4 (FGV-SP) Um atleta corre sempre 500 m a mais que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de quinze dias ele correu um total de 67500 m, o número de metros percorridos no terceiro dia foi:
a) 1000
b) 1500
c) 2000
d) 2500
e) 2600

W. MORGAN/WL-STOCK PHOTOS

Capítulo 5

Problemas literais sobre P.A.

Neste capítulo vamos fazer uma revisão sobre P.A., resolvendo problemas que envolvem expressões literais.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar o termo a_n (enésimo termo) da P.A. (2, 10, 18, 26, ...).

Resolução

Observe que: $a_1 = 2$ e $r = 8$.

Pela fórmula do termo geral de uma P.A., $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_n = 2 + (n - 1)8 \Rightarrow a_n = 2 + 8n - 8 \therefore a_n = 8n - 6.$$

Nota: para entender o significado da resposta desse exercício, atribua a n os valores 1, 2, 3, 4, ... Isto é:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 8 \cdot 1 - 6 \therefore a_1 = 2; \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 8 \cdot 2 - 6 \therefore a_2 = 10; \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 8 \cdot 3 - 6 \therefore a_3 = 18; \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 8 \cdot 4 - 6 \therefore a_4 = 26; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Perceba, portanto, que a sentença $a_n = 8n - 6$ é uma lei de formação da P.A. (2, 10, 18, 26, ...).

R.2 Calcular a soma dos n primeiros termos da P.A. (2, 10, 18, 26, ...).

Resolução

Observe que $a_1 = 2$ e, pelo exercício anterior, $a_n = 8n - 6$.

Pela fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{(2 + 8n - 6)\,n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(8n - 4)\,n}{2} \quad \therefore S_n = (4n - 2)n \therefore S_n = 4n^2 - 2n.$$

Nota: a resposta obtida nesse exercício, $S_n = 4n^2 - 2n$, é uma fórmula para se calcular a soma dos n primeiros termos da P.A. (2, 10, 18, 26, ...); por exemplo, a soma dos quatro primeiros termos dessa P.A. é:

$$S_4 = 4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 56.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.6, B.7, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.8, B.9, B.10, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Determine o termo a_n (enésimo termo) da P.A. (4, 6, 8, 10, ...).

B.2 Calcule a soma dos n primeiros termos da P.A. (4, 6, 8, 10, ...).

B.3 Obtenha a razão da P.A. $\left(\frac{k+2}{k}, \frac{k+4}{k}, \frac{k+6}{k}, ...\right)$ com $k \in \mathbb{R}$.

B.4 Qual é o trigésimo termo da P.A. $\left(\frac{k+2}{k}, \frac{k+4}{k}, \frac{k+6}{k}, ...\right)$ com $k \in \mathbb{R}$?

B.5 Determine o termo a_n (enésimo termo) da P.A. $\left(\frac{k+2}{k}, \frac{k+4}{k}, \frac{k+6}{k}, \dots\right)$ com $k \in \mathbb{R}$.

B.6 Encontre a soma dos trinta primeiros termos da P.A. $\left(\frac{k+2}{k}, \frac{k+4}{k}, \frac{k+6}{k}, ...\right)$ com $k \in \mathbb{R}$.

B.7 Calcule a soma dos n primeiros termos da P.A. $\left(\frac{k+2}{k}, \frac{k+4}{k}, \frac{k+6}{k}, ...\right)$ com $k \in \mathbb{R}$.

B.8 Obtenha a soma dos n primeiros termos da P.A. $(n + 1, 2n + 3, 3n + 5, ...)$ com $n \in \mathbb{N}^*$.

B.9 Determine a razão da P.A. que se obtém interpolando oito meios aritméticos entre n e $2n$, nessa ordem.

B.10 Qual é a razão da P.A. que se obtém interpolando n meios aritméticos entre 1 e n, nessa ordem?

Exercícios complementares

C.1 Considere a seguinte P.A., formada pelos números pares positivos: (2, 4, 6, 8, ...). Determine o termo a_n dessa P.A., isto é, determine o enésimo número par positivo.

C.2 Qual é a soma dos n primeiros números pares positivos?

C.3 Determine o enésimo número ímpar positivo. **Nota:** esse enunciado pode ser entendido como: "Determine o termo a_n da P.A. (1, 3, 5, 7, ...)".

C.4 Calcule a soma dos n primeiros números ímpares positivos.

C.5 Encontre o número de termos da P.A. $\left(\frac{a+\sqrt{2}}{a}, 1, \frac{a-\sqrt{2}}{a}, ..., \frac{a-29\sqrt{2}}{a}\right)$.

C.6 Sabendo que numa P.A. de razão $r = 5$ temos $a_k = 18$, calcule, em função de k, o termo a_{30}.

C.7 Se a, b, c, nessa ordem, estão em P.A., então o valor de $2a - 3b + 2c$ é igual a:
a) $2a$ b) $a + c$ c) b d) $4a - c$ e) $a - c$

Questões dos vestibulares

V.1 (ITA-SP) Numa progressão aritmética com n termos, $n > 1$, sabemos que o primeiro é igual a $\frac{1+n}{n}$ e a soma deles vale $\frac{1+3n}{2}$. Então o produto da razão dessa progressão pelo último termo é igual a:

a) $2n$ b) $\frac{2}{n}$ c) $3n$ d) $\frac{3}{n}$ e) $5n$

V.2 (Vunesp) Um coronel disporá parte do seu regimento num triângulo completo, colocando um homem na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e assim por diante. Forma então um triângulo com 231 homens. Qual é o número de linhas?

V.3 (UnB-DF) Numa progressão aritmética de n termos, com $n > 1$, a soma dos k primeiros termos é dada pela fórmula $S_k = \frac{5k^2}{2} + \frac{7k}{2}$, para todo k, $1 \leq k \leq n$. Então a razão dessa progressão é:

a) 4 c) 8 e) calculável, mas não é 4, nem 5 e nem 8.
b) 5 d) impossível de ser determinada.

Capítulo 6

O que é progressão geométrica?

1. Introdução

Um capital de R$ 10.000,00 é aplicado durante seis meses à taxa de juro de 10% ao mês. Qual o montante acumulado ao final da aplicação?

Calculando mês a mês o montante, teremos:

Capital aplicado	10.000,00
Montante no 1º mês	10.000,00 + 1.000,00 = 11.000,00
Montante no 2º mês	11.000,00 + 1.100,00 = 12.100,00
Montante no 3º mês	12.100,00 + 1.210,00 = 13.310,00
Montante no 4º mês	13.310,00 + 1.331,00 = 14.641,00
Montante no 5º mês	14.641,00 + 1.464,10 = 16.105,10
Montante no 6º mês	16.105,10 + 1.610,51 = 17.715,61

Assim, o montante acumulado ao final do sexto mês será de R$ 17.715,61.

Esse problema pode ser resolvido de um modo muito mais simples se observarmos que o montante acumulado num determinado mês é igual ao do mês anterior multiplicado por 1,1:

$$\begin{aligned}
11.000,00 &= 10.000,00 \cdot 1,1;\\
12.100,00 &= 11.000,00 \cdot 1,1;\\
13.310,00 &= 12.100,00 \cdot 1,1;\\
14.641,00 &= 13.310,00 \cdot 1,1;\\
16.105,10 &= 14.641,00 \cdot 1,1;\\
17.715,61 &= 16.105,10 \cdot 1,1.
\end{aligned}$$

Portanto o montante M acumulado ao final do sexto mês pode ser calculado como:

$$M = 10.000,00 \cdot (1,1)^6.$$

Note que, na seqüência dos montantes (10.000,00; 11.000,00; 12.100,00; 13.310,00; 14.641,00; 16.105,10; 17.715,61), cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante (no caso, a constante é 1,1). Seqüências como essa são denominadas **progressões geométricas**.

2. Progressão geométrica (P.G.)

Definição

> **Progressão geométrica** é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de "**razão** da progressão geométrica".

Exemplos

a) (3, 6, 12, 24, 48, 96) é uma P.G. finita de razão $q = 2$.

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ é uma P.G. infinita de razão $q = \frac{1}{2}$.

c) (2, −6, 18, −54, 162, ...) é uma P.G. infinita de razão $q = -3$.

d) (5, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. infinita de razão $q = 0$.

e) (0, 0, 0, ...) é uma P.G. infinita de razão indeterminada.

Exercício resolvido

R.1 Verificar se é ou não progressão geométrica a seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ dada pela lei de formação $a_n = 4 \cdot 3^n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 5$.

Resolução

Na sentença $a_n = 4 \cdot 3^n$, atribuímos a n os valores 1, 2, 3, 4 e 5:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 4 \cdot 3^1 \therefore a_1 = 12, \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 4 \cdot 3^2 \therefore a_2 = 36, \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 4 \cdot 3^3 \therefore a_3 = 108, \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 4 \cdot 3^4 \therefore a_4 = 324, \\ n = 5 &\Rightarrow a_5 = 4 \cdot 3^5 \therefore a_5 = 972. \end{aligned}$$

Obtemos então a seqüência (12, 36, 108, 324, 972), que é uma P.G. de razão 3.

2.1. Cálculo da razão de uma progressão geométrica

Teorema

Se uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ possui todos os termos diferentes de zero, então sua razão q é dada por:

$$\boxed{q = \frac{a_{n+1}}{a_n},} \qquad \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstração

De fato, se $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma P.G. de razão q, então:

$$a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q,\ a_4 = a_3 q, ..., a_{n+1} = a_n q,\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Como, por hipótese, todos os termos da P.G. são diferentes de zero, podemos escrever:

$$q = \frac{a_2}{a_1},\ q = \frac{a_3}{a_2},\ q = \frac{a_4}{a_3}, ...,\ q = \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

(c.q.d.)

A recíproca do teorema anterior também é verdadeira:

Teorema

Se $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (q constante), $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, então a seqüência é P.G.

A demonstração é imediata.

Em palavras mais simples, os teoremas anteriores afirmam que: "uma seqüência cujos termos são todos não-nulos é P.G. se, e somente se, o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor é constante".

Exercícios resolvidos

R.2 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_{15} = 32$ e $a_{16} = 108$.

Resolução

A razão q da P.G. é tal que: $q = \frac{a_{16}}{a_{15}}$, se $a_{15} \neq 0$ $\therefore$ $q = \frac{108}{32} = \frac{27}{8}$.

R.3 Verificar se é ou não progressão geométrica a seqüência (a_n) dada pela lei de formação $a_n = 3^{\frac{n}{2}}$, $\forall n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

Como a variável n deve assumir os infinitos valores do conjunto $\mathbb{N}^*$, em vez de atribuir os infinitos valores a n (o que não conseguiríamos), vamos verificar se o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Note que tal quociente sempre existe, pois todos os termos da seqüência (a_n) são diferentes de zero.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}} = \frac{\cancel{3^{\frac{n}{2}}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\cancel{3^{\frac{n}{2}}}} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

Como o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, $3^{\frac{1}{2}}$, concluímos que a seqüência é P.G. de razão $q = 3^{\frac{1}{2}}$.

3. Classificação das progressões geométricas

Classificamos uma progressão geométrica como **crescente**, **decrescente**, **constante**, **oscilante** ou **quase nula**.

3.1. P.G. crescente

Uma progressão geométrica é **crescente** se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é **maior** do que o termo precedente.

Exemplos

a) (3, 6, 12, 24, ...) é uma P.G. crescente de razão $q = 2$.

b) $\left(-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \dots\right)$ é uma P.G. crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

Condição

Uma progressão geométrica (a_n), de razão q, é **crescente** se, e somente se, $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

3.2. P.G. decrescente

Uma progressão geométrica é **decrescente** se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é **menor** do que o termo precedente.

Exemplos

a) $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

b) $(-1, -2, -4, -8, \ldots)$ é uma P.G. decrescente de razão $q = 2$.

Condição

> Uma progressão geométrica (a_n), de razão q, é **decrescente** se, e somente se, $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

3.3. P.G. constante

Uma progressão geométrica é **constante** se, e somente se, todos os seus termos forem **iguais** entre si.

Exemplos

a) $(8, 8, 8, 8, \ldots)$ é uma P.G. constante de razão $q = 1$.

b) $(0, 0, 0, 0, \ldots)$ é uma P.G. constante de razão indeterminada.

Condição

> Uma progressão geométrica é **constante** se, e somente se, sua razão é igual a 1 ou se todos os seus termos são nulos.

3.4. P.G. oscilante

Uma progressão geométrica é **oscilante** se, e somente se, todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos.

Exemplos

a) $(3, -6, 12, -24, 48, -96, \ldots)$ é uma P.G. oscilante de razão $q = -2$.

b) $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\right)$ é uma P.G. oscilante de razão $q = -\frac{1}{2}$.

Condição

> Uma progressão geométrica (a_n), de razão q, é **oscilante** se, e somente se, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

3.5. P.G. quase nula

Uma progressão geométrica é **quase nula** se, e somente se, o primeiro termo é diferente de zero e todos os demais são iguais a zero.

Exemplo

$(8, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ é uma P.G. quase nula.

Condição

> Uma progressão geométrica (a_n), de razão q, é **quase nula** se, e somente se, $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exercícios resolvidos

R.4 Classificar cada uma das seguintes progressões geométricas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

a) $\left(8, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, ...\right)$

b) $\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$

c) (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...)

d) (4, 4, 4, 4, ...)

e) (9, 0, 0, 0, 0, ...)

Resolução

a) Todos os termos da P.G. são diferentes de zero, e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Logo, a P.G. é oscilante.

b) Cada termo da P.G., a partir do segundo, é menor do que o termo precedente. Logo, a P.G. é decrescente.

c) Cada termo da P.G., a partir do segundo, é maior do que o termo precedente. Logo, a P.G. é crescente.

d) Todos os termos da P.G. são iguais entre si. Logo, a P.G. é constante.

e) O primeiro termo da P.G. é diferente de zero, e todos os demais são iguais a zero. Logo, a P.G. é quase nula.

R.5 Para que valores reais de x a P.G. $(x, 3x, 9x, 27x, ...)$ é crescente?

Resolução

Para que uma P.G. (a_n) de razão q seja crescente, deveremos ter: $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
A razão da P.G. $(x, 3x, 9x, 27x, ...)$ é $q = 3$; portanto $q > 1$. Para que a P.G. seja crescente, deveremos ter ainda $a_1 > 0$, isto é, $x > 0$.
Concluímos, então, que a P.G. é crescente para todo x, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Numa progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (q) e do primeiro termo (a_1) através de uma fórmula matemática. Para entendermos tal fórmula, consideremos a P.G. cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q:

$$(a_1, \underbrace{a_1q}_{a_2}, \underbrace{a_1q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1q^4}_{a_5}, ..., \underbrace{\ ?\ }_{a_n}, ...).$$

Note que qualquer termo da P.G. é igual ao produto do primeiro termo (a_1) por uma potência de q:

$$a_1 = a_1q^0,\ a_2 = a_1q^1,\ a_3 = a_1q^2,\ a_4 = a_1q^3,\ a_5 = a_1q^4, ..., a_n = ?$$

Como os expoentes de q formam a P.A. (0, 1, 2, 3, 4, ...), cujo enésimo termo é $n - 1$, concluímos que:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Essa sentença é chamada de "**fórmula do termo geral** da P.G.".

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar o 15º termo da progressão geométrica (256, 128, 64, ...).

Resolução

Temos que: $a_1 = 256,\ q = \frac{\cancel{128}}{\cancel{256}} = \frac{1}{2},\ n = 15,\ a_{15} = ?$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, para $n = 15$, obtemos:

$$a_{15} = a_1q^{15-1} \therefore a_{15} = a_1q^{14} \therefore a_{15} = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{14} \therefore a_{15} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^{14}} \therefore a_{15} = \frac{1}{2^6} \therefore a_{15} = \frac{1}{64}.$$

R.7 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = \frac{1}{3^{28}}$ e $a_{10} = \frac{1}{3^{10}}$.

Resolução

$$a_1 = \frac{1}{3^{28}},\ a_{10} = \frac{1}{3^{10}},\ n = 10,\ q = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, para $n = 10$, obtemos:

$$a_{10} = a_1q^{10-1} \therefore a_{10} = a_1q^9$$

$$\therefore \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^{28}}q^9 \therefore \frac{3^{28}}{3^{10}} = q^9 \therefore q^9 = 3^{18} \therefore q = \sqrt[9]{3^{18}} \therefore q = 3^2 \therefore q = 9.$$

R.8 Determinar o número de termos da P.G. $\left(128, 64, 32, ..., \frac{1}{256}\right)$.

Resolução
Temos que:

$$a_1 = 128,\ q = \frac{\cancel{64}}{\cancel{128}} = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{256},\ n = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, obtemos:

$$\frac{1}{256} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{1}{256 \cdot 128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{1}{2^8 \cdot 2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{1}{2^{15}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore 15 = n - 1 \therefore n = 16.$$

Logo, a P.G. possui dezesseis termos.

R.9 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 252$ e $a_2 + a_5 = 84$.

Resolução
Aplicamos a fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, para $n = 4$, $n = 2$ e $n = 5$, respectivamente:

$$a_4 = a_1q^3;\ a_2 = a_1q;\ a_5 = a_1q^4.$$

Logo, temos: $\begin{cases} a_1 + a_4 = 252 \\ a_2 + a_5 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 252 \\ a_1q + a_1q^4 = 84. \end{cases}$

Fatoramos o primeiro membro de cada uma das igualdades anteriores: $\begin{cases} a_1(1 + q^3) = 252 \\ a_1q(1 + q^3) = 84. \end{cases}$

Dividimos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$$\frac{a_1\cancel{(1 + q^3)}}{a_1q\cancel{(1 + q^3)}} = \frac{252}{84} \Rightarrow \frac{1}{q} = 3 \therefore q = \frac{1}{3}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2, B.4, B.7 (a, b, c), B.9, B.11, B.13, B.15, B.17, C.1, C.2, C.3, C.4.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.3, B.5, B.7 (d, e, f), B.8, B.10, B.12, B.14, B.16, B.18, C.5, C.6, C.7, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Quais das seqüências a seguir são progressões geométricas?

a) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = 3 \cdot 2^n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 5$.

b) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 3n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$.

c) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = 5^{-n}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $\begin{cases} a_1 = \dfrac{4}{3} \\ a_{n+1} = 6a_n, \ \forall n, \ n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \leq 5. \end{cases}$

e) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = n^{n+1}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

f) (a_1, a_2, a_3) tal que $a_n = 2^{1-n}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 3$.

B.2 Verifique se é ou não progressão geométrica a seqüência (a_n) dada por: $a_n = 5^{n+4}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.3 Verifique se é ou não progressão geométrica a seqüência (a_n) dada por: $a_n = 4 \cdot 3^n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.4 Determine a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_{38} = 15$ e $a_{39} = 5$.

B.5 Calcule a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_{20} = 18$ e $a_{19} = 6$.

B.6 Qual é a razão da P.G. (a_n) cuja lei de formação é: $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$?

B.7 Classifique cada uma das progressões geométricas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula:

a) $(5, 5, 5, 5, ...)$

b) $\left(-1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, ...\right)$

c) $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ...\right)$

d) $(-8, 0, 0, 0, ...)$

e) $(-1, 2, -4, 8, -16)$

f) $(0, 0, 0, 0, 0, ...)$

B.8 Classifique cada uma das seguintes progressões geométricas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

a) (a_n) tal que $a_n = 3 \cdot 2^{3-n}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

b) (a_n) tal que $a_n = \dfrac{2^{n+3} + 2^n}{2^n}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

c) (a_n) tal que $a_n = 5(-1)^n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.9 Para que valores reais de x a P.G. $\left(x, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{9}, \dfrac{x}{27}, ...\right)$ é crescente?

B.10 Sabendo que a P.G. $\left(x, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{9}, \dfrac{x}{27}, ...\right)$ é decrescente, determine os possíveis valores reais de x.

B.11 Determine o décimo termo da P.G. $(3, 6, 12, ...)$.

B.12 Obtenha o 11º termo da P.G. $\left(\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3}, ...\right)$.

B.13 Calcule a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 4$ e $a_6 = 128$.

B.14 Encontre a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 2$ e $a_5 = 162$.

B.15 Qual é o número de termos da P.G. $\left(512, 256, 128, ..., \dfrac{1}{1024}\right)$?

B.16 Determine o número de termos da P.G. $\left(\dfrac{1}{243}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, ..., 243\right)$.

B.17 Obtenha o primeiro termo da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 28$ e $a_2 + a_5 = 84$.

B.18 Qual é a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 27$ e $a_3 + a_6 = 108$?

Exercícios complementares

C.1 Observe a seguinte P.G.:

$$(a_1, \underbrace{a_1q}_{a_2}, \underbrace{a_1q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1q^4}_{a_5}, \underbrace{a_1q^5}_{a_6}, \underbrace{a_1q^6}_{a_7}, ..., \underbrace{a_1q^{k-1}}_{a_k}, ..., \underbrace{a_1q^{n-1}}_{a_n}, ...).$$

Note, por exemplo, que o termo a_7 pode ser expresso em função de a_1 e q, isto é, $a_7 = a_1q^6$. Expresse:

a) o termo a_7 em função de a_3 e q;

b) o termo a_{10} em função de a_4 e q;

c) o termo a_{20} em função de a_{13} e q;

d) o termo a_n em função de a_k, q, n e k.

C.2 Determine o 14º termo da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de razão $q = 3$, sabendo que $a_9 = 2$. **Sugestão:** expresse a_{14} em função de a_9 e q.

C.3 Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, de razão $q = 13$, tem-se que $a_k = 5$. Encontre, em função de k, o valor do termo a_{10}.

C.4 Obtenha o termo a_n (enésimo termo) da P.G. (1, 2, 4, 8, ...).

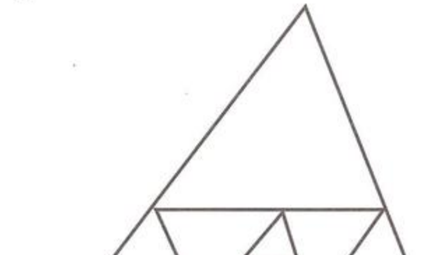
C.5 Qual é o termo a_n (enésimo termo) da P.G. (12, 36, 108, ...)?

C.6 Determine o termo a_n (enésimo termo) da P.G. $\left(\frac{1+n}{n^{n-1}}, \frac{1+n}{n^{n-2}}, \frac{1+n}{n^{n-3}}, ...\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$.

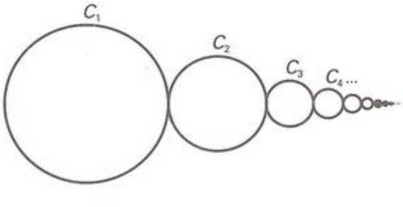
C.7 Em determinada cultura de bactérias, a população cresce dia a dia em progressão geométrica. No dia 8 de janeiro a população era de $2{,}6 \cdot 10^3$ bactérias e, no dia 22 do mesmo mês, era de $2{,}6 \cdot 10^{17}$ bactérias. Qual é a razão dessa progressão geométrica?

C.8 O aumento anual da produção de automóveis de uma fábrica é 3%. Em 1990 produziu 1 000 000 de veículos. Qual foi a produção no ano de 1993?

C.9 Cada elemento da seqüência $(T_1, T_2, T_3, T_4, ...)$ é um triângulo tal que os vértices de cada um deles, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do seu antecessor. Se o perímetro do triângulo T_1 é 10 cm, calcule o perímetro do triângulo T_{50}.



C.10 A seqüência $(C_1, C_2, C_3, C_4, ...)$ tem como elementos círculos tais que o raio de cada um deles, a partir do segundo, é um terço do raio do seu antecessor. Se a área do círculo C_1 é 90 cm², calcule a área do círculo C_{20}.



Questões dos vestibulares

V.1 (PUC/Campinas-SP) Pode-se estimar o crescimento de uma população supondo que ele ocorra em progressão geométrica. Nessas condições, a tabela a seguir deve ser completada com o número:

Ano	Número de habitantes
1988	110000
1989	121000
1990	...

a) 128600 b) 130900 c) 132000 d) 133100 e) 231000

V.2 (Fuvest-SP) O quinto e o sétimo termos de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo dessa P.G. é:

a) 13 b) $10\sqrt{6}$ c) 4 d) $4\sqrt{10}$ e) 10

V.3 (F. M. Pouso Alegre-MG) Em uma P.G. cujos termos são positivos, qualquer termo é igual à soma dos dois termos seguintes. Nesse caso, a razão é:

a) 1 b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ d) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e) n.d.a.

V.4 (Vunesp-SP, modificado) Os comprimentos das circunferências de uma seqüência de círculos concêntricos formam uma progressão geométrica de razão 2. As áreas desses círculos formam uma:

a) progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

b) progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

c) progressão aritmética de razão $\frac{1}{3}$.

d) progressão geométrica de razão 4.

e) progressão geométrica de razão 2.

Capítulo 7

Interpolação geométrica

1. Meios geométricos

Numa P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, os termos $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$ são chamados de "**meios geométricos** da P.G.".

Exemplo

Na P.G. (2, 6, 18, 54, 162), temos que 6, 18 e 54 são os meios geométricos da P.G.

2. Interpolação geométrica

Interpolar (ou inserir) k meios geométricos entre dois números a e b, nessa ordem, significa determinar a P.G. de $k + 2$ termos, com o primeiro termo igual a a e o último igual a b.

Exercícios resolvidos

R.1 Interpolar quatro meios geométricos entre 1 e 243, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.G. de seis termos, com $a_1 = 1$ e $a_6 = 243$:

$$(\underset{\overset{\uparrow}{a_1}}{1}, \underbrace{\dots, \dots, \dots, \dots,}_{\textbf{Meios geométricos}} \underset{\overset{\uparrow}{a_6}}{243}).$$

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, temos: $a_6 = a_1q^5 \Rightarrow 243 = 1 \cdot q^5 \therefore q = \sqrt[5]{243} \therefore q = 3$.

Logo, temos a P.G. (1, 3, 9, 27, 81, 243).

R.2 Interpolar três meios geométricos entre 1 e 2, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.G. de cinco termos com $a_1 = 1$ e $a_5 = 2$:

$$(\underset{\overset{\uparrow}{a_1}}{1}, \underbrace{\dots, \dots, \dots,}_{\textbf{Meios geométricos}} \underset{\overset{\uparrow}{a_5}}{2}).$$

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, temos que: $a_5 = a_1q^4 \Rightarrow 2 = 1 \cdot q^4 \therefore q = \pm\sqrt[4]{2}$.

Chegamos, portanto, a duas interpolações possíveis:

1ª) para $q = \sqrt[4]{2}$, temos a P.G.: $(1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2^2}, \sqrt[4]{2^3}, 2)$;

2ª) ou, para $q = -\sqrt[4]{2}$, temos a P.G.: $(1, -\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2^2}, -\sqrt[4]{2^3}, 2)$.

Simplificando, obtemos: $(1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}, 2)$ ou $(1, -\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}, 2)$.

3. Propriedades de uma progressão geométrica

Propriedade G.1

Numa P.G. finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k}, \ldots, a_n)$ de razão q.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos. Calculando o produto desses termos, temos:

$$\underbrace{a_{k+1}}\,\overbrace{a_{n-k}} = \underbrace{a_1q^{k+1-1}}\,\overbrace{a_1q^{n-k-1}} = a_1q^ka_1q^{n-k-1} =$$

$$= a_1a_1q^kq^{n-k-1} = a_1a_1q^{\cancel{k}+n-\cancel{k}-1} = \underbrace{a_1a_1q^{n-1}} = a_1\underbrace{a_n}.$$

(c.q.d.)

Exemplo

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256)

8 · 32 = 256

4 · 64 = 256

2 · 128 = 256

1 · 256 = 256

Propriedade G.2

A seqüência (a, b, c), com $a \neq 0$, é P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos, isto é, $b^2 = ac$.

Demonstração

A seqüência (a, b, c), com $a \neq 0$, é P.G. se, e somente se, existir uma constante q tal que:

$$b = aq \text{ e } c = bq.$$

Como $a \neq 0$, podemos escrever: $\dfrac{b}{a} = q$.

Substituindo $\dfrac{b}{a} = q$ em $c = bq$, temos: $c = b \cdot \dfrac{b}{a} \therefore c = \dfrac{b^2}{a} \therefore b^2 = ac$. (c.q.d.)

Exemplos

a) Note que na P.G. (3, 6, 12) temos: $6^2 = 3 \cdot 12$.

b) Para que a seqüência $(2, 8, x)$ seja P.G., devemos ter: $8^2 = 2x \Rightarrow x = 32$.

Nota: na propriedade G.2 é necessária a condição $a \neq 0$, pois existem seqüências (a, b, c), com $a = 0$, tais que $b^2 = ac$ que **não** são P.G.

Exemplo

Na seqüência $(0, 0, 3)$ temos que $0^2 = 0 \cdot 3$, e tal seqüência **não** é P.G.

Propriedade G.3

Numa P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio da P.G. $(a_1, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, com número ímpar de termos. Temos que a seqüência (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) também é P.G. Pela propriedade G.2, sabemos que: $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$. **(I)**

Os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos a_1 e a_n. Logo, pela propriedade G.1, podemos concluir que: $a_{k-1}a_{k+1} = a_1a_n$. **(II)**

Finalmente, por (I) e (II) temos: $a_k^2 = a_1a_n$.

(c.q.d.)

Exemplo

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\right)$$

Termo médio

$$\frac{1}{2} \cdot 128 = 8^2$$

Exercícios resolvidos

R.3 Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{41})$, tem-se que $a_1a_{41} = 81$.

a) Calcular o produto a_8a_{34}.

b) Determinar o termo a_{21}.

Resolução

a) a_8 e a_{34} são termos equidistantes dos extremos da P.G., pois $8 + 34 = 41 + 1$. Logo, pela propriedade G.1, concluímos que: $a_8a_{34} = a_1a_{41} = 81$.

b) a_{21} é o termo médio da P.G., pois $2 \cdot 21 = 41 + 1$. Logo, pela propriedade G.3, temos:

$$a_{21}^2 = a_1a_{41} \Rightarrow a_{21}^2 = 81 \therefore a_{21} = \pm\sqrt{81} \therefore a_{21} = \pm 9.$$

R.4 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(4, 4x, 10x + 6)$ seja P.G.

Resolução

A seqüência de três termos, com o primeiro termo não-nulo, será P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio for igual ao produto dos extremos. Isto é:

$$(4x)^2 = 4(10x + 6) \Rightarrow 16x^2 = 40x + 24 \therefore 16x^2 - 40x - 24 = 0 \therefore 2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Calculando as raízes dessa equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2(-3) = 49 \therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

Logo, $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

R.5 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(x - 2, 3x - 6, 4x)$ seja P.G.

Resolução

Analisemos dois casos: 1º) $x - 2 \neq 0$; 2º) $x - 2 = 0$.

1º) $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

Se o primeiro termo é diferente de zero, então a seqüência é P.G. se, e somente se:

$$(3x - 6)^2 = (x - 2)4x \quad \therefore \quad 9x^2 - 36x + 36 = 4x^2 - 8x \quad \therefore \quad 5x^2 - 28x + 36 = 0.$$

Resolvemos, então, essa equação do 2º grau:

$$\Delta = (-28)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 64 \therefore x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 5} \Rightarrow x = \frac{28 \pm 8}{10}$$

$\therefore x = \frac{18}{5}$ ou $x = 2$. **(não convém, pois estamos sob a condição $x \neq 2$)**

2º) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Para $x = 2$, a seqüência $(x - 2, 3x - 6, 4x)$ é igual a $(0, 0, 8)$, que **não** é P.G. (**Nota:** é necessário o estudo do segundo caso, pois poderíamos ter a P.G. $(0, 0, 0)$.)

Logo, a seqüência $(x - 2, 3x - 6, 4x)$ é P.G. se, e somente se, $x = \frac{18}{5}$.

4. Representação genérica de uma P.G.

Do mesmo modo, como no estudo da P.A., é importante sabermos representar uma P.G. genericamente.

Exemplos

a) P.G. de três termos: (x, xq, xq^2), em que a razão é q; $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, razão q, se $q \neq 0$.

b) P.G. de quatro termos: (x, xq, xq^2, xq^3), razão q; $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, razão q^2, se $q \neq 0$.

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar a P.G. de três termos, sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 10.

Resolução

Quando se conhece o produto dos termos, a representação mais cômoda é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$. Pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} \frac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \therefore x = 2 \quad \text{(I)} \\ x + xq = 10. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $2 + 2q = 10 \Rightarrow q = 4$.

Assim, para $x = 2$ e $q = 4$, temos que a P.G. $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é igual a $\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$.

R.7 Determinar a P.G. crescente de quatro termos, sabendo que o produto desses termos é 16 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 5.

Resolução

Quando conhecemos o produto dos quatro termos da P.G., a representação mais cômoda é $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, pois, ao igualarmos o produto desses termos a 16, já obtemos o(s) valor(es) de x.

Pelo enunciado, temos:
$$\begin{cases} \frac{x}{\cancel{q^3}} \cdot \frac{x}{\cancel{q}} \cdot x\cancel{q} \cdot x\cancel{q^3} = 16 \Rightarrow x^4 = 16 \quad \therefore \; x = \pm 2 \quad \textbf{(I)} \\ \frac{x}{q} + xq = 5. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Fazendo $x = 2$ em (II), temos: $\frac{2}{q} + 2q = 5 \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$.

Resolvemos a equação do 2º grau:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \therefore q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow q = \frac{5 \pm 3}{4} \quad \therefore q = 2 \text{ ou } q = \frac{1}{2}.$$

Assim, temos:

- $x = 2$ e $q = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 1, 4, 16\right)$; **(P.G. crescente)**
- $x = 2$ e $q = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(16, 4, 1, \frac{1}{4}\right)$. **(P.G. decrescente, não convém)**

Fazendo $x = -2$ em (II), temos: $-\frac{2}{q} - 2q = 5 \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0$.

Resolvemos a equação do 2º grau:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \Rightarrow q = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \quad \therefore \; q = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad \therefore \; q = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad q = -2.$$

Temos, então:

- $x = -2$ e $q = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(16, 4, 1, \frac{1}{4}\right)$; **(P.G. decrescente, não convém)**
- $x = -2$ e $q = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 1, 4, 16\right)$. **(P.G. crescente)**

Logo, a P.G. procurada é $\left(\frac{1}{4}, 1, 4, 16\right)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.9, B.11, B.14, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, B.10, B.12, B.13, B.15, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Interpole quatro meios geométricos entre 3 e 96, nessa ordem.

B.2 Insira cinco meios geométricos entre 1 e 2, nessa ordem.

B.3 Determine a razão da P.G. que se obtém interpolando doze meios geométricos entre 3 e 4, nessa ordem.

B.4 Obtenha o sexto termo da P.G. que se obtém interpolando dez meios geométricos entre 1 e 2048, nessa ordem.

B.5 Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{81})$, tem-se que $a_1a_{81} = 9$.
a) Calcule o produto a_6a_{76}.
b) Determine o termo a_{41}.

B.6 Sendo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{33})$ uma P.G. tal que $a_{17} = 5$:
a) calcule o produto a_1a_{33};
b) calcule o produto $a_3a_9a_{25}a_{31}$.

B.7 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(5, 2x + 4, 6x + 2)$ seja P.G.

B.8 Para que valor de x, $x \in \mathbb{R}$, a seqüência $(2, 2x, 4x + 6)$ é P.G. crescente?

B.9 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(x - 1, x + 3, 5x + 3)$ seja P.G. (**Lembre-se:** primeiro caso: $x - 1 \neq 0$; segundo caso: $x - 1 = 0$.)

B.10 Qual é o valor de x para que a seqüência $(x - 2, 2x - 4, x + 4)$ seja P.G.?

B.11 Encontre x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(0, x - 1, x^2 - 3x)$ seja P.G. **Cuidado:** quando o primeiro termo é zero, a condição "O quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos" não garante que a seqüência seja P.G.; por exemplo, $(0, 0, 5)$ não é P.G.

B.12 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(0, x - 1, x^2 + 2x - 3)$ seja P.G.

B.13 Para que valor real de x a seqüência $(x - 1, 2x - 2, 3x - 3)$ é P.G.?

B.14 Em uma P.G. de três termos, o produto dos termos é -1000 e a soma deles é 15. Qual é a P.G.?

B.15 Determine a P.G. de três termos sabendo que o produto desses termos é $\frac{1}{8}$ e que a soma dos dois primeiros é 2.

Exercícios complementares

C.1 Interpolando quatro meios geométricos entre o número x e o número 2, nessa ordem, obtém-se uma P.G. cuja razão é igual a $\frac{1}{2}$. Determine x.

C.2 Qual é a razão da P.G. que se obtém interpolando n meios geométricos entre n e $\frac{1}{n}$, nessa ordem.

C.3 Determine a P.G. crescente de quatro termos, sabendo que o produto desses termos é 256 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 17.

C.4 Qual é o quinto termo da P.G. crescente em que o produto dos quatro primeiros termos é 4096 e o quociente do quarto termo pelo terceiro é 4? **Cuidado**! A razão da P.G. $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3, ...\right)$ é q^2.

C.5 Obtenha o quinto termo da progressão geométrica de nove termos, sabendo que o produto desses termos é 5^{36}.

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) A média aritmética dos seis meios geométricos que podem ser inseridos entre 4 e 512, nessa ordem, é:
a) 48
b) 84
c) 128
d) 64
e) 96

V.2 (F. C. Chagas-BA) A seqüência $(x, x - 1, x + 2, ...)$ é uma progressão geométrica. O seu quarto termo é igual a:
a) $x - 3$
b) $-\frac{81}{4}$
c) $-\frac{27}{4}$
d) $\frac{9}{4}$
e) $\frac{27}{4}$

V.3 (Cescem) Numa progressão geométrica formada apenas por três termos, a soma dos dois primeiros é $\frac{5}{2}$ e o produto dos três termos é 8. A soma dos três termos dessa P.G. é:
a) $\frac{21}{2}$
b) $\frac{13}{2}$
c) $\frac{17}{6}$
d) $\frac{41}{2}$
e) $\frac{19}{2}$

Capítulo 8

Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

1. Introdução

Durante nove semanas, um biólogo estudou o crescimento de uma planta. Observou que na primeira semana a planta havia crescido 16 mm. Constatou ainda que em cada uma das oito semanas seguintes o crescimento foi a metade do da semana anterior. Quanto cresceu a planta nessas nove semanas?

POMPEU/ANGULAR

Observe que a seqüência dos "crescimentos", em milímetros, é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$:

$$\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right).$$

O crescimento total da planta é a soma dos nove termos dessa P.G. Indicando essa soma por S_9, temos:

$$S_9 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}. \quad \text{(I)}$$

Poderíamos calcular S_9 reduzindo as frações ao mesmo denominador, etc. Porém vamos estabelecer um método mais simples para efetuar esse cálculo.

- Inicialmente multiplicamos pela razão $\frac{1}{2}$ ambos os membros da igualdade (I):

$$\frac{1}{2} \cdot S_9 = \frac{1}{2}\left(16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)$$

$$\therefore \frac{S_9}{2} = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}. \quad \text{(II)}$$

- A seguir, subtraímos membro a membro (I) e (II):

$$S_9 - \frac{S_9}{2} = \left(16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) - \left(8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)$$
$$\therefore \frac{S_9}{2} = 16 - \frac{1}{32} \quad \therefore \frac{S_9}{2} = \frac{512 - 1}{32} \quad \therefore \frac{S_9}{2} = \frac{511}{32} \Rightarrow S_9 = \frac{511}{16}.$$

Assim, a planta cresceu $\frac{511}{16}$ mm.

Esse método para somar os termos da P.G. pode ser generalizado, como faremos a seguir.

2. Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

Vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.G. Mas antes convém raciocinar num caso particular. Considere a seguinte P.G.: $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5, ...)$.

Qual é a soma dos seis primeiros termos dessa P.G. para $q = 1$?

Indicando por S_6 a soma dos seis termos, podemos escrever:

$$S_6 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5.$$

Se $q = 1$, então: $S_6 = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^3 + a_1 \cdot 1^4 + a_1 \cdot 1^5$.
Logo, temos: $S_6 = 6a_1$.

Qual é a soma dos seis primeiros termos dessa mesma P.G. para $q \neq 1$?

Tal soma é:

$$S_6 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5. \quad \textbf{(I)}$$

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade (I), obtemos:

$$S_6q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6. \quad \textbf{(II)}$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II), temos:

$$S_6 - S_6q = a_1 - a_1q^6 \quad \therefore \quad S_6(1 - q) = a_1(1 - q^6).$$

Como $q \neq 1$, podemos escrever: $S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q}$.

Generalizando:

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

- se $q = 1$, então $S_n = na_1$;
- se $q \neq 1$, então $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Demonstração

Indiquemos por S_n a soma dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \text{ ou seja: } S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \quad \textbf{(I)}$$

Consideremos dois casos: 1º) $q = 1$; 2º) $q \neq 1$.

1º) $q = 1$

Neste caso temos a soma:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1}$$

$$\therefore \ S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1}_{\textbf{\textit{n} parcelas iguais a } \boldsymbol{a_1}}$$

$$\therefore S_n = na_1.$$

2º) $q \neq 1$

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade (I) obtemos:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n. \quad \textbf{(II)}$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II) temos:

$$S_n - S_nq = a_1 - a_1q^n$$
$$\therefore S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n).$$

Como $q \neq 1$, podemos escrever:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a soma dos cinqüenta primeiros termos da P.G. (3, 3, 3, ...).

Resolução

Como a P.G. é constante ($q = 1$), a soma dos cinqüenta primeiros termos é dada por:

$$S_{50} = 50a_1 \quad \therefore \quad S_{50} = 50 \cdot 3 \quad \therefore \quad S_{50} = 150.$$

R.2 Calcular a soma dos dez primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, ...).

Resolução

$$a_1 = 3, \ q = 2, \ n = 10, \ S_{10} = ?$$

Como $q \neq 1$, aplicamos a fórmula $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ para $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q} \quad \therefore \ S_{10} = \frac{3(1 - 2^{10})}{1 - 2} \quad \therefore \ S_{10} = \frac{-3069}{-1} \quad \therefore \ S_{10} = 3069.$$

3. Produto dos n primeiros termos de uma P.G.

Considere a P.G. $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5, ...)$. Qual é o produto dos seis primeiros termos dessa P.G.?

Indicando por P_6 o produto dos seis primeiros termos, podemos escrever:

$$P_6 = a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot a_1q^4 \cdot a_1q^5.$$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos escrever ainda:

$$P_6 = (a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1) \cdot (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot q^5) \therefore P_6 = a_1^6 \cdot q^{15}.$$

Generalizando:

Sendo P_n o produto dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

Demonstração

Indiquemos por P_n o produto dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_n, \text{ ou seja: } P_n = a_1q^0 \cdot a_1q^1 \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot a_1q^{n-1}.$$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos escrever:

$$P_n = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{n-1})}_{n \text{ fatores}}$$

$$\therefore P_n = a_1^n \cdot q^{0+1+2+3+...+(n-1)}.$$

Note que a soma $0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)$ é a soma dos n primeiros termos da P.A. $(0, 1, 2, 3, ...)$.

Calculando a soma dos n primeiros termos dessa P.A. pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{(0 + n - 1)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Finalmente, concluímos que:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

(c.q.d.)

Exercício resolvido

R.3 Calcular o produto dos catorze primeiros termos da P.G. $(128, 64, 32, ...)$.

Resolução

$$a_1 = 128,\ q = \frac{1}{2},\ n = 14,\ P_n = ?$$

Pela fórmula $P_n = a_1^n\ q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $n = 14$, temos: $P_{14} = a_1^{14} q^{\frac{(14-1)14}{2}} \Rightarrow P_{14} = a_1^{14} q^{91}$

$$\therefore P_{14} = (128)^{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{91} \therefore P_{14} = (2^7)^{14} \cdot \frac{1}{2^{91}} \therefore P_{14} = 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{91}} \therefore P_{14} = 2^7.$$

Logo, $P_{14} = 128$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.10, C.3, C.7, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, B.9, B.11, C.1, C.2, C.4, C.5, C.6, C.8, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a soma dos onze primeiros termos da P.G. $(2, 4, 8, ...)$.

B.2 Determine a soma dos dez primeiros termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$.

B.3 Qual é a soma dos dez primeiros termos da P.G. $(2, -4, 8, -16, ...)$?

B.4 Obtenha a soma dos trinta primeiros termos da P.G. $(2, -2, 2, -2, ...)$.

B.5 A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é 5115. Determine n, sabendo que $a_1 = 5$ e $q = 2$.

B.6 Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = 2$, sabe-se que a soma dos oito primeiros termos é 765. Determine o valor de a_1.

B.7 Calcule o produto dos dezoito primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, ...\right)$.

B.8 Obtenha o produto dos dez primeiros termos da P.G. $\left(\frac{32}{243}, \frac{16}{81}, \frac{8}{27}, ...\right)$.

B.9 Determine o produto dos onze primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{5^{10}}, \frac{1}{5^8}, \frac{1}{5^6}, ...\right)$.

B.10 Qual é a razão da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, em que $a_1 = 1$ e o produto dos sete primeiros termos é 5?

B.11 Encontre o primeiro termo da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, de razão $q = 2$, tal que o produto dos seus dez primeiros termos é 32.

Exercícios complementares

C.1 Calcule a soma dos dezesseis primeiros termos da P.G. $(5\sqrt{2}, 10, 10\sqrt{2}, ...)$.

C.2 Determine o primeiro termo da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, sabendo que sua razão é $q = \sqrt{2}$ e que a soma dos seus doze primeiros termos é $42(\sqrt{2} + 1)$.

C.3 Obtenha a P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, crescente, sabendo que a soma de seus oito primeiros termos é 255 e que a soma de seus quatro primeiros termos é 15.

C.4 Para que valor de n, $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que: $\sum\limits_{j=1}^{n} 2^j = 4094$?

C.5 Qual é o produto dos dez primeiros termos da seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \sqrt[2^n]{2}$, $\forall n$, $n \in \mathbb{N}^*$? **Cuidado!** Essa seqüência **não** é P.G.

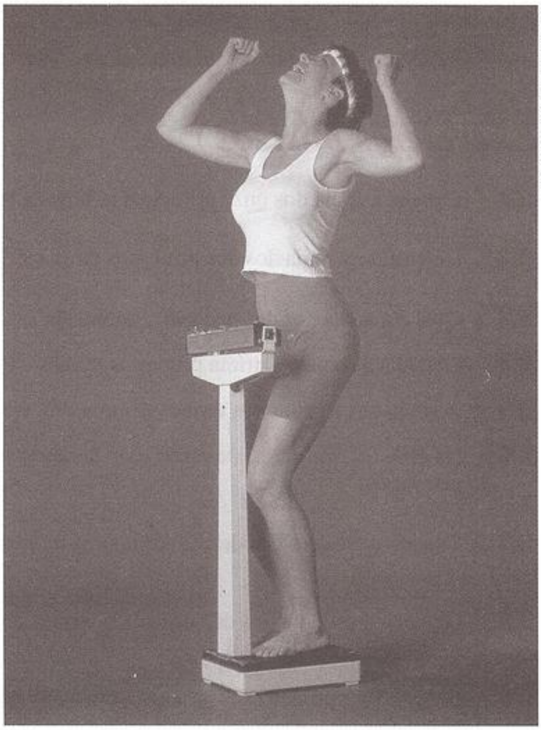
C.6 Calcule, em função de k, $k \neq 0$, o produto dos vinte primeiros termos da P.G. $(k^{50}, k^{41}, k^{32}, ...)$.

C.7 Determine o produto dos n primeiros termos da P.G. $(1, 3, 9, ...)$.

C.8 O produto dos n primeiros termos de uma P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é dado por $P_n = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$. Determine:
a) a_1;
b) a razão da P.G.;
c) a_4;
d) o produto $a_5a_6a_7$.

C.9 O crescimento anual nas vendas de calculadoras de uma fábrica é de 20%. No ano de 1986 a fábrica vendeu 20000 unidades. Qual foi o total de vendas no qüinqüênio de 1986 a 1990? Dado: $(1{,}2)^5 = 2{,}48832$.

C.10 Uma pessoa fez um regime alimentar durante n semanas. Na primeira semana, emagreceu 5 kg e, em cada semana posterior, emagreceu 40% do emagrecimento da semana anterior. Sabendo que, no período das n semanas, a pessoa perdeu 8,248 kg, determine n.



D. LURIA/PR-STOCK PHOTOS

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) Considere a seguinte progressão geométrica: $(1; 3; 3^2; 3^3; ...; 3^{n-1})$. A soma de seus termos, expressa em função de n, vale:

a) 3^{n+1} b) $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ c) $\dfrac{3^n-1}{2}$ d) $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ e) n.d.a.

V.2 (Mackenzie-SP) Simplificar a expressão $\dfrac{x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{30}}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15}}$.

V.3 (Fuvest-SP) Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

V.4 (Fatec-SP) Se $S = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + ... + (2^n - 1)$, então:

a) $S = 2^{n+1} + n - 2$

b) $S = 2^{n+1} - n + 2$

c) $S = 2^{n+1} + n + 2$

d) $S = 2^{n+1} - n - 2$

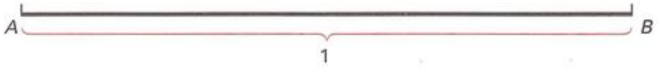
e) $S = 2^{n+1} - n$

Capítulo 9

Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica

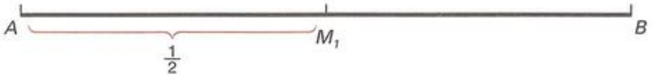
1. Introdução

Vamos estudar neste capítulo um conceito que exige alto grau de abstração. Para compreender tal conceito, consideremos um segmento de reta $\overline{AB}$, de medida 1:

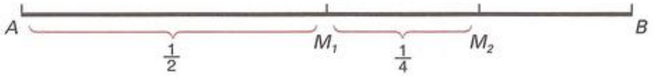


Sejam:

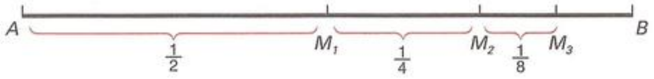
- M_1 o ponto médio de $\overline{AB}$, isto é:



- M_2 o ponto médio de $\overline{M_1B}$, isto é:



- M_3 o ponto médio de $\overline{M_2B}$, isto é:



⋮

- M_{n+1} o ponto médio de $\overline{M_nB}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

Observemos que as medidas dos infinitos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, ... formam, nessa ordem, a progressão geométrica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Notemos, ainda, que:

- somando as medidas dos três primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{M_2M_3}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875;$$

- somando as medidas dos quatro primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ e $\overline{M_3M_4}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375;$$

- somando as medidas dos cinco primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$ e $\overline{M_4M_5}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875.$$

E assim sucessivamente, somando uma quantidade cada vez maior de medidas dos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, ..., nos aproximaremos "tanto quanto quisermos" da medida 1, do segmento $\overline{AB}$. Por isso dizemos que o **limite da soma** dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ é 1. Indicando esse limite pelo símbolo S_∞, temos $S_\infty = 1$. Para abreviar, chamaremos esse limite simplesmente de "soma dos infinitos termos" da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Assim, temos que: $S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$

2. Cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G.

Vamos apresentar uma fórmula para o cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G. Antes, porém, vamos entender o significado matemático da expressão "tender a".

Considerando a expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, vamos atribuir a n os infinitos valores do conjunto $\mathbb{N}^*$. A tabela a seguir descreve as variações de n e de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Valores atribuídos a n	Valores da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$
6	$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} = 0{,}015625$
7	$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} = 0{,}0078125$
⋮	⋮

Notemos que:

- o valor de n pode ser "tão grande quanto quisermos"; por isso dizemos que n tende a mais infinito $(+\infty)$;
- podemos nos aproximar de zero com a expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tanto quanto quisermos; por exemplo, se quisermos que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ esteja mais próximo de zero do que 0,00001, basta atribuir a n o valor 17 e obteremos $\left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1}{131072} = 0{,}000007629$; por isso dizemos que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero quando n tende a mais infinito ou, ainda, que o limite da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ para n tendendo a mais infinito é zero. Em símbolos: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Teorema

O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão q, $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração

A soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. de razão q, $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \therefore S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \quad \therefore S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}.$$

Como $-1 < q < 1$, temos que q^n tende a zero quando n tende a mais infinito $(+\infty)$ e, portanto, a expressão $\frac{a_1q^n}{1-q}$ também tende a zero. Logo, a expressão $S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$ tende a $\frac{a_1}{1-q}$ quando n tende a $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Indicando esse limite simplesmente por S_∞, temos: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$. (c.q.d.)

Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$.

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots\right)$.

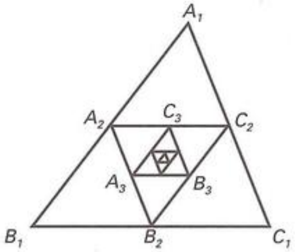
Resolução

Calculando a razão da P.G., obtemos: $q = \frac{5}{2} : 5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Como $-1 < \frac{1}{2} < 1$, então existe a soma S_∞.

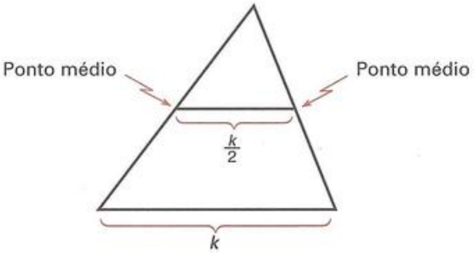
Pela fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, concluímos que: $S_\infty = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{5}{\frac{1}{2}} \therefore S_\infty = 10$.

R.2 Considerar a seqüência de infinitos triângulos ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...), sendo que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo precedente (conforme figura). Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcular a soma dos perímetros desses infinitos triângulos.



Resolução

Da geometria, sabemos que "a medida de um segmento de reta cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é igual à metade da medida do terceiro lado".



Assim, o perímetro de cada triângulo, a partir do segundo, é igual à metade do perímetro do triângulo precedente. Portanto a seqüência dos perímetros, em centímetros, é $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$. Tal seqüência é uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{2}$. Como $-1 < \frac{1}{2} < 1$, segue-se que existe a soma S_∞. Isto é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} \therefore S_\infty = 40 \text{ cm}.$$

R.3 Calcular a geratriz da dízima periódica $D = 4,8888...$

Resolução

$$D = 4 + \underbrace{0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008 + \ldots}_{\textbf{P.G. infinita de razão 0,1}}$$

$$\therefore D = 4 + \frac{0,8}{1-0,1} \quad \therefore D = 4 + \frac{8}{9} \quad \therefore D = \frac{44}{9}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, B.8, C.2, C.3, C.4, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. (45, 15, 5, ...).

B.2 Qual é a soma dos infinitos termos da P.G. (32, 8, 2, ...)?

B.3 A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots\right)$ é 5. Determine x.

B.4 A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{8}, \ldots\right)$ é $\frac{1}{10}$. Determine x.

B.5 Determine a geratriz da dízima periódica $D = 1{,}323232\ldots$

B.6 Obtenha a geratriz da dízima periódica $D = 2{,}83333\ldots$

B.7 A soma dos infinitos termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é $\frac{9}{2}$. Determine a razão dessa P.G. sabendo que $a_1 = 3$.

B.8 A soma dos infinitos termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é $\frac{27}{4}$. Determine a_1, sabendo que a razão dessa P.G. é $q = \frac{2}{3}$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{2^j} = 5$.

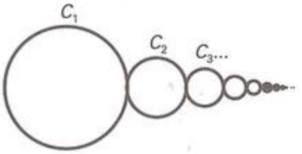
C.2 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, tal que: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j x}{5^j} = 3$.

C.3 Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant x < 2\pi$, resolva a equação $\sum_{j=1}^{\infty} (\cos x)^j = 1$.

C.4 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, dê o conjunto solução da equação: $\sum_{j=1}^{\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)^j = \frac{1}{3}$.

C.5 Duas empresas A e B farão doações a uma creche. A empresa A pagará, durante dez anos, quantias anuais da seguinte forma: no primeiro ano 100.000 dólares e, em cada ano seguinte, metade da doação do ano anterior. A empresa B pagará, "eternamente", quantias anuais da seguinte forma: no primeiro ano, 98.000 dólares e, em cada ano posterior, metade da doação do ano anterior. Qual é a empresa mais generosa? Por quê?

C.6 Considere a seqüência $(C_1, C_2, C_3, \ldots)$ de infinitas circunferências. Se o diâmetro da circunferência C_1 é 80 cm e, a partir da segunda, o diâmetro de cada circunferência é $\frac{1}{4}$ do diâmetro da anterior, calcule a soma dos perímetros das infinitas circunferências.



C.7 Considere a seqüência $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$ de infinitos quadrados. O lado do quadrado Q_1 mede 8 cm e os vértices de cada quadrado, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do quadrado precedente. Calcule a soma das áreas desses infinitos quadrados.

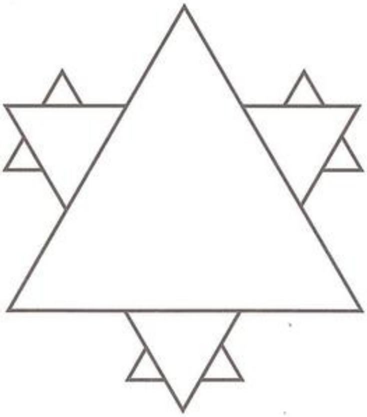
C.8 Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a 100 m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20 m no primeiro segundo e, durante alguns segundos, percorre, em cada segundo, $\frac{1}{4}$ da distância que percorreu no segundo anterior. Haverá o choque entre o veículo e a pedra? Justifique.

Questões dos vestibulares

V.1 (Vunesp) Seja R o número real representado pela dízima 0,999... Pode-se afirmar que:

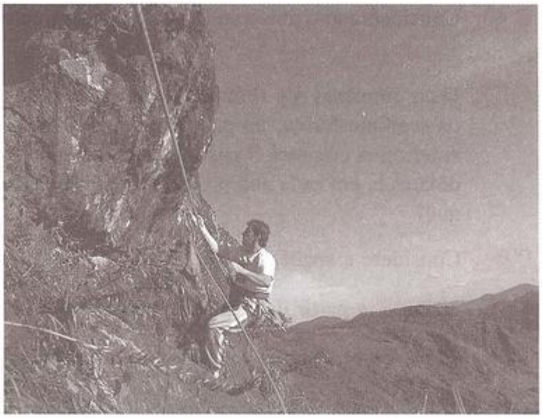
a) R é igual a 1.
b) R é menor que 1.
c) R se aproxima cada vez mais de 1 sem nunca chegar.
d) R é o último número real menor que 1.
e) R é um pouco maior que 1.

V.2 (Unicamp-SP) Construir fractais no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo equilátero, de área A, acrescentamos, no meio de cada lado, um outro triângulo equilátero, de lado igual a um terço do anterior; nos lados livres desses triângulos, acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente. Desse modo, construímos uma figura com uma infinidade de triângulos (veja o desenho). Calcule a área, em termos de A, da região determinada por esse processo.



V.3 (Fuvest-SP) Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 m na segunda, 64 m na terceira e assim sucessivamente. Determinar o tempo (em horas) necessário para completar um percurso de:

a) 480 m
b) 500 m
c) 600 m



REINALDO MINILLO/REFLEXO

Capítulo 10

Progressões geométricas em cálculos de juro composto

1. Introdução

Apliquei a quantia de R$ 500,00 na caderneta de poupança. Ao final de um mês, resgatei R$ 525,00.

- A quantia aplicada, isto é, R$ 500,00, é chamada de "**capital inicial** da aplicação".
- A diferença entre a quantia que resgatei e a que apliquei, isto é,

$$\text{R\$ } 525{,}00 - \text{R\$ } 500{,}00 = \text{R\$ } 25{,}00,$$

é chamada de "**juro** produzido pela aplicação".

- A soma do capital inicial com o juro produzido, isto é, R$ 500,00 + R$ 25,00 = R$ 525,00, é chamada de "**montante** acumulado no período de aplicação".
- O quociente do juro pelo capital inicial, isto é, $\frac{25,00}{500,00} = 0{,}05$, ou 5%, é chamado de "**taxa** de juro durante o período da aplicação".

Nota: na verdade, o rendimento da caderneta de poupança é a soma da correção monetária com o juro; porém, para facilitar a compreensão, chamaremos esse rendimento simplesmente de **juro**.

2. Juro composto

O tipo de juro mais usado nas transações financeiras é o **juro composto**. Para entender esse tipo de juro, observemos o exemplo seguinte.

Aplicando R$ 100.000,00 durante 3 meses à taxa de juro de 10% ao mês, qual o **juro composto** produzido?

Calculemos:

Mês	Capital	Juro	Montante
1º	R$ 100.000,00	R$ 10.000,00	R$ 110.000,00
2º	R$ 110.000,00	R$ 11.000,00	R$ 121.000,00
3º	R$ 121.000,00	R$ 12.100,00	R$ 133.100,00

Portanto o juro composto produzido foi de R$ 33.100,00. Note que, em cada mês, a partir do segundo, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado no mês anterior. Por isso, esse tipo de rendimento é chamado de **juro composto**.

Há um outro tipo de juro, chamado de **juro simples**, em que a taxa de juro incide apenas sobre o capital inicial. Porém em países com inflação muito alta essa prática não é utilizada, por motivos óbvios.

3. Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante

Um capital C é aplicado durante n unidades de tempo à taxa i por unidade de tempo. Calcule o montante acumulado ao final da aplicação.

A tabela a seguir mostra o montante acumulado no final de cada mês.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C + iC = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$iC(1 + i)$	$C(1 + i) + iC(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$iC(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 + iC(1 + i)^2 = C(1 + i)^3$
4	$C(1 + i)^3$	$iC(1 + i)^3$	$C(1 + i)^3 + iC(1 + i)^3 = C(1 + i)^4$
⋮	⋮	⋮	⋮

Observe que a coluna dos montantes apresenta a P.G.:

$$(C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, C(1 + i)^4, ...), \text{ de razão } q = 1 + i.$$

Ao final de n unidades de tempo, o montante M acumulado fica igual ao enésimo termo da P.G., isto é:

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow M = C(1 + i)(1 + i)^{n-1} \quad \therefore M = C(1 + i)^n.$$

Chegamos então à fórmula do montante M:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular o montante acumulado por um capital inicial de R$ 10.000,00 aplicado durante 6 meses a juros compostos de 5% ao mês. Dado: $(1{,}05)^6 \simeq 1{,}34$.

Resolução

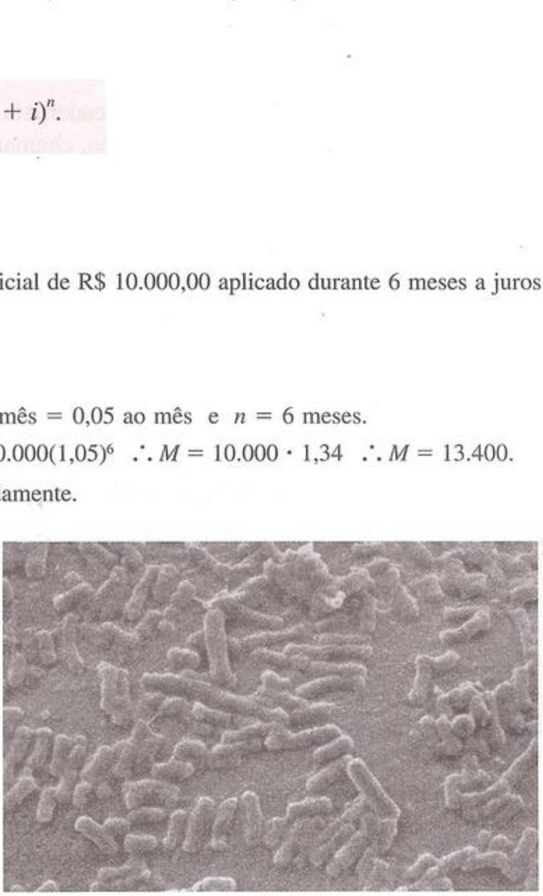
Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^n$, em que:

$$C = \text{R\$ } 10.000{,}00, \; i = 5\% \text{ ao mês} = 0{,}05 \text{ ao mês e } n = 6 \text{ meses.}$$

Temos, então: $M = 10.000(1 + 0{,}05)^6 \;\therefore M = 10.000(1{,}05)^6 \;\therefore M = 10.000 \cdot 1{,}34 \;\therefore M = 13.400$.

Logo, o montante é M = R$ 13.400,00, aproximadamente.

R.2 Uma população de bactérias cresce à taxa constante de 4% ao dia. Hoje, a população é de $6{,}1 \cdot 10^9$ bactérias. Daqui a 10 dias, qual será a população? Dado: $(1{,}04)^{10} \simeq 1{,}48$.



D. SCHARFF/SPL-STOCK PHOTOS

Resolução

Podemos aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^n$, onde:

- C é a população inicial $\therefore$ $C = 6{,}1 \cdot 10^9$;
- i é a taxa de crescimento por unidade de tempo (nesse problema tal unidade é dia) $\therefore$ $i = 4\%$ ao dia $=$ $= 0{,}04$ ao dia;
- n é o número de unidades de tempo (nesse problema é o número de dias) $\therefore$ $n = 10$ dias.
- M é a população final.

Então calculamos:

$$M = 6{,}1 \cdot 10^9(1 + 0{,}04)^{10} \quad \therefore \quad M = 6{,}1 \cdot 10^9(1{,}04)^{10} \quad \therefore M = 6{,}1 \cdot 10^9 \cdot 1{,}48 \quad \therefore \quad M = 9{,}028 \cdot 10^9.$$

Logo, a população será $M = 9{,}028 \cdot 10^9$ bactérias, aproximadamente.

R.3 Calcular o juro composto gerado por um capital inicial de R$ 4.000,00 aplicado durante 1,5 ano à taxa de 8% ao mês. Dado: $(1{,}08)^{18} \simeq 3{,}99$.

Resolução

Utilizamos a fórmula $M = C(1 + i)^n$, em que

$$C = \text{R\$ } 4.000{,}00, \quad n = 1{,}5 \text{ ano} = 18 \text{ meses}, \quad i = 8\% \text{ ao mês} = 0{,}08 \text{ ao mês}.$$

Nota: para aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^n$, deve-se ter n e i na mesma unidade de tempo.

Temos, então: $M = 4.000(1 + 0{,}08)^{18}$ $\therefore$ $M = 4.000(1{,}08)^{18}$ $\therefore$ $M = 4.000 \cdot 3{,}99$ $\therefore$ $M = 15.960$.
O juro j é a diferença entre o montante e o capital inicial, isto é:

$$j = \text{R\$ } 15.960{,}00 - \text{R\$ } 4.000{,}00 \quad \therefore \quad j = \text{R\$ } 11.960{,}00.$$

Logo, o juro é $j =$ R$ 11.960,00, aproximadamente.

R.4 Houve época em que a taxa de inflação no Brasil era de 25% ao mês. Qual era a taxa de inflação anual no Brasil, nessa época? Supor a taxa constante em cada mês. Dado: $(1{,}25)^{12} \simeq 14{,}55$.

Resolução

Para calcular tal inflação, vamos obter o juro composto produzido por um capital inicial C aplicado durante 12 meses à taxa de 25% ao mês.

$$M = C(1 + 0{,}25)^{12} \;\therefore\; M = C(1{,}25)^{12} \;\therefore\; M = 14{,}55C.$$

Assim, o juro j gerado no período de 12 meses é: $j = 14{,}55C - C = 13{,}55C$.

A razão $\frac{j}{C}$ é a taxa durante o período de 12 meses.

$$\frac{j}{C} = \frac{13{,}55\cancel{C}}{\cancel{C}} = 13{,}55 = \frac{1355}{100} = 1355\%.$$

Logo, a taxa de inflação era 1355% ao ano, aproximadamente.

4. Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa variável

Faremos agora um estudo do juro composto com taxa variável. Embora não seja um problema sobre P.G., é oportuno nesse instante abordarmos tal assunto.

Para entender a fórmula do montante com taxa variável para o juro composto, observemos o seguinte problema: um capital inicial C será aplicado a juro composto, durante n unidades de tempo com as taxas:

- i_1 na primeira unidade de tempo;
- i_2 na segunda unidade de tempo;
- i_3 na terceira unidade de tempo;

⋮

- i_n na enésima unidade de tempo.

Qual será o montante no final das n unidades de tempo? Observe a tabela:

Unidade de tempo	Capital	Taxa	Juro	Montante
1	C	i_1	Ci_1	$C + Ci_1 = C(1 + i_1)$
2	$C(1 + i_1)$	i_2	$C(1 + i_1)i_2$	$C(1 + i_1) + C(1 + i_1)i_2 = C(1 + i_1)(1 + i_2)$
3	$C(1 + i_1)(1 + i_2)$	i_3	$C(1 + i_1)(1 + i_2)i_3$	$C(1 + i_1)(1 + i_2) + C(1 + i_1)(1 + i_2)i_3 =$ $= C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$C(1 + i_1) \cdot ... \cdot (1 + i_{n-1})$	i_n	$C(1 + i_1) \cdot ... \cdot (1 + i_{n-1})i_n$	$C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$

Portanto, o montante nas n unidades de tempo é: $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$.

Observe que, se $i_1 = i_2 = i_3 = ... = i_n = i$, então: $M = C(1 + i)^n$, que é a fórmula do montante para juro composto com taxa constante.

Exercícios resolvidos

R.5 Apliquei R$ 1.000,00 na caderneta de poupança durante 3 anos. No primeiro ano o rendimento foi de 15%; no segundo, de 14%; e no terceiro, de 20%. Qual foi o montante acumulado no final da aplicação?

Resolução

Utilizamos a fórmula $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$, em que:

$$C = \text{R\$ } 1.000{,}00,\ n = 3,\ i_1 = 0{,}15,\ i_2 = 0{,}14,\ i_3 = 0{,}20.$$

Temos, então:

$$M = 1.000(1 + 0{,}15)(1 + 0{,}14)(1 + 0{,}20) \ \therefore M = 1.000 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}20 \ \therefore M = 1.573{,}20.$$

Logo, o montante acumulado foi de R$ 1.573,20.

R.6 O preço de um produto era R$ 600,00. O comerciante deu um desconto de 12% sobre esse preço, reduzindo-o para um novo preço p. A seguir, o comerciante deu um desconto de 8% sobre o preço p. Qual foi o preço final do produto?

Resolução

Aplicamos a fórmula $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$, em que:

$$C = \text{R\$ } 600{,}00,\ n = 2,\ i_1 = -0{,}12,\ i_2 = -0{,}08.$$

Nota: i_1 e i_2 são negativas porque são taxas de desconto.

Temos, então: $M = 600(1 - 0{,}12)(1 - 0{,}08) \ \therefore M = 600 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}92 \ \therefore M = 485{,}76$.

Assim, o preço final do produto foi R$ 485,76.

R.7 Comprei um lote de ações que se valorizou 6% no primeiro mês, 4% no segundo e 7% no terceiro. Qual foi o porcentual de valorização nos 3 meses?

Resolução

Aplicamos a fórmula $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$, em que:

C é o preço inicial do lote, M é o preço final do lote, $n = 3$, $i_1 = 0{,}06$, $i_2 = 0{,}04$, $i_3 = 0{,}07$.

Temos, então:

$$M = C(1 + 0{,}06)(1 + 0{,}04)(1 + 0{,}07) \ \therefore M = C \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}07 \ \therefore M = 1{,}179568C.$$

A taxa de valorização nos 3 meses é o quociente $\frac{j}{C}$, em que $j = 1{,}179568C - C = 0{,}179568C$.

Portanto essa taxa é: $\frac{j}{C} = \frac{0{,}179568\cancel{C}}{\cancel{C}} = 0{,}179568 = 17{,}9568\%$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, B.10, B.12.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.6, B.7, B.8, B.9, B.11, B.13, C.1, C.2, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Aplica-se um capital inicial de R$ 25.000,00 durante 9 meses à taxa de juro composto de 5% ao mês. Qual será o montante acumulado no final da aplicação? Dado: $(1{,}05)^9 \simeq 1{,}55$.

B.2 Calcule o juro composto gerado por um capital de R$ 10.000,00 aplicado durante 10 meses à taxa de 3% ao mês. Dado: $(1{,}03)^{10} \simeq 1{,}34$.

B.3 Tendo sido aplicados R$ 1.000,00 a juro composto, depois de 3 anos, recebeu-se o montante de R$ 1.728,00. Calcule a taxa anual de juro, sabendo que ela foi constante nos 3 anos. Dado: $12^3 = 1728$.

B.4 Qual o tempo necessário para que um capital C, aplicado a juro composto de 5% ao mês, produza um montante igual a $2C$? Dados: $\log 2 \simeq 0{,}301$; $\log 105 \simeq 2{,}021$.

B.5 Calcule o capital inicial que, aplicado a juro composto com taxa de 9% ao ano, acumulou ao final de 7 anos o montante de R$ 36.400,00. Dado: $(1{,}09)^7 \simeq 1{,}82$.

B.6 Para triplicar um capital em 5 meses, aplicado a juro composto, qual deve ser a taxa mensal? Dado: $\sqrt[5]{3} \simeq$ $\simeq 1{,}24$.

B.7 A população de um país cresce à taxa constante de 3% ao ano. Se hoje a população desse país é 58 000 000 de habitantes, qual será essa população daqui a 10 anos? Dado: $(1{,}03)^{10} \simeq 1{,}34$.

B.8 Aplica-se um capital de R$ 20.000,00 a juro composto com taxa de 6% ao mês. Qual será o montante acumulado em 2 anos? Dado: $(1{,}06)^{24} \simeq 4{,}04$.

B.9 Para duplicar um capital em 10 meses e 15 dias, aplicado a juro composto, que taxa mensal devo usar? Dado: $2^{\frac{2}{21}} \simeq 1{,}06$.

B.10 Apliquei um capital de R$ 10.000,00 durante 3 anos, a juro composto, tal que a taxa de juro no primeiro ano foi 10%, no segundo foi 12% e no terceiro foi 8%. Qual foi o montante acumulado nesses 3 anos?

B.11 Um terreno comprado por R$ 100.000,00 valorizou 10% no primeiro mês, 8% no segundo mês, 9% no terceiro mês e 6% no quarto mês, após a compra.

a) Qual deve ser o preço do terreno após 4 meses de sua compra?
b) Qual foi o porcentual de valorização nesses 4 meses?

B.12 Na compra de um imóvel por R$ 50.000.00, tive um prejuízo de 5% no primeiro mês e outro prejuízo de 3% no segundo mês, após a compra.

a) Qual foi o preço do imóvel após os 2 meses da compra?
b) Qual foi o porcentual do prejuízo nesses 2 meses? **Sugestão:** $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot$ $\cdot (1 + i_n)$, usando as taxas negativas: $i_1 = -0{,}05$ e $i_2 = -0{,}03$, pois são taxas de prejuízo.

B.13 Um comerciante, para acabar com seu estoque, deu 12% de desconto sobre o preço p de um produto, que passou a custar p_1. Por falta de compradores o comerciante descontou 5% sobre o preço p_1, e o novo preço passou a ser p_2. A seguir descontou 3% sobre o preço p_2.

a) Qual foi o preço final do produto, após esses três descontos sucessivos?
b) Qual foi o porcentual de desconto sobre o preço inicial p, após os três descontos sucessivos?

Exercícios complementares

C.1 Um tanque contém 1000 litros de gasolina. Retiram-se 200 litros, que são substituídos por álcool. Misturam-se bem os dois líquidos. Retiram-se então 200 litros dessa mistura, que são substituídos por álcool, e assim sucessivamente. Após a quarta retirada, quantos litros de gasolina ainda restarão no tanque?

C.2 Durante o ano de 1990, um país produziu $5{,}4 \cdot 10^9$ kg e consumiu $3{,}6 \cdot 10^9$ kg de alimentos. Todo o excedente é exportado. Admita-se que anualmente a população desse país cresça em progressão geométrica de razão 1,2 e que sua produção de alimentos cresça em progressão aritmética de razão $2{,}1 \cdot 10^7$ kg. Faça uma projeção para o ano de 1993, ou seja, verifique se esse país exportou ou importou alimentos em 1993, calculando o total de importação ou o de exportação de alimentos. **Sugestão:** suponha que a população no ano de 1990 seja x habitantes.

C.3 A ariranha e o mico-leão-dourado são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população de ariranhas foi de 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas? Dados: $\log 3 = 0{,}477$; $\log 1{,}047 = 0{,}019$.

MAURÍCIO SIMONETTI/PULSAR

Ariranha (*Pteronura brasiliensis*), mamífero encontrado em regiões pouco desbravadas da Amazônia e do Brasil Central.

GLÓRIA JAFET/KINO

Mico-leão-dourado (*Leontopithecus rosalia rosalia*), pequeno primata que habita a América tropical.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R$ 100,00, daqui a 3 anos o preço será:

a) R$ 300,00 b) R$ 400,00 c) R$ 600,00 d) R$ 800,00 e) R$ 1.000,00

V.2 (Fuvest-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao seu valor anterior. Se v for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0{,}7)^7v$ b) $(0{,}3)^7v$ c) $(0{,}7)^8v$ d) $(0{,}3)^8v$ e) $(0{,}3)^9v$

V.3 (Vunesp) Se a taxa de inflação mensal for 10% durante 12 meses seguidos, então a taxa de inflação anual durante esses 12 meses será:

a) 120% c) $100[(1{,}1)^{12} - 1]\%$ e) $100(1{,}1)^{12}\%$
b) $100[(1{,}2)^{10} - 1]\%$ d) 313%

V.4 (PUC-RS) A caixa beneficente de uma entidade rende, a cada mês, 10% sobre o saldo do mês anterior. Se, no início de um mês, o saldo era x, e considerando-se que não haja retiradas, depois de 4 meses o saldo será de:

a) $\left(\frac{11}{10}\right)^4 x$ b) $\left(\frac{11}{10}\right)^3 x$ c) $x + \left(\frac{11}{10}\right)^4 x$ d) $x + \left(\frac{11}{10}\right) x$ e) $x + \left(\frac{1}{10}\right) x$

V.5 (Fuvest-SP) Atualmente 50% das gaivotas de certa região são brancas e 50% são cinzentas. Se a população da espécie branca aumentar 40% ao ano e a da espécie cinzenta aumentar 80% ao ano, qual será, aproximadamente, a porcentagem de gaivotas brancas daqui a 2 anos?

a) 50% b) 38% c) 26% d) 14% e) 9%

V.6 (Fuvest-SP) Um país contraiu em 1829 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em 100 anos à taxa de juro de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada", com capitalização anual de juro. Qual dos valores seguintes está mais próximo do valor da dívida em 1989? Adote $(1{,}09)^8 = 2$.

a) 14 milhões de dólares. c) 1bilhão de dólares. e) 1 trilhão de dólares.
b) 500 milhões de dólares. d) 80 bilhões de dólares.

Capítulo 11

Matrizes – conceitos básicos

1. Introdução

Em um observatório meteorológico, um cientista foi incumbido de registrar, de hora em hora, a temperatura de uma região durante os quatro primeiros dias de junho. Depois de realizado o trabalho, o meteorologista apresentou um relatório com a seguinte tabela:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	18	17	16	16	17	18	18	19	20	20	21	23	22	22	21	20	20	19	18	19	18	17	17	17
2	16	16	18	17	19	19	20	20	21	22	21	21	20	21	23	21	21	20	19	20	19	18	18	18
3	19	18	20	20	19	17	21	21	23	21	22	20	21	22	21	20	21	21	22	22	20	19	18	16
4	17	17	19	18	20	20	19	19	21	22	23	23	22	20	21	19	20	20	21	20	19	18	17	15

na qual cada elemento da linha *i* e coluna *j* é a temperatura, em graus Celsius, da região no dia *i* e na hora *j*.

Note a simplicidade dessa tabela. Se quisermos, por exemplo, saber qual foi a temperatura no dia 3 de junho às 9 h, basta olharmos para a intersecção da linha 3 com a coluna 9 e encontrar 23°C.

Tabelas como essa são denominadas **matrizes**. Vamos formalizar uma estrutura algébrica para as matrizes, ou seja, definiremos igualdade e operações com elas.

2. Matriz

Chama-se **matriz do tipo $m \times n$** (lê-se "m por n") toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas || ||.

Exemplos

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **Matriz A do tipo 3×2**

b) $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ **Matriz B do tipo 2×2**

c) $C_{1\times 3} = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$ **Matriz C do tipo 1×3**

Convenção

Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e coluna j de uma matriz A.

Exemplo

Na matriz $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, temos que:

- o número 9 está posicionado na linha 1 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 9$;
- o 4 está posicionado na linha 1 e coluna 2; indica-se esse elemento por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 4$;
- o 5 está posicionado na linha 2 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{21}, ou seja, $a_{21} = 5$.

Analogamente temos $a_{22} = 6$, $a_{31} = 1$ e $a_{32} = -3$.

2.1. Representação genérica de uma matriz

Podemos representar genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada, simplesmente, por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo de matriz, por $A = (a_{ij})$.

Exercício resolvido

R.1 Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = 5i - j$.

Resolução

Inicialmente, vamos escrever genericamente uma matriz 2×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Cada elemento a_{ij} dessa matriz deve ser calculado pela lei $a_{ij} = 5i - j$. Temos, portanto:

$$a_{11} = 5 \cdot 1 - 1 = 4, \quad a_{12} = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad a_{13} = 5 \cdot 1 - 3 = 2,$$
$$a_{21} = 5 \cdot 2 - 1 = 9, \quad a_{22} = 5 \cdot 2 - 2 = 8, \quad a_{23} = 5 \cdot 2 - 3 = 7.$$

Assim, a matriz é $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Matrizes especiais

3.1. Matriz quadrada

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos

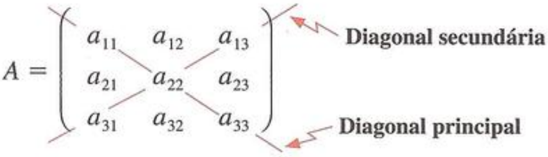
a) $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

c) $C_{1 \times 1} = (8)$ é uma matriz quadrada de ordem 1.

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Exemplo


$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Diagonal secundária
Diagonal principal

Observe:

- na diagonal principal os elementos a_{ij} possuem $i = j$: a_{11}, a_{22} e a_{33};
- na diagonal secundária os elementos a_{ij} são tais que $i + j = 3 + 1$ (onde 3 é a ordem da matriz A): a_{31}, a_{22} e a_{13}.

3.2. Matriz identidade

Chama-se **matriz identidade de ordem *n***, que se indica por I_n, a matriz:

$$I_n = (a_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Note, pela definição, que:

- a matriz identidade de ordem 1 é $I_1 = (1)$;
- toda matriz identidade de ordem maior do que 1 terá todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os demais elementos iguais a zero.

Exemplos

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. Matriz nula

Matriz nula do tipo $m \times n$, que se indica por $0_{m \times n}$, é a matriz:

$$0_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \text{ tal que } a_{ij} = 0, \ \forall i, j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Em outras palavras, matriz nula é qualquer matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

a) $0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Matriz transposta

Chama-se "transposta da matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$", que se indica por A^t, a matriz:

$$A^t = (b_{ji})_{n\times m} \text{ tal que } b_{ji} = a_{ij},\ \forall i, j,\ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Ou seja, cada coluna i de A^t é, ordenadamente, igual à linha i de A.

Exemplos

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ $A^t{}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B_{1\times 4} = (6 \quad 0 \quad 8 \quad 4)$ $B^t_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Elementos correspondentes em matrizes do mesmo tipo

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, dizemos que o elemento da linha r e coluna s de A é o **correspondente** do elemento da linha r e coluna s de B, $\forall r, s$.

Exemplo

Nas matrizes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$,

- a_{11} é o correspondente de b_{11},
- a_{12} é o correspondente de b_{12},
- a_{13} é o correspondente de b_{13}, etc.

6. Igualdade de matrizes

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, dizemos que $A = B$ se, e somente se, todo elemento de A é igual ao seu correspondente em B.

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow a_{rs} = b_{rs}, \qquad \forall r, s,\ 1 \leqslant r \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Exemplo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 5 \\ a_{12} = 0 \\ a_{13} = -1 \\ a_{21} = \frac{1}{2} \\ a_{22} = \sqrt{3} \\ a_{23} = 4 \end{cases}$$

Exercício resolvido

R.2 Determinar os números reais x e y tais que $\begin{pmatrix} 2x - y & 8 \\ 3 & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução

Duas matrizes do mesmo tipo serão iguais se, e somente se, seus elementos correspondentes forem iguais.

Assim, devemos ter $\begin{cases} 2x - y = 5 & \textbf{(I)} \\ x + y = 1. & \textbf{(II)} \end{cases}$

Somando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), temos $3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
Substituindo $x = 2$ em (II), temos $2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$.
Logo, $x = 2$ e $y = -1$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3 (a, c), B.4, B.6, C.2, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3 (b, d), B.5, B.7, B.8, B.9, C.1, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Um conglomerado é composto por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela a seguir apresenta o faturamento em dólares de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{bmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{bmatrix}.$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
b) Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 3?
c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos 4 dias?

B.2 Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe, em sete jogos, através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}.$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o número de pontos marcados pelo jogador de número i no jogo j.

a) Quantos pontos marcou o jogador de número 3 no jogo 5?
b) Quantos pontos marcou a equipe no jogo 4?
c) Quantos pontos marcou o jogador de número 2 em todos os jogos?

B.3 Represente explicitamente cada uma das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$.

b) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

c) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$

d) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 2i + j, \text{ se } i > j \\ j, \text{ se } i < j. \end{cases}$

B.4 Qual é a transposta da matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$?

B.5 Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i, \text{ se } i = j \\ j, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$ obtenha A^t.

B.6 Para que valores reais x e y tem-se que $\begin{pmatrix} 3x + y & 2 & 3 \\ 4 & 5x - y & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$?

B.7 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 4 \\ 9 & x^3 \end{pmatrix}$, encontre o número real x de modo que $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.

B.8 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} x^2 - 5x + 6 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 8 \end{pmatrix}$ seja igual à matriz nula de ordem 2.

B.9 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{pmatrix}$ seja igual à matriz identidade de ordem 2.

Exercícios complementares

C.1 Represente explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} \text{sen } \dfrac{\pi i}{2}, \text{ se } i \leq j \\ \log_2 j, \text{ se } i > j. \end{cases}$

C.2 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $\begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

C.3 Uma matriz A é simétrica se, e somente se, $A = A^t$. Obtenha os números reais x e y, sabendo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ x^2 & 3 & -3 \\ y & x & 5 \end{pmatrix}$ é simétrica.

C.4 Sob que condição, a matriz de elementos reais $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é simétrica?

C.5 Classifique cada afirmação como V ou F:

a) Toda matriz identidade é necessariamente quadrada.
b) Existe matriz identidade que não é quadrada.
c) Toda matriz nula é necessariamente quadrada.
d) Existe matriz nula que não é quadrada.
e) $(A^t)^t = A$, qualquer que seja a matriz A.
f) $A^t \neq A$, qualquer que seja a matriz A.
g) Se a matriz A é do tipo 2×3, então A^t é do tipo 3×2.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fatec-SP) Sejam $X = \begin{pmatrix} a^2 - 2 & -2a \\ 4a & -2 + a^2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Se $X = Y$, então:

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = -\frac{1}{2}$ e) n.d.a.

V.2 (PUC-SP) Uma matriz quadrada é simétrica se, e somente se, $A^t = A$.

Se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1 - y \\ x & y - 3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então o valor de $x + y$ é:

a) 3 b) 1 c) 0 d) −2 e) −3

V.3 (Mackenzie-SP) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $\begin{cases} a_{ij} = \text{sen}\,\frac{\pi i}{2}, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = \cos \pi j, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$ então A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Capítulo 12

Operações com matrizes

1. Introdução

Uma empresa é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de veículos nos quatro primeiros dias de janeiro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

sendo que:

- a matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j; por exemplo, o elemento $a_{23} = 5$ nos diz que foram vendidas cinco unidades do modelo 2 no dia 3;
- a matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

Como representaríamos, matricialmente, a quantidade vendida desses dois modelos, nas duas lojas, nos primeiros quatro dias de janeiro? Basta construir uma matriz $C_{2 \times 3}$, na qual cada elemento C_{ij} seja igual à soma de seus correspondentes nas matrizes A e B, ou seja:

$$C = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+0 & 1+2 & 5+3 \\ 1+4 & 2+2 & 5+4 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

A matriz C é denominada "**matriz soma** de A e B".

Analogamente, se quisermos uma matriz que represente o desempenho da loja A em relação à loja B, basta subtrairmos de cada elemento de A o seu correspondente em B, obtendo a matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 & 1-2 & 5-3 \\ 1-4 & 2-2 & 5-4 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Assim, por exemplo:

- o elemento $a_{11} = -1$ nos diz que a loja A vendeu uma unidade a menos do modelo 1, no dia 1, do que a loja B;
- o elemento $a_{14} = 2$ nos diz que a loja A vendeu duas unidades a mais do modelo 1, no dia 4, do que a loja B.

A matriz D é chamada de "**matriz diferença** de A e B, nessa ordem". De acordo com as idéias desse exemplo, definiremos a seguir a **adição** e a **subtração** de matrizes.

2. Adição de matrizes

Definição

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, que se indica por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i, \ j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \ \text{ e } \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Em outras palavras, cada elemento da matriz C é igual à soma de seus correspondentes em A e B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1. Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, valem as quatro propriedades descritas a seguir.

A.1 Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$, o que quer dizer que a soma dessas matrizes pode ser indicada simplesmente por $A + B + C$, isto é, sem parênteses.

A.2 Comutativa: $A + B = B + A$.

A.3 Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$, onde 0 é a matriz nula do mesmo tipo da matriz A.

A.4 Elemento oposto: para toda matriz A existe a matriz A' tal que $A + A' = A' + A = 0$, onde 0 é a matriz nula do mesmo tipo de A e A'.

As matrizes A e A' são denominadas **matrizes opostas**. Indicamos esse fato por $A' = -A$ (lê-se "A' é igual à oposta de A") ou por $A = -A'$.

Nota: a oposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é a matriz:

$$-A = (b_{ij})_{m \times n} \text{ tal que } b_{ij} = -a_{ij}, \ \forall i, j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \ \text{ e } \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Exemplo

A oposta da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é $-A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Multiplicação de número por matriz

Definição

O **produto** de um número k por uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, que se indica por kA, é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que:

$$b_{ij} = ka_{ij}, \ \forall i, \ j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \ \text{ e } \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Ou seja, cada elemento da matriz B é igual ao produto de seu correspondente em A, pelo número k.

Exemplo

$$4\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 12 & 0 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

3.1. Propriedades da multiplicação de número por matriz

Sendo A e B matrizes do mesmo tipo e sendo r e s números, tem-se que:

N.1 $r(sA) = s(rA) = (rs)A$;

N.2 $r(A + B) = rA + rB$;

N.3 $(r + s)A = rA + sA$;

N.4 $1 \cdot A = A$.

4. Subtração de matrizes

Definição

A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo A e B, nessa ordem, que se indica por $A - B$, é a matriz $A + (-B)$:

$$A - B = A + (-B).$$

Em palavras mais simples, a diferença $A - B$ é igual à soma de A com a oposta de B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 6 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -6 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Nota: para ganhar tempo, obtenha cada elemento da matriz diferença, fazendo a diferença entre os elementos correspondentes das matrizes A e B, nessa ordem.

Exercícios resolvidos

R.1 São dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) $A + B$;

b) $2A - B$;

c) $B - (2A + C^t)$.

Resolução

a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & -6 \end{pmatrix}$.

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 4 & -16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -8 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ -4 & -17 & 15 \end{pmatrix}.$

c) $B - (2A + C^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} - \left[2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 4 & -16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 4 & -20 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 & -10 \\ 4 & 21 & -17 \end{pmatrix}.$

R.2 Determinar as matrizes X e Y tais que $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $X - Y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução

Temos que: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(I)} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

Somando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$2X = \begin{pmatrix} 1+7 & 3+5 \\ 5+1 & 0+4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos os membros dessa igualdade, concluímos que: $X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **(III)**

Substituindo (III) em (I), temos que:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \therefore Y = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Multiplicação de matrizes

Um corretor da bolsa de valores, calculando o patrimônio adquirido no dia por dois clientes, nas quatro primeiras horas de pregão, montou as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 5.000 & 2.000 & 1.800 & 1.000 \\ 2.000 & 3.000 & 800 & 1.200 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

em que:

- cada elemento a_{ij}, da matriz A, é a quantidade de ações da empresa Salfin S.A. adquiridas pelo cliente i na hora j; por exemplo, o elemento $a_{23} = 800$ nos diz que foram adquiridas 800 ações da Salfin S.A. pelo cliente 2 na hora 3;
- cada elemento b_{ij}, da matriz B, é o preço, em dólares, de cada ação da Salfin S.A. na hora i; por exemplo, o elemento b_{21} nos diz que na hora 2 o preço de cada ação era de 2,5 dólares.

Quanto investiu o cliente 1 para adquirir suas ações?

Esse investimento é calculado multiplicando-se o número de ações adquiridas em cada hora pelo preço unitário e somando-se os resultados obtidos. Ou seja:

$$5.000 \cdot 2 + 2.000 \cdot 2{,}5 + 1.800 \cdot 3 + 1.000 \cdot 4 = 24.400.$$

Logo, concluímos que o cliente 1 investiu 24.400 dólares em ações da Salfin S.A.

Quanto investiu o cliente 2 para adquirir suas ações?

Analogamente, temos: $2.000 \cdot 2 + 3.000 \cdot 2{,}5 + 800 \cdot 3 + 1.200 \cdot 4 = 18.700$.

Logo, concluímos que o cliente 2 investiu 18.700 dólares em ações da Salfin S.A.

Qual é a matriz C tal que cada elemento c_{ij} seja o investimento do cliente i?

A matriz C é: $C = \begin{pmatrix} 24.400 \\ 18.700 \end{pmatrix}$.

A matriz C é denominada "**matriz produto** de A por B". A idéia apresentada nesse exemplo nos ajudará a compreender as definições seguintes.

Multiplicação de linha por coluna

Antes de definirmos a multiplicação de matrizes, vamos definir produto de linha por coluna.

Definição

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times k}$ e $B = (b_{ij})_{k \times n}$. Consideremos a linha i de A e a coluna j de B, isto é:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}.$$

O produto da linha pela coluna é:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i pelos elementos da coluna j e somamos os resultados obtidos.

Exemplo

Sendo as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, temos que:

- o produto da primeira linha de A pela primeira coluna de B é o número:

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 31;$$

- o produto da primeira linha de A pela segunda coluna de B é o número:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 = 52; \text{ etc.}$$

Podemos, agora, definir **produto de matrizes**.

Definição

> O produto da matriz $A = (a_{ij})_{m \times k}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{k \times n}$, que se indica por AB ou por $A \cdot B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que cada elemento c_{ij} é igual ao produto da linha i de A pela coluna j de B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 31 & 52 & 13 \\ 13 & 21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observe que, se A e B são matrizes, então:

- existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Exemplos

a) Existe o produto $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$.

Iguais

b) Não existe o produto $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$.

Diferentes

- a matriz C tal que $C = AB$ possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é: $A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$.

Exemplos

a) $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$

b) $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

Curiosidade

A definição de multiplicação de matrizes pode parecer um tanto abstrata; por isso achamos necessário mostrar a sua origem.

Consideremos os sistemas de equações do 1º grau:

$$A \begin{cases} x = 2p + 3q \\ y = 5p + 4q \end{cases} \quad \text{e} \quad B \begin{cases} p = 7m + 6n \\ q = 8m + 9n. \end{cases}$$

Vamos obter um sistema de equações do 1º grau que expresse as variáveis x e y em função de m e n. Para isso, basta substituir, em A, a variável p por $7m + 6n$ e q por $8m + 9n$:

$$C\begin{cases} x = 2(7m + 6n) + 3(8m + 9n) \\ y = 5(7m + 6n) + 4(8m + 9n) \end{cases} \quad \therefore C\begin{cases} x = 38m + 39n \\ y = 67m + 66n. \end{cases}$$

Observe as matrizes formadas pelos coeficientes de p e q em A, de m e n em B e de m e n em C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 38 & 39 \\ 67 & 66 \end{pmatrix}.$$

Note que cada elemento da linha i e coluna j de C é igual ao produto da linha i de A pela coluna j de B. Assim, define-se a matriz C como o produto AB.

Exercícios resolvidos

R.3 São dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinar os seguintes produtos:

a) AB b) AC c) CD d) BD e) $(AB)E$ f) $A(BE)$

Resolução

a) $$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot2 & 2\cdot3+1\cdot5 & 2\cdot1+1\cdot6 \\ 3\cdot4+4\cdot2 & 3\cdot3+4\cdot5 & 3\cdot1+4\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 20 & 29 & 27 \end{pmatrix}.$$

b) $$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot5 \\ 3\cdot4+4\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

c) $$CD = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot3 & 4\cdot2 \\ 5\cdot3 & 5\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}.$$

d) $BD = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = ?$ (Não existe BD, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.)

e) $$(AB)E = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 20 & 29 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 159 \end{pmatrix}.$$

f) $A(BE) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 159 \end{pmatrix}$. Note que $(AB)E = A(BE)$.

R.4 Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, determinar:

a) $A \cdot I_3$ b) $I_2 \cdot A$

Resolução

a) $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Note que $A \cdot I_3 = A$.

b) $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Note que $I_2 \cdot A = A$.

R.5 Determinar a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o tipo da matriz X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{2 \times 2}} \cdot \underbrace{X}_{\boldsymbol{m \times n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{2 \times 1}}.$$

- O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de X; portanto $m = 2$.
- O número de colunas da matriz X deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto $n = 1$.

Assim, a matriz X é do tipo 2×1. Seja $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Temos, então:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 5a + b \\ 4a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Como duas matrizes são iguais se, e somente se, seus elementos correspondentes são iguais, temos:

$$\begin{cases} 5a + b = 9 & \textbf{(I)} \\ 4a + b = 7. & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos $a = 2$.
Substituindo $a = 2$ em (I), temos $5 \cdot 2 + b = 9 \Rightarrow b = -1$.

Logo, a matriz procurada é $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5.1. Propriedades da multiplicação de matrizes

M.1 Propriedade associativa: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $n \times k$ e $k \times p$, respectivamente, tem-se que: $(AB)C = A(BC)$. A propriedade associativa nos permite indicar o produto entre essas matrizes simplesmente por ABC, isto é, sem parênteses.

M.2 Propriedade distributiva à direita: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que: $(A + B)C = AC + BC$.

M.3 Propriedade distributiva à esquerda: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $n \times k$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que: $A(B + C) = AB + AC$.

M.4 Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, tem-se que: $AI_n = A$ e $I_m A = A$.

M.5 Sendo A e B matrizes de tipos $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, e sendo r um número qualquer, tem-se que: $(rA)B = A(rB) = r(AB)$.

M.6 Sendo A e B matrizes de tipos $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que: $(AB)^t = B^t A^t$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.8, B.9, B.11, C.1, C.5, C.8, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.10, B.12, C.2, C.3, C.4, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A + B$

b) $5A$

c) $\frac{1}{2}B$

d) $5A - \frac{1}{2} \cdot B$

e) $B - C^t$

f) $2C + A^t - B^t$

B.2 Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, efetue:

a) $A - (B + C)$

b) $(A - B) + C$

c) $(A + B + C)^t$

d) $A^t + B^t + C^t$

e) $2A - 5B$

B.3 Determine a matriz X tal que: $2\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} + X = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

B.4 Qual é a matriz X tal que: $6X + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2X + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

B.5 Obtenha as matrizes X e Y tais que: $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $X - Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B.6 Para que matrizes X e Y tem-se: $X + 4Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ e $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$?

B.7 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $D = (1 \ \ -2)$, determine:

a) AB

b) BC

c) CD

B.8 Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $(A \cdot B)^t$
d) $B^t \cdot A^t$
e) $A^t \cdot B^t$
f) $A \cdot I_3$
g) $I_2 \cdot A$
h) $B \cdot I_2$
i) $I_3 \cdot B$

B.9 Qual é a matriz X tal que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$?

B.10 Determine a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

B.11 Obtenha a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B.12 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, define-se:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\textbf{k fatores}},\ \forall k, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2.$$

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, determine:

a) A^0
b) A^1
c) A^2
d) A^3
e) A^{18}
f) A^{35}

Exercícios complementares

C.1 Determine o conjunto de todas as matrizes A, de elementos reais, tais que $A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C.2 Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $A + (-A) = 0$, onde 0 é a matriz nula do mesmo tipo da matriz A.
b) $A + B = B + A$
c) $(A + B) + C = A + (B + C)$
d) $(A - B) - C = A - (B - C)$
e) $(A + B)^t = A^t + B^t$
f) $A - B = B - A$
g) $(A - B)^t = A^t - B^t$
h) Se $A - B = B - A$, então A e B são matrizes nulas.

C.3 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, determine:

a) AB
b) BA

C.4 Sendo A, B e C matrizes, classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) Se existe o produto $A \cdot B$, então existe o produto $B \cdot A$.
b) Existe o produto $A \cdot A^t$.
c) Se existem os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$, então $A \cdot B = B \cdot A$.
d) Se existe o produto $A \cdot B$, então $(A \cdot B)^t = B^t A^t$.
e) Se existe o produto $(A \cdot B)C$, então $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$.
f) Se existe a expressão $A(B + C)$, então $A(B + C) = AB + AC$.

C.5 Sendo A e B matrizes quadradas de ordem n e sendo 0 a matriz nula de ordem n, classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) $AB = BA,\ \forall\ A, B$
b) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$
c) $0 \cdot A = 0$
d) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
e) $(AB)^2 = A^2B^2$
f) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

C.6 Determine a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

C.7 Duas matrizes A e B comutam na multiplicação se, e somente se, $AB = BA$. Verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ comutam na multiplicação.

C.8 Determine o número x para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comutem na multiplicação.

C.9 Determine o conjunto de todas as matrizes A, de elementos reais, que comutam na multiplicação, com a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFES) Os valores de x e y que satisfazem a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 4 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 7 \\ 1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

são:

a) $x = -1$ e $y = -1$.
b) $x = 1$ e $y = 1$.
c) $x = 2$ e $y = -1$.
d) $x = 2$ e $y = 2$.

(**Nota:** equação matricial é qualquer equação envolvendo matrizes.)

V.2 (Fuvest-SP) Dadas as matrizes:

1) $A = (a_{ij})_{4 \times 7}$, definida por $a_{ij} = i - j$
2) $B = (b_{ij})_{7 \times 9}$, definida por $b_{ij} = i$
3) $C = (c_{ij})$, $C = AB$

O elemento c_{63} é:

a) -112
b) -18
c) -9
d) 112
e) Não existe.

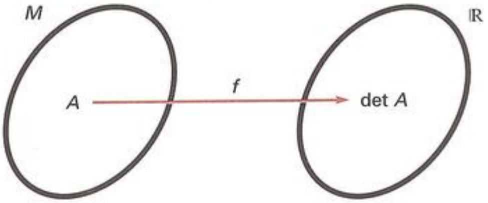
V.3 (Faap-SP) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ache a matriz B, tal que $AB = I$, sendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Capítulo 13

Determinantes – uma nova função

1. Introdução

Vamos definir uma função f em que o domínio é o conjunto M de todas as matrizes quadradas e o contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Tal função associa cada matriz quadrada A a um número real, denominado **determinante da matriz A**, que indicamos pelo símbolo **det A**:



Para definir a função f, necessitamos de alguns conceitos preliminares.

2. Múltipla de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz

Seja a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Chama-se "**múltipla** da linha r da matriz A" a seqüência $(ka_{r1}, ka_{r2}, ka_{r3}, \dots, ka_{rn})$, com $k \in \mathbb{R}$.

- Chama-se "**múltipla** da coluna s da matriz A" a seqüência $\begin{pmatrix} ka_{1s} \\ ka_{2s} \\ ka_{3s} \\ \vdots \\ ka_{ms} \end{pmatrix}$, com $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- Uma múltipla da primeira linha de A é a seqüência $(5\ \ 10\ \ 15)$.
- Uma múltipla da segunda coluna de A é a seqüência $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

3. Soma de duas filas paralelas de uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

- Chama-se "**soma** da linha r com a linha t da matriz A a seqüência:

$$(a_{r1} + a_{t1}, a_{r2} + a_{t2}, a_{r3} + a_{t3}, ..., a_{rn} + a_{tn}).$$

- Chama-se "**soma** da coluna s com a coluna p da matriz A" a seqüência $\begin{pmatrix} a_{1s} + a_{1p} \\ a_{2s} + a_{2p} \\ a_{3s} + a_{3p} \\ \vdots \\ a_{ms} + a_{mp} \end{pmatrix}$.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

- A soma da primeira com a segunda linha de A é a seqüência $(6\ \ 7\ \ 4)$.
- A soma da primeira com a terceira coluna de A é a seqüência $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Matrizes equiparáveis

Considere a operação * efetuada com filas paralelas de uma matriz:

> * Substituir uma fila (linha ou coluna) pela soma dela com uma múltipla de outra fila paralela.

Exemplo

Substituindo a terceira coluna da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ pela soma dela com a primeira coluna previamente multiplicada por 2, obtém-se: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 16 \\ 5 & 6 & 18 \end{pmatrix}$.

Definição

Seja $\mathscr{E} = \{A, B, C, D, ...\}$ um conjunto qualquer de matrizes **quadradas** de ordem n, $n > 1$, tais que, efetuando-se a operação * nas filas de qualquer matriz de $\mathscr{E}$, obtém-se uma matriz de $\mathscr{E}$.

Duas matrizes quaisquer de $\mathscr{E}$ são denominadas **matrizes equiparáveis**.

Indicamos que duas matrizes A e B são equiparáveis por $A \approx B$ (lê-se "A é equiparável a B").

Exemplo

Substituindo a segunda linha da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ pela soma dela com a primeira linha previamente multiplicada por 4, obtemos a matriz B equiparável a A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \xrightarrow{\times} \boxed{4} \\ \xleftarrow{+} \\ \end{array} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 16 & 13 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } A \approx B.$$

Nota: dizemos que uma matriz $A_{1\times1}$ só é equiparável a ela mesma.

Exemplo

$(a_{11}) \approx (5) \Leftrightarrow a_{11} = 5.$

Propriedades

Sendo A, B e C matrizes quadradas quaisquer, temos que:

I. $A \approx A$ (**reflexiva**);

II. se $A \approx B$, então $B \approx A$ (**simétrica**);

III. se $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \approx C$ (**transitiva**).

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma matriz $B = (b_{ij})$ equiparável à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ tal que $b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0$.

Resolução

Para obter uma matriz equiparável a A, só podemos utilizar a operação *, isto é, substituir uma fila pela soma dela com uma múltipla de uma fila paralela.

Assim, temos:

$$\boxed{-2}\,\boxed{-4}\begin{array}{l} \xleftarrow{\times} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}} \approx \boxed{\frac{1}{3}}\begin{array}{l} \\ \xleftarrow{\times} \\ \xrightarrow{+} \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}}.$$

Substituímos:

- **a segunda linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -4;**
- **a terceira linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -2.**

Substituímos:

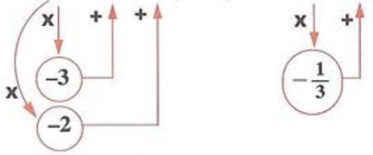
- **a terceira linha pela soma dela com a segunda multiplicada por $\frac{1}{3}$.**

Logo, uma matriz que satisfaz a condição exigida é $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$.

R.2 Obter uma matriz $C = (c_{ij})$ equiparável à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ tal que $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$.

Resolução

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$



Logo, uma matriz possível é: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$.

5. Matriz triangular

Definição

Matriz triangular é toda matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$, se $i > j$, ou $a_{ij} = 0$, se $i < j$.

Em outras palavras:

- uma matriz de ordem n, $n > 1$, é triangular se, e somente se, seus elementos posicionados acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero;
- toda matriz de ordem 1 é triangular.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $D = (5)$

Teorema

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, existe uma matriz triangular $B = (b_{ij})_{n \times n}$ equiparável a A.

Exemplo

Nos exercícios R.1 e R.2, vimos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \text{ e que } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Teorema

Se duas matrizes triangulares A e B são equiparáveis ($A \approx B$), então ambas possuem o mesmo produto dos elementos da diagonal principal.

Isto é:

$$\text{Se } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots b_{1\,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \dots b_{2\,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} \dots b_{3\,n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & b_{nn} \end{pmatrix},$$

então $a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} = b_{11}b_{22}b_{33} \cdot \dots \cdot b_{nn}$.

Exercício resolvido

R.3 Obter duas matrizes triangulares B e C, equiparáveis à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 11 & 18 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Resolução

$$\begin{matrix} \textcircled{-2} & \textcircled{-4} & \times \\ & & + \\ & & + \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 11 & 18 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{matrix} & \times \\ \textcircled{-1} & \\ & + \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Assim, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Para obtermos uma outra matriz C, façamos:

$$\begin{array}{r} + \\ + \\ \overset{\times}{\left(-\frac{1}{3}\right)}\ \overset{\times}{(-2)} \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&11&18\\2&7&9\end{pmatrix} \approx \begin{array}{r} + \\ \overset{\times}{\left(-\frac{1}{9}\right)} \\ \end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&-3&0\\2&7&9\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&-3&0\\2&7&9\end{pmatrix}$$

Assim, $C = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&-3&0\\2&7&9\end{pmatrix}$.

Observe que as matrizes B e C têm o mesmo produto dos elementos da diagonal principal, isto é:

$$1 \cdot 3 \cdot (-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 9 = -9.$$

6. Determinante de uma matriz quadrada

Definição 1

O determinante da matriz $A = (a_{11})$ é igual ao próprio elemento a_{11}.

Exemplo

Se $A = (-3)$, então $\det A = -3$.

Definição 2

O determinante de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $n \geqslant 2$, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de qualquer matriz triangular B, equiparável a A.

Exemplos

a) Se $A = \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$, então $\det A = 3 \cdot 2 = 6$.

b) Sendo $C = \begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$, temos que:

$$\begin{array}{r} \overset{\times}{(-4)} \\ + \end{array}\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1&2\\0&-3\end{pmatrix}$$

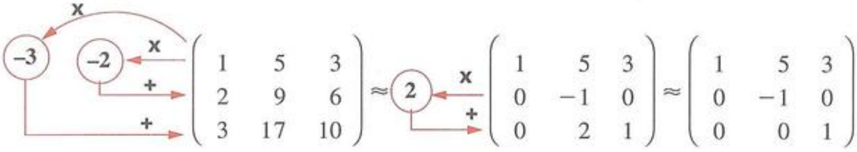
Logo, $\det C = 1 \cdot (-3) = -3$.

Exercícios resolvidos

R.4 Calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix}1&5&3\\2&9&6\\3&17&10\end{pmatrix}$.

Resolução

Devemos obter uma matriz triangular B, equiparável a A.



$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 17 & 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

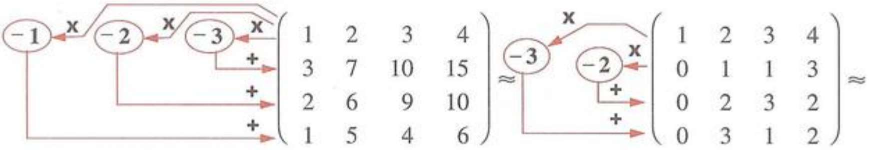
Assim, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Logo, $\det A = \det B = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$.

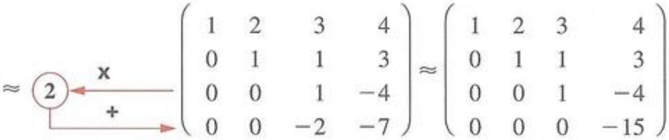
R.5 Calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 & 15 \\ 2 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Resolução

Devemos obter uma matriz triangular B, equiparável a A.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 & 15 \\ 2 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx$$



$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Assim, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$.

Logo, $\det A = \det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-15) = -15$.

R.6 Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$, determinar x, $x \in \mathbb{R}$, tal que $\det A = 0$.

Resolução

$$\overset{\times}{\boxed{-6}}\ \boxed{-4}\ \begin{array}{c}\times\\+\\+\end{array}\begin{pmatrix}1&2&1\\4&9&4\\6&x&x-7\end{pmatrix}\approx\boxed{-x+12}\ \begin{array}{c}\\ \times\\+\end{array}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&x-12&x-13\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&x-13\end{pmatrix}$$

Assim, $\det A = 0 \Rightarrow 1\cdot 1\cdot(x-13)=0\ \therefore\ x=13$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.8, C.3, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, B.9, C.1, C.2, C.5, C.6, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Obtenha uma matriz $B=(b_{ij})$ equiparável à matriz $A=\begin{pmatrix}3&5&2\\2&4&6\\8&3&5\end{pmatrix}$ tal que $b_{11}=1$.

B.2 Encontre uma matriz $B=(b_{ij})$ equiparável à matriz $A=\begin{pmatrix}4&5&2&3\\9&3&6&5\\5&2&9&6\\4&5&8&2\end{pmatrix}$ tal que $b_{21}=1$.

B.3 Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A=\begin{pmatrix}4&5\\0&8\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}2&4\\6&1\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&5&0\\3&0&2\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1&2&4\\5&9&2\\2&3&1\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&9&7&8\\3&15&7&11\\1&5&4&4\end{pmatrix}$

B.4 Qual é o determinante de cada uma das seguintes matrizes?

a) $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1&4&1\\1&2&3\\3&5&2\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}3&2&4&2\\2&1&5&4\\6&4&7&5\\6&5&3&3\end{pmatrix}$

Sugestão: no item (c), para facilitar a obtenção da matriz triangular, obtenha uma matriz $D=(d_{ij})$, equiparável a C, tal que $d_{11}=1$.

B.5 Calcule, em função de a e x, o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ x & x & a & a \\ x & x & x & a \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$.

B.6 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, calcule $\det A$ em função de a, b, c e d.

B.7 Sendo $A = \begin{pmatrix} x-1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & x & 1 & -4 \\ 0 & 0 & x-5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $\det A = 0$.

B.8 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & x & 4 \end{pmatrix}$ tenha determinante nulo.

B.9 Para que valor(es) de x, $x \in \mathbb{R}$, o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x & x-5 \end{pmatrix}$ é igual a zero?

Exercícios complementares

C.1 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 16 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

C.2 Se uma matriz quadrada A possui uma fila nula, isto é, uma fila formada apenas por zeros, então qual é o valor do $\det A$?

C.3 Sendo A uma matriz quadrada equiparável a uma matriz triangular B, classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) A^t é equiparável a B^t.

b) $\det A = \det A^t$

c) $B = B^t$

d) $\det B \neq \det B^t$

C.4 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ka & kb & kc & kd \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, com $\{a, b, c, d, k\} \subset \mathbb{R}$.

C.5 Se uma matriz quadrada A possui duas filas paralelas proporcionais, isto é, uma das filas é múltipla de outra fila paralela, então qual é o valor do $\det A$?

C.6 A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 15 \\ 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ é equiparável à matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Mostre que a matriz kA, $k \in \mathbb{R}$, é equiparável à matriz kB.

b) Mostre que $\det kA = k^3 \det A$.

C.7 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n equiparável a uma matriz triangular B e sendo k um número real, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) kA é equiparável a kB.

b) $\det kA = k \det A$.

c) $\det kA = k^n \det A$.

C.8 Uma matriz A de ordem 4 é tal que $\det A = 5$. Calcule $\det 2A$.

C.9 A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 15 \\ 6 & 11 & 18 \end{pmatrix}$ é equiparável à matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

a) Mostre que a matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 15 \\ 6k & 11k & 18k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, é equiparável à matriz

$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7k \end{pmatrix}$.

b) Mostre que $\det C = k \det A$.

C.10 Multiplicando uma fila de uma matriz quadrada A pelo número 5, obtém-se uma nova matriz B. Sendo $\det A = 10$, calcule $\det B$. **Cuidado**! A matriz B **não** é equiparável a A.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Se somarmos 4 a todos os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cujo determinante é D, então o determinante da nova matriz será:

a) $2D$ b) $3D$ c) $4D$ d) $5D$ e) $6D$

V.2 (UFES) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) $5a^3$ b) $-2a^3$ c) a^3 d) $2a^3$ e) $-a^3$

V.3 (FGV-SP) Sendo $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$, o conjunto solução da equação $\det A = 0$ é:

a) $\{0, 1, 4, 6\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $\{0, 1, 4, 5\}$

d) $\{0, 1, 2, 3\}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

Capítulo 14

Propriedades dos determinantes – parte 1

1. Introdução

Vamos apresentar algumas propriedades que facilitam o cálculo do determinante de uma matriz. A propriedade P.1, por exemplo, permite o cálculo do determinante de uma matriz A sem a necessidade da obtenção da matriz triangular equiparável a A.

Vamos adotar, daqui por diante, uma nova notação para o determinante de uma matriz A. Isto é, o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{pmatrix},$$

que até aqui indicamos por **det A**, será simbolizado também por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nota

Cuidado com as notações de matriz e determinante, pois são muito parecidas. Que fique claro o seguinte:

- o símbolo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ indica **matriz** e, portanto, representa uma **tabela**;

- o símbolo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$ indica **determinante** e, portanto, representa um **número**.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, temos que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$.

2. Cofator

Para apresentar a propriedade P.1, a seguir, necessitamos do conceito de cofator. Consideremos a seguinte matriz quadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chama-se "**cofator** do elemento a_{ij}" o número que indicaremos por A_{ij} (lê-se "cofator do elemento a_{ij}"), definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det B,$$

onde B é a matriz que se obtém eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A.

Exemplos

a) O cofator do elemento a_{11} da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é

$$A_{11} = (-1)^{\overbrace{1+1}} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 (5 \cdot 3) = 15.$$

b) O cofator do elemento a_{21} da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é:

$$A_{21} = (-1)^{\overbrace{2+1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 (1 \cdot 3) = -3.$$

3. Propriedades dos determinantes

P.1 Teorema de Laplace

"O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, $n \geqslant 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores."

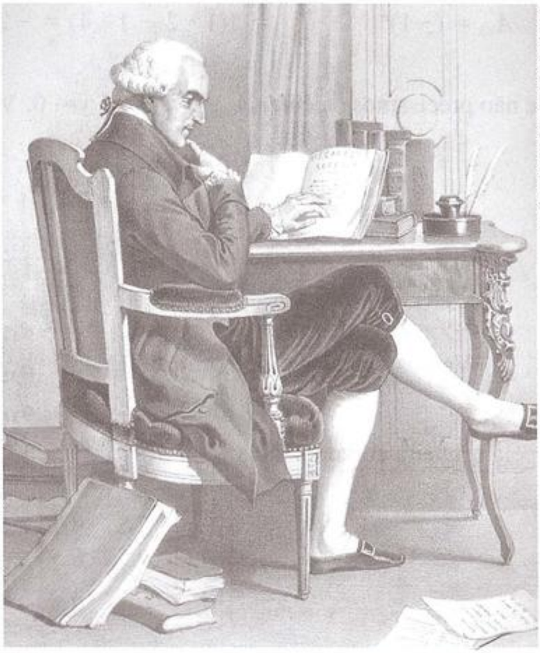
Exemplos

a) Para calcular o determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, escolhemos uma fila qualquer, multiplicamos os elementos dessa fila pelos respectivos cofatores e, a seguir, somamos os produtos obtidos. Escolhendo a primeira linha, temos que:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

Como $A_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22}$ e $A_{12} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Pierre Simon, marquês de Laplace (1749-1827), matemático francês. Dentre outros grandes feitos, demonstrou um dos mais importantes teoremas sobre determinantes.

Ou seja:

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Assim sendo, temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4(-1) = 10.$$

b) Vamos calcular o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ pelo teorema de Laplace.

Desenvolvendo-o através da terceira coluna, temos:

$$\left|\begin{matrix}2 & 5\\ 1 & 4\\ 1 & 2\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}3\\ 4\\ 0\end{matrix}}\right| = 3A_{13} + 4A_{23} + 0A_{33}.$$

Como

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1(1\cdot 2 - 1\cdot 4) = -2,\ A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1(2\cdot 2 - 1\cdot 5) = 1,$$

e não precisamos calcular A_{33}, pois $0\cdot A_{33} = 0$, $\forall A_{33}$, temos que:

$$\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = 3A_{13} + 4A_{23} = 3(-2) + 4\cdot 1 = -2.$$

c) Vamos calcular o determinante $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ pelo teorema de Laplace. Desenvolvendo-o pela primeira coluna, temos:

$$\left|\boxed{\begin{matrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{matrix}}\ \begin{matrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Como

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = -1(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) = -a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}$$

e

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},$$

temos que:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

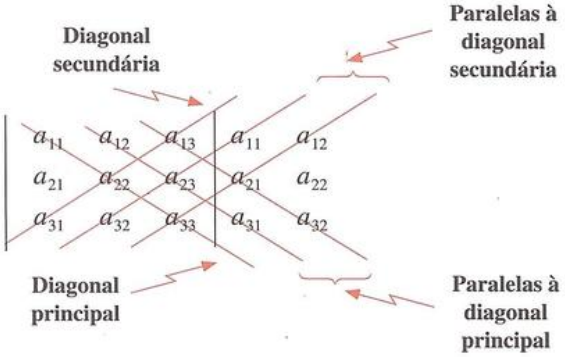
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Note que o cálculo do determinante de ordem 3 através do teorema de Laplace é bastante trabalhoso. Convém memorizarmos uma regra prática para esse cálculo.

Regra de Sarrus

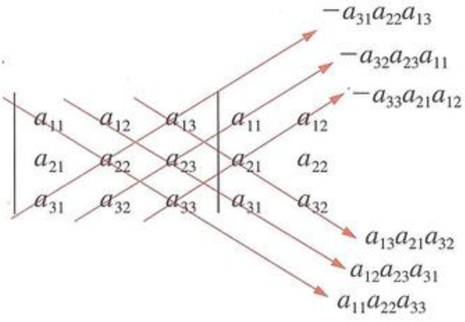
O cálculo de um **determinante de ordem 3** pode ser feito através dos passos descritos a seguir.

I. Repetem-se as duas primeiras colunas à direita do determinante:


Diagonal secundária
Paralelas à diagonal secundária
a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}
Diagonal principal
Paralelas à diagonal principal

II. Multiplicam-se:

- os elementos da diagonal principal e os elementos de cada paralela a essa diagonal, **conservando o sinal** de cada produto obtido;
- os elementos da diagonal secundária e os elementos de cada paralela a essa diagonal, **invertendo o sinal** de cada produto obtido.


$-a_{31}a_{22}a_{13}$
$-a_{32}a_{23}a_{11}$
$-a_{33}a_{21}a_{12}$
a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{11}a_{22}a_{33}$

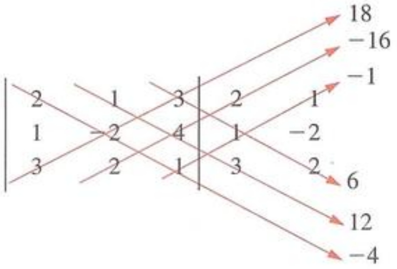
III. E somam-se os resultados obtidos em (II), ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Usando a regra de Sarrus, calcular o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução



$= -4 + 12 + 6 + 18 - 16 - 1 = 15.$

Logo, $D = 15$.

R.2 Calcular o mesmo determinante anterior pelo teorema de Laplace.

Resolução

Desenvolvendo o determinante D através do teorema de Laplace, escolhendo a primeira linha, temos:

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad 3} \\ 1 \quad -2 \quad 4 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{vmatrix} = 2A_{11} + 1A_{12} + 3A_{13}.$$

Calculando os cofatores:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-2 \cdot 1 - 2 \cdot 4) = -10,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 1 - 3 \cdot 4) = 11 \text{ e } A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 2 - 3(-2)) = 8,$$

temos, então, que $D = 2(-10) + 1 \cdot 11 + 3 \cdot 8 = 15$.
Logo, $D = 15$.

R.3 Calcular o determinante D através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores: $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

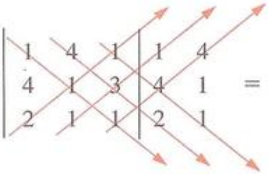
Resolução

Para o desenvolvimento por Laplace, podemos escolher uma fila qualquer. Por comodidade, escolheremos a fila com a maior quantidade de zeros, isto é, a terceira coluna. Tal escolha é conveniente porque o produto do elemento zero pelo seu cofator é igual a zero e, portanto, não é preciso calcular esse cofator.

Temos então $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & \boxed{3} & 2 \\ 1 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ 4 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 2 & 1 & \boxed{4} & 1 \end{vmatrix} = 3A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4A_{43}$.

Precisamos calcular apenas os cofatores A_{13} e A_{43}:

$A_{13} = (-1)^4$



$= 1(1 + 24 + 4 - 2 - 3 - 16) = 8$

e

$$A_{43} = (-1)^7 \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right. = -1(60 + 4 + 2 - 32 - 5 - 3) = -26.$$

Logo, $D = 3 \cdot 8 + 4(-26) = -80$.

R.4 Calcule o determinante da matriz M através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores: $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 5 & 3 \\ 4 & 20 & 10 & 6 \\ 3 & 17 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução

Como a matriz M não possui elementos nulos, o cálculo de seu determinante será exaustivo, pois deveremos calcular quatro cofatores. Todo esse trabalho poderá ser reduzido sensivelmente se lembrarmos que matrizes equiparáveis têm o mesmo determinante. Portanto vamos obter uma matriz $A = (a_{ij})$ equiparável a M tal que $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$.

Temos então que:

$$\textcircled{-3}\times \; \textcircled{-4}\times \; \textcircled{-2}\times \; \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 5 & 3 \\ 4 & 20 & 10 & 6 \\ 3 & 17 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

Desenvolvimento por Laplace através da primeira coluna

$$= \overbrace{1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41}}.$$

Como $A_{11} = (-1)^2 \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right. = 1(4 + 4 - 4) = 4$ e não precisamos calcular os cofatores A_{21}, A_{31} e A_{41}, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = 1 \cdot 4 = 4.$$

Logo, $\det M = 4$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, C.1, C.2, C.4, C.5, C.8.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, C.3, C.6, C.7, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix}$

B.2 Obtenha os valores de:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \text{sen } \frac{\pi}{12} & -\cos \frac{\pi}{12} \\ \text{sen } \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{vmatrix}$ (**lembre-se** de que $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$)

b) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$

B.3 Através da regra de Sarrus, calcule:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

B.4 Qual é o valor de cada determinante? (Use a regra de Sarrus.)

a) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & a & a \\ b & a & c \end{vmatrix}$

B.5 Calcule o determinante através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

B.6 Empregando o teorema de Laplace, com o auxílio da regra de Sarrus para os cálculos de cofatores, obtenha o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

B.7 Encontre o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 18 & 6 & 21 \\ 2 & 8 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores. **Sugestão:** obtenha uma matriz $A = (a_{ij})$ equiparável a M tal que $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$.

B.8 Usando o teorema de Laplace e a regra de Sarrus para os cálculos dos cofatores, obtenha o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 \\ 11 & 10 & 2 & 6 \\ 18 & 15 & 3 & 7 \\ 20 & 15 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. **Sugestão:** obtenha uma matriz $A = (a_{ij})$ equiparável a M tal que $a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

C.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

C.3 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, obtenha o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 3 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

C.4 Qual é o conjunto dos valores reais de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, tal que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 \operatorname{sen} x & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$?

C.5 Para que valores reais de a a equação na variável x $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ 3 & x & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20$ admite duas raízes reais e distintas?

C.6 Sendo M o conjunto de todas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $\det A > 0$ e que a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} formam uma progressão aritmética, nessa ordem, pode-se afirmar que:

a) M é o conjunto vazio.
b) M é um conjunto unitário.
c) M é um conjunto infinito.
d) M é um conjunto finito, não-vazio e não-unitário.
e) todas as afirmações anteriores podem ocorrer, dependendo dos valores de a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}.

C.7 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, sabendo que os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

C.8 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & x & 0 \\ x & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

C.9 Calcule o determinante da matriz A abaixo, através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores: $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 13 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 12 & 5 \\ 3 & 10 & 20 & 5 \end{pmatrix}$. **Sugestão:** para facilitar os cálculos, obtenha uma matriz $B = (b_{ij})$ equiparável a A tal que $b_{11} = 1$; depois obtenha uma matriz $C = (c_{ij})$ equiparável a B tal que $c_{21} = c_{31} = c_{41} = 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) Para que valores de a a equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ terá duas raízes reais e iguais?

a) $a \geqslant 1$ b) $a < 0$ c) $0 \leqslant a \leqslant 1$ d) Só para $a = 0$. e) Só para $a = 1$.

V.2 (Fuvest-SP) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

V.3 (Cescea) Para que $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$, devemos ter:

a) $x > 2$ b) $0 < x < 5$ c) $x < -2$ d) $x > 5$ e) n.r.a.

Capítulo 15

Propriedades dos determinantes – parte 2

P.2 Matrizes transpostas

Se A é uma matriz quadrada, então $\det A = \det A^t$.

A justificativa dessa propriedade baseia-se no seguinte fato: "se A é equiparável a B, então A^t é equiparável a B^t".

Pensemos num caso particular que pode ser facilmente generalizado. Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, existe uma matriz triangular $B = \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & y & p \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ equiparável a A.

Logo, temos que $\det A = \det B = xyz$. **(I)**

Ora, a matriz $B^t = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ m & y & 0 \\ n & p & z \end{pmatrix}$ é equiparável a $A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

Logo, temos que $\det A^t = \det B^t = xyz$. **(II)**

Por (I) e (II), concluímos que $\det A = \det A^t$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, tem-se que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Observe que $\det A = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$ e $\det A^t = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$. Portanto $\det A = \det A^t$.

Nota: a propriedade $\det A = \det A^t$ nos permite concluir que toda propriedade que for verdadeira para linha de um determinante também o será para coluna e reciprocamente.

P.3 Fila nula

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A forem todos iguais a zero, então $\det A = 0$.

A justificativa dessa propriedade pode ser feita pelo teorema de Laplace.

Vejamos um caso particular que pode ser facilmente generalizado:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \\ d & e & f \end{vmatrix}} = \underbrace{0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}} = 0.$$

Desenvolvimento por Laplace
através da segunda linha

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

P.4 Produto de um número por determinante

Multiplicando uma fila de uma matriz quadrada A por um número real k, obtém-se uma nova matriz B tal que $\det B = k \det A$.

Vamos justificar essa propriedade para o caso particular de uma matriz de ordem 3 cuja primeira linha foi multiplicada por k. Isto é, vamos provar que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{D_1} = k \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{D_2}.$$

Desenvolvendo D_1 pelo teorema de Laplace através da fila do fator comum (primeira linha), temos:

$$D_1 = kaA_{11} + kbA_{12} + kcA_{13} = k(aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}).$$

Note que a expressão $aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}$ é o desenvolvimento de D_2 pelo teorema de Laplace através da primeira linha. Logo, $D_1 = kD_2$.

Exemplos

a) $$\begin{vmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Fator comum à
primeira linha
em evidência

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Fator comum à
primeira linha
em evidência

Fator comum à
terceira linha
em evidência

Cuidado! Observe que:

$$k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}, \text{ e que } k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

Isto é:

- para multiplicar um número k por uma matriz, multiplicamos **todos** os elementos da matriz por k;
- para multiplicar um número k pelo determinante de uma matriz, devemos multiplicar por k apenas uma fila.

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcule:

a) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2a & b & 5c \\ 2d & e & 5f \\ 2g & h & 5i \end{vmatrix}$

Resolução

a) Como $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ são determinantes de matrizes transpostas, temos, pela P.2, que eles são iguais. Logo, concluímos que $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 3$.

b)
$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Fator comum à} \\ \textbf{primeira linha}}}{2}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\mathbf{3}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

c)
$$\begin{vmatrix} 2a & b & 5c \\ 2d & e & 5f \\ 2g & h & 5i \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Fator comum à} \\ \textbf{primeira coluna}}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Fator comum à} \\ \textbf{terceira coluna}}}{5}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\mathbf{3}} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30.$$

R.2 Sendo A uma matriz quadrada de ordem dois com det $A = 4$, calcule det $3A$.

Resolução

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Temos que $3A = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$.

Assim, $\det 3A = \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Fator comum à} \\ \textbf{primeira linha}}}{3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Fator comum à} \\ \textbf{segunda linha}}}{3} \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{4} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36.$

P.5 Filas paralelas múltiplas

Se, em uma matriz quadrada A, uma fila é múltipla de outra fila paralela, então $\det A = 0$.

Vamos fazer a justificativa para o caso particular de uma matriz de ordem 3. Porém essa justificativa pode ser generalizada para uma ordem n qualquer.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Note que a segunda linha de A é múltipla da primeira.

Substituindo a segunda linha pela soma dela com a primeira, previamente multiplicada por $-k$, obtém-se a matriz B, equiparável a A: $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Como matrizes equiparáveis têm o mesmo determinante e $\det B = 0$, pois B possui uma fila nula, temos que $\det A = 0$.

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (note que a segunda linha é múltipla da primeira linha).

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$ (note que a terceira coluna é múltipla da primeira coluna).

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$ (note que a terceira linha é múltipla da primeira linha).

P.6 Permutação de filas paralelas

Permutando entre si duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtém-se uma nova matriz B tal que $\det B = -\det A$.

Novamente faremos a justificativa para o caso particular de matrizes de ordem 3. Você poderá, a partir dessa idéia, justificar para uma ordem n qualquer.

Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, existe uma matriz triangular $T = \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & y & p \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ equiparável a A.

Logo $\det A = xyz$. **(I)**

Permutando duas filas paralelas de A (por exemplo, permutando as duas últimas linhas), obtém-se a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Permutando as duas últimas linhas da matriz T, obtém-se a matriz $Q = \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & 0 & z \\ 0 & y & p \end{pmatrix}$ equiparável a B. Como matrizes equiparáveis têm o mesmo determinante, temos $\det B = \det Q$. **(II)**

Note que:

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \text{\textcircled{1}}\ \times \end{array} \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & 0 & z \\ 0 & y & p \end{pmatrix} \approx \begin{array}{r} \\ \text{\textcircled{-1}}\ \times \\ + \end{array} \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & y & p+z \\ 0 & y & p \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x & m & n \\ 0 & y & p+z \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det Q = -xyz$. **(III)**

Por (I), (II) e (III) temos que $\det B = -\det A$.

Exemplos

a) Permutando as linhas da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, obtém-se a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Note que $\det A = 3$ e que $\det B = -3$. Logo, $\det B = -\det A$.

b) Permutando a primeira e a terceira coluna da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, obtém-se a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Note que:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right. = 4 + 4 - 24 - 3 = -19$$

e

$$\det B = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right. = 24 + 3 - 4 - 4 = 19.$$

Logo, $\det B = -\det A$.

P.7 Soma de determinantes

Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem.

Se, excetuando-se os elementos de uma fila r de A, cada um dos demais elementos de A é igual aos seus correspondentes em B e C, e cada elemento dessa fila r é a soma de seus correspondentes em B e C, então:

$$\det A = \det B + \det C.$$

Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} a & x+y & d \\ b & z+w & e \\ c & m+n & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & d \\ b & z & e \\ c & m & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y & d \\ b & w & e \\ c & n & f \end{vmatrix}.$$

Lembre-se de que toda propriedade válida para coluna também vale para linha. Portanto, temos também:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+y & z+w & m+n \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & z & m \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & w & n \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

Para justificar essa propriedade para o caso de determinantes de matrizes de ordem 3, façamos:

$$\begin{vmatrix} a & x+y & d \\ b & z+w & e \\ c & m+n & f \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} a & x & d \\ b & z & e \\ c & m & f \end{vmatrix} = D_1 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & y & d \\ b & w & e \\ c & n & f \end{vmatrix} = D_2.$$

Devemos provar que $D = D_1 + D_2$. Desenvolvendo o determinante D através do teorema de Laplace, pela segunda coluna, temos:

$$D = (x+y)A_{12} + (z+w)A_{22} + (m+n)A_{32}$$

$$\therefore\ D = \underbrace{xA_{12} + zA_{22} + mA_{32}}_{D_1} + \underbrace{yA_{12} + wA_{22} + nA_{32}}_{D_2} = D_1 + D_2.$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 & 3 \\ 5 & 4+0 & 8 \\ 4 & 6+1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Exercício resolvido

R.3 Calcule o valor do determinante $D = \begin{vmatrix} a & b & ka+b \\ c & d & kc+d \\ e & f & ke+f \end{vmatrix}$.

Resolução

Filas múltiplas Filas múltiplas

$$D = \begin{vmatrix} a & b & ka+b \\ c & d & kc+d \\ e & f & ke+f \end{vmatrix} \overset{\text{P.7}}{=} \begin{vmatrix} a & b & ka \\ c & d & kc \\ e & f & ke \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & d \\ e & f & f \end{vmatrix} \overset{\text{P.5}}{=} 0 + 0 = 0.$$

Logo, $D = 0$.

P.8 Propriedade da combinação linear

Para entender a propriedade P.8, precisamos da seguinte definição: "chama-se '**combinação linear** de duas ou mais filas paralelas de uma matriz' a soma de quaisquer múltiplas dessas filas".

Exemplos

a) Uma combinação linear das linhas um e dois da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ é, por exemplo, $5(4\ \ 2\ \ 3) + 3(1\ \ 5\ \ 6) = (23\ \ 25\ \ 33)$.

b) Uma combinação linear das três primeiras colunas da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ é, por exemplo, $2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Propriedade P.8:

> Se uma fila de uma matriz quadrada A é combinação linear de duas ou mais filas paralelas, então $\det A = 0$.

Façamos a justificativa para o caso particular de matriz com ordem 3. Seja a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & ka+qb \\ c & d & kc+qd \\ e & f & ke+qf \end{pmatrix}.$$

Note que a terceira coluna é combinação linear das duas primeiras. Temos que:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & ka+qb \\ c & d & kc+qd \\ e & f & ke+qf \end{vmatrix} \overset{\text{P.7}}{=} \begin{vmatrix} a & b & ka \\ c & d & kc \\ e & f & ke \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & qb \\ c & d & qd \\ e & f & qf \end{vmatrix} \overset{\text{P.5}}{=} 0 + 0 = 0.$$

Filas múltiplas Filas múltiplas

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 0$, pois a última linha é igual à soma da segunda linha com a primeira linha multiplicada por 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois a segunda coluna é igual à soma da primeira coluna com a terceira coluna.

P.9 Teorema de Cauchy

- Se $(a_{r1}\ a_{r2}\ a_{r3}\ ...\ a_{rn})$ é a linha r da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $(A_{s1}\ A_{s2}\ A_{s3}\ ...\ A_{sn})$ são os cofatores dos elementos da linha s $(s \neq r)$ de A, então:

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + a_{r3}A_{s3} + ... + a_{rn}A_{sn} = 0.$$

Como qualquer propriedade válida para linha também vale para coluna do determinante, temos:

- Se $\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ a_{3r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$ é a coluna r da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, e $\begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ A_{3s} \\ \vdots \\ A_{ns} \end{pmatrix}$ são os cofatores dos elementos da coluna s $(s \neq r)$ de A, então $a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + a_{3r}A_{3s} + ... + a_{nr}A_{ns} = 0$.

Em outras palavras, o enunciado do teorema de Cauchy é:

A soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela é igual a zero.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), um dos maiores matemáticos franceses. Escreveu mais de setecentos trabalhos sobre quase todos os ramos da matemática.

Vamos justificar esse teorema para o caso de uma matriz de ordem 3. Seja a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Multiplicando, por exemplo, os elementos da segunda linha pelos cofatores dos elementos correspondentes da primeira linha e somando os produtos, temos:

$$dA_{11} + eA_{12} + fA_{13} = d(-1)^2 \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + e(-1)^3 \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + f(-1)^4 \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$= d(ei - hf) - e(di - gf) + f(dh - ge) =$$

$$= \cancel{dei} - \cancel{dhf} - \cancel{edi} + \cancel{egf} + \cancel{fdh} - \cancel{fge} = 0$$

Exercício resolvido

R.4 Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Chama-se **matriz adjunta de** A, e indica-se por $\overline{A}$, a matriz transposta da matriz dos cofatores de A, isto é, $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Prove que $A\overline{A} = \overline{A}A = (\det A)I_3$.

Resolução

$$A \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

Observe que cada elemento não-pertencente à diagonal principal é igual a zero, pois é a soma dos produtos dos elementos de uma linha de A pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra linha de A. Veja ainda que cada elemento da diagonal principal é igual ao det A. Logo, temos:

$$A \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \therefore\ A \cdot \overline{A} = (\det A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore\ A \cdot \overline{A} = (\det A)I_3.$$

Provemos agora que $\overline{A} \cdot A = (\det A)I_3$:

$$\overline{A} \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} & A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} & A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + A_{32}a_{32} & A_{12}a_{13} + A_{22}a_{23} + A_{32}a_{33} \\ A_{13}a_{11} + A_{23}a_{21} + A_{33}a_{31} & A_{13}a_{12} + A_{23}a_{22} + A_{33}a_{32} & A_{13}a_{13} + A_{23}a_{23} + A_{33}a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe que cada elemento não-pertencente à diagonal principal é igual a zero, pois é a soma dos produtos dos elementos de uma coluna de A pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra coluna de A. Note ainda que cada elemento da diagonal principal é igual ao $\det A$. Logo, temos:

$$A \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \therefore\ A \cdot \overline{A} = (\det A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore\ A \cdot \overline{A} = (\det A)I_3.$$

Nota: a propriedade que acabamos de demonstrar para matrizes de ordem 3 vale para matrizes quadradas de qualquer ordem. Isto é:

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e sendo $\overline{A}$ a matriz adjunta de A, tem-se que:

$$A\overline{A} = \overline{A}A = (\det A)I_n.$$

P.10 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

$$\det AB = \det A \det B.$$

Justificaremos esse teorema apenas para matrizes quadradas de ordem 2. Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, temos que $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Note que:

$$\det AB = (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) =$$
$$= \cancel{aecf} + aedh + bgcf + \cancel{bgdh} - \cancel{ceaf} - cebh - dgaf - \cancel{dgbh} =$$

$$= aedh + bgcf - cebh - dgaf = ad(eh - gf) - cb(eh - gf) =$$
$$= \underbrace{(ad - cb)}_{\det A}\underbrace{(eh - gf)}_{\det B} = \det A \det B.$$

Logo, $\det AB = \det A \det B$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, temos que $\det AB = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$.

Note que $\det A = 2$, $\det B = 5$ e $\det AB = 10$.
Logo, $\det AB = \det A \det B$.

Exercícios resolvidos

R.5 Sabendo que A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e que $\det A = 5$ e $\det AB = 60$, calcule $\det B$.

Resolução

Pelo teorema de Binet, temos que $\det AB = \det A \det B$.
Logo, $60 = 5 \det B \Rightarrow \det B = 12$.

R.6 Sendo A uma matriz quadrada tal que $\det A = 5$, calcule $\det A^2$.

Resolução

$$\det A^2 = \det (A \cdot A) \overset{\textbf{P.10}}{=} \det A \det A = 5 \cdot 5 = 25.$$

R.7 Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Se $\det A = 5$, então calcule $\det B$.

Resolução

$$AB = I_n \Rightarrow \det AB = \det I_n.$$

Pelo teorema de Binet, temos:

$$\det A \det B = \det I_n \ \therefore \ \det A \det B = 1 \ \therefore \ 5 \det B = 1 \Rightarrow \det B = \frac{1}{5}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.9, B.10, B.11, B.12, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.5, B.6, B.7, B.8, B.13, B.14, B.15, B.16, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 8a & 2b & 2c \\ 4d & e & f \\ 4g & h & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 6a & d & g \\ 6b & e & h \\ 6c & f & i \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

B.2 Calcule o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ tal que $a_{ij} = (j + 1)(i - 1)$.

B.3 Qual é o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ tal que $a_{ij} = j(i + 1)$?

B.4 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A = 5$, calcule $\det 2A$.

B.5 Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2$, calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5m & 5n & 5p \\ r & s & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & 3y & 4z \\ m & 3n & 4p \\ r & 3s & 4t \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2x & 10y & 2z \\ m & 5n & p \\ 3r & 15s & 3t \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ m & n & p \\ -r & -s & -t \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -x & -y & z \\ m & n & -p \\ -r & -s & t \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} r & s & t \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} x & 3m & 2r \\ y & 3n & 2s \\ z & 3p & 2t \end{vmatrix}$

B.6 Calcule o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} \log_2 j, & \text{se } i \geqslant j \\ i + j, & \text{se } i < j. \end{cases}$

B.7 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ tal que $a_{ij} = i - \operatorname{sen} \dfrac{\pi j}{2}$, obtenha $\det A$.

B.8 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det A = 2$ e k um número tal que $\det kA = 162$, determine o valor de k.

B.9 Complete a igualdade de modo a torná-la uma sentença verdadeira.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & \ldots \\ 2 & -1 & \ldots \\ 4 & 9 & \ldots \end{vmatrix}$$

B.10 Calcule:

a) $\begin{vmatrix} a & b & 3a + 2b \\ c & d & 3c + 2d \\ e & f & 3e + 2f \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -x & m & r \\ y & n & s \\ z & p & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & m & r \\ -y & n & s \\ -z & p & t \end{vmatrix}$

B.11 A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ é tal que $\det A = 5$. Sendo $\overline{A}$ a matriz adjunta de A, isto é, a transposta da matriz dos cofatores de A, $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, obtenha $A\overline{A}$.

B.12 Sabendo que A e B são matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det A = 2$ e $\det B = 5$, calcule:

a) $\det AB$
b) $\det A^4$
c) $\det A^tB$
d) $\det 4AB$

B.13 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & x-1 & x-2 & 2 \\ 0 & 2-x & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1-x & x-2 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

B.14 Qual é o valor da expressão $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5a & 2e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2d & 5b & 5c \end{vmatrix}$?

B.15 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A = 5$, calcule $\det \overline{A}$, onde $\overline{A}$ é a matriz adjunta de A.

B.16 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e B matrizes quadradas de ordem 3 tais que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre $\det B$.

Exercícios complementares

C.1 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n tal que $\det A = 5$, calcule $\det(-A)$.

C.2 Seja A uma matriz quadrada tal que $\det A = 42$. Multiplicando uma linha de A por 7 e dividindo uma coluna de A por 6, obtém-se uma nova matriz B. Calcule $\det B$.

C.3 Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $k \in \mathbb{R}$, assinale a afirmação verdadeira:

a) $\det kA = k \det A$

b) $\det kA = k^n \det A$

c) $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ tiver uma fila nula.

d) $\det kA = 0 \Leftrightarrow k = 0$

e) $\det kA \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$

C.4 Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 3 e k um número real tais que $\det A^t = 3$, $\det kB = 250$ e $\det AB = 6$, determine k.

C.5 A é uma matriz quadrada de ordem 3, tal que $\det A \neq 0$ e $A^2 - 2A = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 3. Calcule $\det A$.

C.6 A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $\det A = 5$ e $AB = I_n$. Obtenha $\det B$.

C.7 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A = 4$ e sendo $\overline{A}$ a matriz adjunta de A, calcule $\det A\overline{A}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) A e B são matrizes quadradas de mesma ordem 3 e $B = kA$. Sabe-se que $\det A = 1{,}5$ e $\det B^t = 96$. Então:

a) $k = 64$

b) $k = 96$

c) $k = \frac{1}{4}$

d) $k = \frac{3}{2}$

e) $k = 4$

V.2 (FGV-SP) O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 2x + b \\ 1 & y & 2y + b \\ 1 & z & 2z + b \end{bmatrix}$ é igual a:

a) $8xyz$

b) b

c) 0

d) xyz

e) nenhuma das alternativas anteriores.

V.3 (ITA-SP) Seja Q uma matriz 4×4 tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Então:

a) $\det Q = +2$

b) $\det Q = -2$

c) $\det Q = -16$

d) $\det Q = 16$

e) n.r.a.

Capítulo 16

Classificação de um sistema linear

1. Introdução

Um litro de álcool custa 60 centavos e 1 litro de gasolina custa 80 centavos. Se 1 litro de uma mistura de álcool e gasolina custa 75 centavos, quanto de álcool contém 1 litro dessa mistura?

Para resolver esse problema, vamos supor que x e y sejam, respectivamente, as frações de álcool e de gasolina que compõem 1 litro da mistura. Assim, devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 60x + 80y = 75 \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 1 - x & \textbf{(I)} \\ 60x + 80y = 75 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$60x + 80(1 - x) = 75 \quad \therefore \quad 60x + 80 - 80x = 75 \quad \therefore \quad -20x = -5 \quad \therefore \quad x = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Logo, cada litro de mistura contém 0,25 ℓ de álcool.

Recorremos a esse exemplo prático para mostrar o quanto são freqüentes, em nosso dia-a-dia, sistemas de equações do 1º grau, tais como $\begin{cases} x + y = 1 \\ 60x + 80y = 75. \end{cases}$

Para um estudo geral desse tipo de sistema necessitamos de algumas noções preliminares.

2. Equação linear

Toda equação do 1º grau em uma ou mais incógnitas é chamada de **equação linear**.

Exemplos

a) Na equação $3x + 2y = 11$, temos:
- incógnitas: x e y;
- coeficientes: 3 e 2;
- termo independente: 11.

b) Na equação $8x - y + 3z = -1$, temos:
- incógnitas: x, y e z;
- coeficientes: 8, -1 e 3;
- termo independente: -1.

Por extensão de conceito, admitimos também como lineares as equações:

$$0x + 0y + 0z = 0; \; 0x + 0y + 0t + 0z = 3.$$

De modo geral, temos:

Definição

Chama-se "**equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" toda equação que pode ser apresentada sob a forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são constantes reais chamadas de "**coeficientes** da equação" e b é uma constante real chamada de "**termo independente** da equação".

Note que, por exemplo:

- $3x^2 + y = 5$ não é equação linear, pois é do 2º grau em relação a x;
- $\frac{1}{x} + y = 3$ não é equação linear, pois o expoente de x é -1, isto é, $x^{-1} + y = 3$.

2.1. Solução de uma equação linear

Chama-se "**solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$" toda ênupla (seqüência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Nota: se não existe tal ênupla, dizemos que a equação é impossível.

Exemplos

a) Uma solução da equação linear $3x + 2y = 11$ é o par ordenado $(1, 4)$, pois a sentença $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$ é verdadeira.

Convenção: a menos que se especifique o contrário, apresentamos cada solução de uma equação linear obedecendo à ordem alfabética das variáveis, isto é, (x, y), (x, y, z), (a, b, c), etc.

b) Uma solução da equação linear $8x - y + 3z = -1$ é o terno ordenado $(0, 4, 1)$, pois a sentença $8 \cdot 0 - 4 + 3 \cdot 1 = -1$ é verdadeira.

c) A equação $0x + 0y = 3$ é impossível, isto é, não possui solução.

2.2. Equação linear homogênea

É toda equação linear cujo termo independente é igual a zero.

Exemplos

a) $3x + 2y = 0$
b) $5x + y + 3z = 0$

Toda equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ admite como solução a ênupla $(0, 0, 0, ..., 0)$, chamada de "**solução trivial** da equação homogênea".

Exemplos

a) A solução trivial da equação $3x + 2y = 0$ é $(0, 0)$.
b) A solução trivial da equação $5x + y + 3z = 0$ é $(0, 0, 0)$.

3. Sistema linear

Considere um conjunto de equações lineares simultâneas, nas mesmas incógnitas x, y e z. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ \phantom{2x + {}} y + 5z = 9 \\ x - y + z = -1. \end{cases}$$

A segunda equação deve ser entendida como $0x + y + 5z = 9$. Tal conjunto é chamado de **sistema linear**.

De modo geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas ($m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$) é um conjunto de equações simultâneas da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

onde:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes;
- b_i são os termos independentes.

4. Solução de um sistema linear

Chama-se "**solução** de um sistema linear" toda solução comum a todas as equações do sistema. **Nota:** essa solução pode não existir.

Exemplo

Uma solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ y + 5z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$ é o terno ordenado (2, 4, 1), pois tal seqüência é solução comum a todas as equações do sistema, isto é, todas as sentenças

$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 4 + 3 \cdot 1 = 11 \\ 0 \cdot 2 + 4 + 5 \cdot 1 = 9 \\ 2 - 4 + 1 = -1 \end{cases}$ são verdadeiras.

Exercícios resolvidos

R.1 Verificar se o terno ordenado (1, 2, 4) é solução da equação $3x + y - 2z = -3$.

Resolução

Fazendo $x = 1$, $y = 2$ e $z = 4$, temos $3 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 4 = -3$, que é uma sentença verdadeira. Logo, o terno (1, 2, 4) é solução da equação.

R.2 Verificar se a quadra ordenada $(x, y, t, z) = (1, 2, -1, 3)$ é solução da equação $3x + y - t + 2z = 1$.

Resolução

Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $t = -1$ e $z = 3$, temos $3 \cdot 1 + 2 - (-1) + 2 \cdot 3 = 1$, que é uma sentença falsa. Logo, a quadra $(1, 2, -1, 3)$ não é solução da equação.

R.3 Quantas soluções admite a equação $2x + y = 5$?

Resolução

Para cada valor atribuído a x, obtemos um valor y tal que o par (x, y) é solução da equação. Por exemplo:

- para $x = 1$ temos $2 \cdot 1 + y = 5 \therefore y = 3$; logo, (1, 3) é solução da equação;
- para $x = -2$ temos $2(-2) + y = 5 \therefore y = 9$; logo, $(-2, 9)$ é solução da equação.

Assim, percebemos que a equação admite infinitas soluções.

R.4 Verificar se o terno (2, 1, 3) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + y - 3z = -6. \end{cases}$

Resolução

Fazendo, em todas as equações, $x = 2$, $y = 1$ e $z = 3$, temos $\begin{cases} 2 + 2 \cdot 1 + 3 = 7 \\ 2 \cdot 2 - 1 \quad + 3 = 6 \\ 2 + 1 - 3 \cdot 3 = -6. \end{cases}$

Como todas as igualdades são sentenças verdadeiras, temos que o terno (2, 1, 3) é solução do sistema.

R.5 Verificar se o par (−1, 3) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2. \end{cases}$

Resolução

Fazendo, nas duas equações, $x = -1$ e $y = 3$, temos $\begin{cases} -1 + 2 \cdot 3 = 5 & \textbf{(I)} \\ 3(-1) + 3 = 2. & \textbf{(II)} \end{cases}$

Como a sentença (II) é falsa, temos que o par (−1, 3) não é solução do sistema.

5. Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tiver: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Sistema possível e determinado (SPD)

É todo sistema linear que admite uma única solução.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

é um sistema linear que admite como única solução o par (3, 2). Por isso, é classificado como SPD (sistema possível e determinado).

Sistema possível e indeterminado (SPI)

É todo sistema linear que admite mais de uma solução. **Nota:** Prova-se que, se um sistema linear admite mais de uma solução, então admite infinitas soluções.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

é um sistema linear que admite mais de uma solução: (2, 1); (0, 5); (4, −3); ...; etc. Por isso é classificado como SPI (sistema possível e indeterminado).

Sistema impossível (SI)

É todo sistema linear que não admite solução alguma.

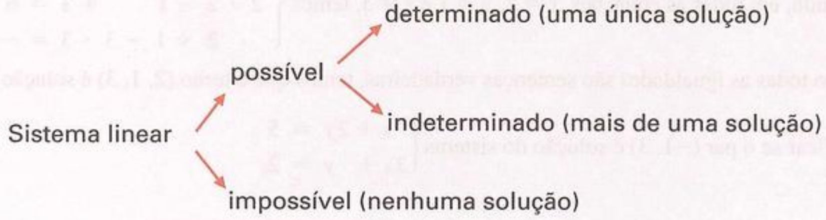
Exemplo

Observe o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Existem dois números x e y tais que sua soma seja igual a 5 e ao mesmo tempo igual a 8? Claro que não. Por isso esse sistema não tem solução e é classificado como SI (sistema impossível).

Resumo


Sistema linear
possível
determinado (uma única solução)
indeterminado (mais de uma solução)
impossível (nenhuma solução)

Exercícios resolvidos

R.6 Classificar cada um dos sistemas seguintes como SPD (sistema possível e determinado), SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema impossível).

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ d) $\{x + 2y = 4$

Resolução

a) $\begin{cases} x + y = 3 & \textbf{(I)} \\ y = 2 & \textbf{(II)} \end{cases}$

A equação (II) nos diz que o valor de y é 2. Substituindo $y = 2$ em (I), temos $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$.
Obtivemos, assim, como única solução do sistema o par (1, 2).
Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} x + y = 5 & \textbf{(I)} \\ 0x + 0y = 3 & \textbf{(II)} \end{cases}$

A equação (II) não tem solução. Logo, não existe solução comum às duas equações do sistema. Por isso o sistema é impossível (SI).

c) $\begin{cases} x + y = 1 & \textbf{(I)} \\ 2x + 2y = 2 & \textbf{(II)} \end{cases}$

O sistema tem mais de uma solução: (1, 0), (0, 1), (2, −1), etc. Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

d) $\{x + 2y = 4$

O sistema tem mais de uma solução: (4, 0), (0, 2), (2, 1), etc. Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.6, B.8, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, B.7, B.9, C.1, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Qual dos seguintes ternos ordenados é solução da equação $2x + 2y - z = 1$?

a) (1, 1, 1) b) (2, 0, 1) c) (−1, 1, 1) d) (−1, 1, −1) e) (0, 0, 1)

B.2 Dentre as seguintes quíntuplas ordenadas, qual é a solução da equação $2a + b + 3c - d + e = 2$?

a) (1, 1, 1, 5, 1) c) (1, −2, 1, 3, 2) e) (0, 0, 0, 0, 4)
b) (0, 1, 0, 1, 1) d) (1, −1, 1, −1, 1)

B.3 Determine o valor de β sabendo que a equação linear $x + y + z = 6$ admite como solução o terno ordenado (α, β, γ) e que α, β e γ formam, nessa ordem, uma P.A.

B.4 Qual das alternativas seguintes apresenta uma solução do sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$?

a) (8, 1, 0) b) (10, −1, 0) c) (1, 2, 3) d) (9, 0, 0) e) (1, 1, 1)

B.5 Qual dos ternos seguintes não é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$?

a) (−3, 2, 0) b) (−7, 3, 1) c) (−11, 4, 2) d) (1, 1, −1) e) (3, −1, 0)

B.6 Classifique cada um dos sistemas seguintes como SPD (sistema possível e determinado), SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema impossível):

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$

B.7 Qual dos sistemas seguintes é impossível?

a) $\{x + y + z = 8$

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

B.8 Sabendo que o sistema, nas incógnitas x e y, $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ay = 5 \end{cases}$ é impossível, obtenha o valor de a.

B.9 Para que valores reais de a o seguinte sistema, nas incógnitas x e y, é impossível?

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 0x + 0y = a. \end{cases}$$

Exercícios complementares

C.1 Determine o valor de a, sabendo que a equação linear $x + 2y + z = a$, nas incógnitas x, y e z, admite uma solução da forma $(\alpha, 2, \beta)$ e que α, 2 e β formam, nessa ordem, uma P.A.

C.2 Obtenha o valor de a de modo que a equação linear $(a^2 - 1)x = a - 1$, na variável x, seja impossível.

C.3 Prove que, "se (α, β) é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$ então (α, β) também é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ kdx + key = kf, \end{cases}$ com $k \in \mathbb{R}^*$".

C.4 Prove que, "se (α, β) é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$ então (α, β) também é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ (a + d)x + (b + e)y = c + f \end{cases}$".

C.5 Prove que, "se (α, β) é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$ então (α, β) também é solução do sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} ax + by = c \\ (ka + d)x + (kb + e)y = kc + f, \end{cases}$ com $k \in \mathbb{R}^*$".

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) Se (α, β, γ) e (2α, 2β, 2γ) são soluções de um sistema linear possível e determinado, então:

a) $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 2$
b) $\alpha = \beta = \gamma = 0$
c) $\beta = 2\alpha$ e $\gamma = 2\beta$
d) $\alpha = \beta = \gamma = 1$
e) nada se pode concluir.

V.2 (UFCE) Se o sistema nas incógnitas x, y, z $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$

com todos os coeficientes a_i, b_i, c_i diferentes de zero, tem solução única, então:

a) cada equação que compõe o sistema terá, necessariamente, solução única.
b) somente duas das equações terão, cada uma, solução única.
c) somente uma das equações terá solução única.
d) nenhuma das equações terá solução única.

V.3 (FGV-SP) Em relação ao sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y = 5, \end{cases}$ pode-se afirmar que:

a) é um sistema impossível.
b) é um sistema possível e determinado.
c) se (α, β, γ) é uma solução do sistema, então α, β e γ não formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.
d) (8, 1, 0) é solução do sistema.
e) (1, 5, 3) é a única solução do sistema.

Capítulo 17

Resolução de um sistema linear por escalonamento

1. Conceituação

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, denominado "**conjunto solução** do sistema", cujos elementos são todas as soluções do sistema.

Estudaremos dois métodos para a resolução de um sistema linear: o método do **escalonamento** e o método de **Cramer**.

2. Sistema linear escalonado

Um sistema linear é dito "escalonado" (ou "na forma escalonada") se, e somente se:

- todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;
- em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não-nulo;
- existe uma ordem para as equações tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplos

Os seguintes sistemas lineares são **escalonados**:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 9 \\ 0x + 4y + z = 5 \\ 0x + 0y + 3z = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 4t - 2z = 1 \\ 0x + 4y + 5t + z = 2 \\ 0x + 0y + 0t + 4z = 12; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 0x + 5y = 1. \end{cases}$

Vejamos dois exemplos de **sistemas não-escalonados**:

a) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 1 \\ 0x + 5y - z = 3 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

Esse sistema não é escalonado, pois o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação não aumenta da segunda para a terceira equação.

b) $\begin{cases} 6x + y + 3z = 6 \\ 0x + 4y - 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases}$

Esse sistema não é escalonado, pois a última equação apresenta todos os coeficientes nulos.

3. Resolução de um sistema linear escalonado

Existem apenas dois tipos de sistema linear escalonado, conforme veremos a seguir.

3.1. Primeiro tipo: número de equações igual ao número de incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 & \textbf{(I)} \\ \phantom{3x+{}} 5y - 2z = 1 & \textbf{(II)} \\ \phantom{3x+5y-{}} 3z = 6 & \textbf{(III)} \end{cases}$$

é um sistema linear escalonado com três equações e três incógnitas.

Para resolver esse tipo de sistema, determinamos o valor de z na equação (III): $3z = 6 \Rightarrow z = 2$. A seguir, substituímos $z = 2$ na equação (II): $5y - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow y = 1$. Finalmente, substituímos $y = 1$ e $z = 2$ na equação (I): $3x + 2 \cdot 1 + 2 = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 1, 2\right)\right\}$.

Propriedade

Todo sistema linear **escalonado do primeiro tipo** é possível e determinado (SPD).

3.2. Segundo tipo: número de equações menor que o número de incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \phantom{x+2{}} y + 5z = 3 \end{cases}$$

é um sistema linear escalonado com duas equações e três incógnitas.

Todo sistema linear escalonado do **segundo tipo** admite pelo menos uma variável denominada **variável livre** ou **variável arbitrária** do sistema. É variável livre toda aquela que **não aparece no início** de nenhuma equação do sistema escalonado. No exemplo anterior, temos z como variável livre.

A variável livre, como o próprio nome indica, pode assumir qualquer valor real. Para cada valor assumido por ela, obtém-se uma solução para o sistema. No exemplo anterior, se fizermos:

- $z = 2$, teremos $\begin{cases} x + 2y - 3 \cdot 2 = 1 & \textbf{(I)} \\ y + 5 \cdot 2 = 3 \Rightarrow y = -7; & \textbf{(II)} \end{cases}$

substituindo (II) em (I): $x + 2(-7) - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = 21$; assim, para $z = 2$ temos a solução $(21, -7, 2)$;

- $z = 0$, teremos $\begin{cases} x + 2y - 3 \cdot 0 = 1 & \textbf{(I)} \\ y + 5 \cdot 0 = 3 \Rightarrow y = 3; & \textbf{(II)} \end{cases}$

substituindo (II) em (I): $x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x = -5$; assim, para $z = 0$ temos a solução $(-5, 3, 0)$.

Perceba, portanto, que o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + 5z = 3 \end{cases}$ possui infinitas soluções. Para obter a expressão geral de todas essas soluções, basta encontrarmos os valores de x e y em função de z, isto é:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & \textbf{(I)} \\ \phantom{x+2{}} y + 5z = 3 \Rightarrow y = 3 - 5z. & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$$x + 2(3 - 5z) - 3z = 1 \Rightarrow x + 6 - 10z - 3z = 1 \quad \therefore \quad x = 13z - 5.$$

Assim, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(13z - 5, 3 - 5z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Notas

1. Chama-se "**grau de indeterminação** de um sistema escalonado do segundo tipo" o número de variáveis livres do sistema. Isto é, o número de variáveis que não aparecem no início de nenhuma equação do sistema. No exemplo anterior, o grau de indeterminação do sistema é 1.

2. A escolha de variável livre como sendo "toda aquela que não inicia nenhuma equação do sistema" é puramente convencional. Na verdade, no sistema do exemplo anterior poderíamos ter escolhido y como variável livre e, nesse caso, o conjunto solução apresentaria a forma:

$$S = \left\{\left(\frac{14 - 13y}{5}, y, \frac{3 - y}{5}\right), y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Poderíamos ainda ter escolhido x como variável livre; então teríamos o conjunto solução:

$$S = \left\{\left(x, \frac{14 - 5x}{13}, \frac{5 + x}{13}\right), x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Propriedade

Todo sistema linear **escalonado do segundo tipo** é possível e indeterminado (SPI).

Exercícios resolvidos

R.1 Classificar e resolver o sistema linear $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ y + 3z = 8 \\ 5z = 5. \end{cases}$

Resolução

O sistema está na forma escalonada e é do primeiro tipo (número de equações igual ao número de incógnitas). Portanto é um sistema possível e determinado (SPD).

Para resolvê-lo, determinamos o valor de z na última equação: $5z = 5 \Rightarrow z = 1$.

A seguir, substituímos $z = 1$ na segunda equação: $y + 3 \cdot 1 = 8 \Rightarrow y = 5$.

Finalmente, substituímos $y = 5$ e $z = 1$ na primeira equação: $4x + 2 \cdot 5 - 1 = 1 \Rightarrow x = -2$.

Temos, então, um sistema possível e determinado (SPD) e $S = \{(-2, 5, 1)\}$.

R.2 Classificar e resolver o sistema linear nas incógnitas a, b, c e d: $\begin{cases} a + 2b - c + d = 1 \\ b + c - d = 2. \end{cases}$

Resolução

O sistema está na forma escalonada e é do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas). Portanto é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Note que existem duas variáveis que não iniciam nenhuma das equações do sistema: c e d. Portanto o sistema possui duas variáveis livres, c e d; por isso dizemos que o grau de indeterminação do sistema é 2.

Resolvendo, em função de c e d, temos: $\begin{cases} a + 2b - c + d = 1 \quad \text{(I)} \\ b + c - d = 2 \Rightarrow b = 2 - c + d. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$a + 2(2 - c + d) - c + d = 1 \quad \therefore \quad a + 4 - 2c + 2d - c + d = 1 \quad \therefore \quad a = 3c - 3d - 3.$$

Temos então: $S = \{(3c - 3d - 3, 2 - c + d, c, d), \{c, d\} \subset \mathbb{R}\}$.

R.3 Determinar as soluções (α, β, γ) do sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \phantom{x+{}} y - z = 5 \end{cases}$ tais que $\beta\gamma = 14$.

Resolução

O sistema linear está na forma escalonada e é do segundo tipo. Portanto é um sistema possível e indeterminado (SPI). Resolvendo, em função da variável livre z, temos: $\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textbf{(I)} \\ \phantom{x+{}} y - z = 5 \Rightarrow y = 5 + z. & \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I): $x + 5 + z + 2z = 1 \Rightarrow x = -4 - 3z$.
Assim, todas as soluções do sistema são da forma: $(-4 - 3z, 5 + z, z), z \in \mathbb{R}$.
O problema pede as soluções (α, β, γ) tais que $\beta\gamma = 14$.
Portanto devemos ter: $(5 + z)z = 14 \Rightarrow z^2 + 5z - 14 = 0$.
Nessa equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) \Rightarrow \Delta = 81 \quad \therefore \quad z = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 9}{2} \Rightarrow z = 2 \text{ ou } z = -7.$$

Substituindo $z = 2$ em $(-4 - 3z, 5 + z, z)$, temos $(-10, 7, 2)$.
Substituindo $z = -7$ em $(-4 - 3z, 5 + z, z)$, temos $(17, -2, -7)$.
Logo, as soluções pedidas são $(-10, 7, 2)$ e $(17, -2, -7)$.

4. Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares A e A' são equivalentes se, e somente se, tiverem o mesmo conjunto solução. Indicamos que A e A' são equivalentes por $A \sim A'$.

Exemplo

Os sistemas $A\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e $A'\begin{cases} x + y = 5 \\ \phantom{x+{}} y = 2 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos têm como conjunto solução: $S = \{(3, 2)\}$.

Propriedades

Sendo A, A' e A'' sistemas lineares, tem-se:

I. $A \sim A$ (**propriedade reflexiva**);
II. Se $A \sim A'$, então $A' \sim A$ (**propriedade simétrica**);
III. Se $A \sim A'$ e $A' \sim A''$, então $A \sim A''$ (**propriedade transitiva**).

5. Escalonamento de um sistema linear

Observe o seguinte sistema: $A\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16. \end{cases}$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por -3, teremos o sistema equivalente:

$$A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16. \end{cases}$$

Substituindo, no sistema A', a segunda equação pela soma dela com a primeira, teremos o sistema equivalente $A''\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ y = 1. \end{cases}$ Note que $A'' \sim A$ e que A'' está na forma escalonada.

Vamos estudar uma técnica para transformar um sistema linear possível num outro equivalente na forma escalonada. Essa técnica é fundamentada nos três teoremas que veremos a seguir.

Teorema

> Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear A, obtém-se um novo sistema A' equivalente a A.

Exemplo

$$A\begin{cases} 3x + 7y = 16 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \sim A'\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Permutamos entre si as equações do sistema A, obtendo o sistema A'.

Teorema

> Multiplicando (ou dividindo) uma equação de um sistema linear A por uma constante k, $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema A' equivalente a A.

Exemplo

$$A\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases} \sim A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Multiplicamos por -3 a primeira equação do sistema A, obtendo o sistema A'.

Teorema

> Substituindo uma equação de um sistema linear A pela soma dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema A' equivalente a A.

Exemplo

$$A\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases} \sim A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ y = 1 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação do sistema A pela soma dela com a primeira, obtendo assim o sistema A'.

Conjugando esses três teoremas, podemos escalonar qualquer sistema linear possível e, se o sistema for impossível, a tentativa do escalonamento mostrará essa impossibilidade.

Exemplo

Para escalonar o sistema $A\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & \text{(I)} \\ 2x + y + z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 3y + z = 10 & \text{(III)} \end{cases}$

vamos, inicialmente, conseguir os zeros necessários nos coeficientes de x. Para isso:

- substituímos a equação (II) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por -2;
- e substituímos a equação (III) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por -3:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \xrightarrow{\times} \textcircled{-2} \quad \xrightarrow{\times} \textcircled{-3} \\ 2x + y + z = 4 \xleftarrow{+} \textcircled{-2} \\ 3x + 3y + z = 10 \xleftarrow{+} \textcircled{-3} \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -11. \end{cases}$$

Nota: os produtos da equação (I) por -2 e por -3 podem ser feitos mentalmente. Não é necessário escrevê-los efetivamente.

- No sistema anterior, substituímos a última equação pela soma dela com a segunda multiplicada por -1:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \xrightarrow{\times} \textcircled{-1} \\ 0x - 3y - 8z = -11 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x + 0y - 3z = -1. \end{cases}$$

Chegamos assim a um sistema **escalonado** equivalente ao sistema A.

Notas

1. Se durante o escalonamento do sistema do exemplo anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = b$, com $b \neq 0$, então o sistema seria **impossível**, pois tal equação **não** é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).

2. Se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = 0$, então **eliminaríamos** essa equação e o novo sistema assim obtido também seria equivalente ao sistema original.

Exercícios resolvidos

R.4 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 4x - 2y + z = 8 \\ 5x - y + 2z = 10. \end{cases}$

Resolução

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \xrightarrow{\times} \textcircled{-4} \quad \overset{\times}{\curvearrowright} \textcircled{-5} \\ 4x - 2y + z = 8 \xleftarrow{+} \\ 5x - y + 2z = 10 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 0x - 6y - 7z = -8 \xrightarrow{\times} \textcircled{-1} \\ 0x - 6y - 8z = -10 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ 0x - 6y - 7z = -8 \\ 0x + 0y - z = -2. \end{cases}$$

Chegamos então ao sistema escalonado $\begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \quad \textbf{(I)} \\ \quad - 6y - 7z = -8 \quad \textbf{(II)} \\ \qquad\quad -z = -2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$

Como o sistema escalonado é do primeiro tipo (número de equações igual ao número de incógnitas), temos que sua classificação é SPD (sistema possível e determinado).
Resolvendo esse sistema, temos:

- da equação (III): $-z = -2 \Rightarrow z = 2$;
- substituindo $z = 2$ na equação (II): $-6y - 7 \cdot 2 = -8 \Rightarrow y = -1$;
- substituindo $y = -1$ e $z = 2$ na equação (I): $x + 2(-1) + 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x = 2$.

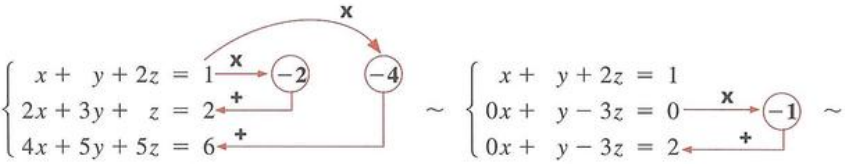
Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, -1, 2)\}$.

R.5 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 4x + 5y + 5z = 6. \end{cases}$

Resolução

O escalonamento fica facilitado quando o coeficiente de x da primeira equação é 1. Como isso não acontece nesse sistema, mas o coeficiente de x da segunda equação é 1, podemos permutar as duas primeiras equações, obtendo um novo sistema, equivalente ao original, isto é: $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 4x + 5y + 5z = 6. \end{cases}$

Escalonando, temos:



$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 4x + 5y + 5z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \\ 0x + y - 3z = 2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 2. \end{cases}$$

Note que **não** conseguimos um sistema escalonado, pois os coeficientes da última equação são todos nulos; porém a tentativa do escalonamento nos mostrou que o sistema é **impossível**, já que a última equação não é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).

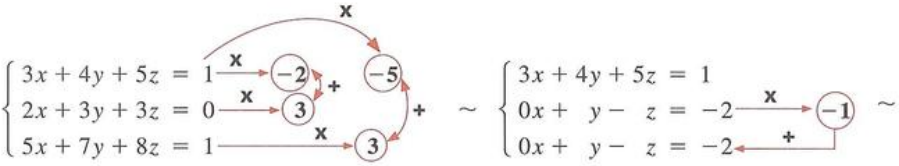
Portanto, a classificação do sistema é SI e $S = \varnothing$.

R.6 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1. \end{cases}$

Resolução

- Substituímos a segunda equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -2;
- substituímos a terceira equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -5.

Nota: façamos tais produtos mentalmente, evitando assim muitas passagens. Isto é:



$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0. \end{cases}$$

Eliminando-se a última equação, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ \qquad\quad y - z = -2 \end{cases}$$

Como esse sistema escalonado é do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas), sua classificação é SPI (sistema possível e indeterminado).

Resolvendo em função da variável livre z, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \quad \textbf{(I)} \\ \qquad\quad y - z = -2 \Rightarrow y = z - 2. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$$3x + 4(z - 2) + 5z = 1 \therefore 3x + 4z - 8 + 5z = 1 \therefore x = \frac{9 - 9z}{3} = 3 - 3z.$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(3 - 3z, z - 2, z), z \in \mathbb{R}\}$.

R.7 Escalonar, classificar e resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + y = -4. \end{cases}$

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \xrightarrow{\times} \textcircled{-3} \quad \overset{\times}{\frown} \quad \textcircled{-2} \\ 3x + 7y = 5 \xleftarrow{+} \\ 2x + y = -4 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \xrightarrow{\times} \textcircled{3} \\ 0x - 3y = -6 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

Eliminando a última equação do sistema anterior, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao original:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Tal sistema escalonado é do primeiro tipo (número de equações igual ao número de incógnitas). Portanto sua classificação é SPD (sistema possível e determinado). Resolvendo-o, obtemos o conjunto solução $S = \{(-3, 2)\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1 (a, d), C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.1 (b, c), C.2, C.3, C.5, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ 4y + 5z = 19 \\ 2z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$

B.2 Resolva e classifique cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2a - b + c + 3d = 0 \\ 5b + 2c - d = 9 \\ c + d = 4 \\ 5d = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + y - 8z = 1 \\ 4y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ y - 6z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ b + 2c - d = 1 \end{cases}$

B.3 Determine as soluções (α, β, γ) do sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ tais que $\alpha\beta = 2\gamma$.

B.4 Obtenha as soluções (α, β, γ) do sistema $\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 \\ y - 2z = 6 \end{cases}$ tais que $\alpha\gamma = -16$.

B.5 Escalone, classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x - y + 3z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 7y - 11z = 6 \\ x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

Sugestão: no item (c), para facilitar o escalonamento, permute as duas primeiras equações.

B.6 Resolva, por escalonamento, cada um dos sistemas, classificando-os como SPD, SPI ou SI:

✓ a) $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 5z = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Exercícios complementares

C.1 Escalone, classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} a + 2b + c + 3d = 6 \\ 2a - b + 3c + d = 3 \\ 3a + b + 2c - d = -3 \\ 4a + 3b + 3c + d = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a + 2b - c + d = 1 \\ 2a + 5b - c + 5d = 4 \\ 3a + 6b - 2c + 2d = 3 \\ a + 3b + c + 3d = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + 3b - 2c + d = 2 \\ 3a + b + 3c - d = 8 \\ 2a - 2b + c + 2d = 6 \\ a - 5b + 3c + d = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ 5x + 7y + 3z = 15 \\ 3x + 5y - 4z = 4 \end{cases}$

C.2 Resolva, por escalonamento, cada um dos seguintes sistemas, classificando-os como SPD, SPI ou SI:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 4z = 11 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 7x + 2y - 5z = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \\ 5x + 4y + 13z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 9x - 4y + 5z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ z - y = -2 \\ x - z = -1 \end{cases}$

C.3 Resolver o sistema **não**-linear $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c} = 9 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 8 \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 7. \end{cases}$

Sugestão: faça as seguintes mudanças de variáveis: $\dfrac{1}{a} = x$; $\dfrac{1}{b} = y$ e $\dfrac{1}{c} = z$.

C.4 Escalone, classifique e dê o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 5y = 17 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

C.5 Qual é a classificação e o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas?

a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - y = 2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = 2 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

C.6 Um tipo de alimento é composto por açúcar, milho e extrato de malte. A quantidade de milho dessa composição é o quádruplo da quantidade de açúcar. Sabendo que o preço por quilograma do açúcar, do milho e do extrato de malte são respectivamente 80, 60 e 40 centavos e que o preço, por quilograma, daquele alimento composto por esses ingredientes é 55 centavos, calcule a quantidade de açúcar que compõe 1 kg daquele alimento.

C.7 Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados os jogadores que marcaram doze, treze ou catorze gols cada um, durante todo o campeonato. Qual foi o número de atletas premiados, sabendo que o total de gols marcados por eles é 115 e que somente cinco atletas marcaram mais de doze gols cada um?

C.8 Durante as investigações de um assalto a banco, foi chamado a depor o gerente do estabelecimento. A testemunha declarou ao delegado que de um dos cofres foram roubados: um pacote vermelho, dois azuis e cinco brancos, totalizando 150 mil dólares; do outro cofre foram roubados: um pacote azul e três brancos, totalizando 70 mil dólares. O declarante afirmou ainda que pacotes da mesma cor tinham quantidades iguais de dinheiro e que cada pacote vermelho tinha mil dólares a mais do que cada pacote branco.
O delegado, após ouvir atentamente a testemunha, pôs-se a fazer contas. Poucos minutos depois olhou nos olhos do declarante e acusou:
– O senhor está mentindo.
A testemunha tentou ainda reafirmar sua estória, mas foi totalmente desmentida pelo delegado com argumentos irrefutáveis. Analisando essa cena cinematográfica, prove que o gerente mentiu em seu depoimento.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Se $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ \phantom{x + {}} 4y + 5z = 23 \\ \phantom{x + 4y + {}} 6z = 18 \end{cases}$ então x é igual a:

a) 27 b) 3 c) 0 d) −2 e) 1

V.2 (Mackenzie-SP) O valor de x tal que $\begin{cases} 2x - y + 4z = 14 \\ x - 3y + 2z = 7 \\ 3x + y - z = 7 \end{cases}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

V.3 (Cesgranrio) O número de soluções do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ é:

a) maior que 3. b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

V.4 (ITA-SP) Examinando o sistema $\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ podemos concluir que:

a) o sistema é determinado.
b) o sistema é indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias.
c) o sistema é indeterminado, com uma incógnita arbitrária.
d) o sistema é impossível.
e) n.d.a.

Capítulo 18

Resolução de um sistema linear através de determinantes

1. Teorema de Cramer

O teorema de Cramer resolve, sob certa condição, sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Para resolver sistemas lineares, o método do escalonamento é mais prático e mais geral do que o de Cramer, porém há um detalhe no método de Cramer que nos auxiliará muito nas discussões de sistemas lineares. Por causa desse detalhe, vale a pena conhecer esse método.

Considere o seguinte sistema linear com três equações e três incógnitas:

$$M\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Considere também os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

que é chamado de "**determinante dos coeficientes** de *M*",

$$D_x = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix} \quad \text{e}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

Note que:

- D_x é obtido substituindo-se, em D, a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes;
- D_y é obtido substituindo-se, em D, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes;
- D_z é obtido substituindo-se, em D, a coluna dos coeficientes de z pela coluna dos termos independentes.

Gabriel Cramer (1704-1752) demonstrou, por volta de 1750, que "o sistema M é possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$ e que a solução é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D}; \qquad y = \frac{D_y}{D}; \qquad z = \frac{D_z}{D}\text{"}.$$

O método de Cramer pode ser aplicado para qualquer sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, desde que o determinante D, que é o determinante dos coeficientes, seja diferente de zero.

Vamos justificar o teorema de Cramer para o caso particular de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. A justificativa para o caso geral com n equações e n incógnitas é análoga.

Dado o sistema linear: $M\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$

consideremos a matriz A, dos coeficientes de M: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, e a matriz $\overline{A}$, adjunta de A, isto é,

$\overline{A}$ é a matriz transposta da matriz dos cofatores de A: $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Consideremos ainda os determinantes:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} \\ \boxed{b_2} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ e } D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & \boxed{b_2} \end{vmatrix}.$$

Escrevendo o sistema M sob a forma matricial, temos: $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $\overline{A}$ (à esquerda de cada membro) temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\overline{A}}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\overline{A}}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Pelo exercício resolvido R.4 do capítulo 15, temos que $\overline{A}A = (\det A)I_2$:

$$(\det A)I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Como $I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é igual a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, temos:

$$(\det A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (\det A)x \\ (\det A)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, temos: $(\det A)x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2$ e $(\det A)y = A_{12}b_1 + A_{22}b_2$.

Cada uma dessas equações será possível e determinada se, e somente se, $\det A \neq 0$. Sob essa condição, concluímos que:

$$x = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} \\ \boxed{b_2} & a_{21} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{D_x}{D} \quad \text{e}$$

$$y = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & \boxed{b_2} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{D_y}{D}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver o seguinte sistema pelo método de Cramer: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ y + z = 1. \end{cases}$

Resolução

O sistema apresenta três equações e três incógnitas: x, y e z. Como a primeira equação não apresenta a incógnita z, completamos essa equação somando $0z$ ao primeiro membro. Analogamente somamos $0x$ ao primeiro membro da última equação. Isto é: $\begin{cases} x + 2y + 0z = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ 0x + y + z = 1. \end{cases}$

O determinante dos coeficientes é: $D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = -1 - 3 - 4 = -8.$

Como $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD). Os determinantes D_x, D_y e D_z são:

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -5 + 6 - 15 + 6 = -8,$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = -3 - 3 - 10 = -16 \quad \text{e}$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = -1 + 10 + 3 - 4 = 8.$$

Temos então:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-16}{-8} = 2 \quad \text{e} \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{-8} = -1.$$

Logo, $S = \{(1, 2, -1)\}$.

Nota: a solução do sistema poderia ser encontrada apenas com os valores D e D_x:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Substituindo $x = 1$ na primeira equação do sistema, temos: $1 + 2y = 5 \Rightarrow y = 2$.

Substituindo $y = 2$ na última equação do sistema, temos: $2 + z = 1 \Rightarrow z = -1$.

R.2 Determinar a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z seja possível e determinado.

$$A \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ ax + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Resolução

Pelo teorema de Cramer, o sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero. Isto é:

$$A \text{ é SPD} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\therefore\; \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right. \neq 0$$

$$\therefore 8 + a + 3 - 6a + 2 + 2 \neq 0 \;\therefore\; -5a + 15 \neq 0 \;\therefore\; a \neq 3.$$

Logo, A é SPD $\Leftrightarrow a \neq 3$.

R.3 Seja A um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas. O que se pode concluir sobre a classificação de tal sistema se o determinante D, dos coeficientes de A, for igual a zero?

Resolução

Pelo teorema de Cramer, temos que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPD.}$$

Isto é, a condição necessária e suficiente para que A seja SPD é que $D \neq 0$. Assim sendo, se $D = 0$ podemos concluir que o sistema A **não** é possível e determinado. Ficamos então com duas alternativas:

$$D = 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPI ou } A \text{ é SI.}$$

2. Sistema linear homogêneo

Sistema linear homogêneo é todo sistema linear formado exclusivamente por equações lineares homogêneas, isto é, equações com termo independente igual a zero.

Exemplos

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \\ 6x - 2y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5a + 2b - c + d = 0 \\ a - 3b + 2c - d = 0 \end{cases}$

2.1. Solução trivial de um sistema linear homogêneo

Observe que, se atribuirmos o valor 0 (zero) a cada variável do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \\ 6x - 2y + z = 0, \end{cases} \quad \text{obtemos as sentenças } \textbf{verdadeiras} \quad \begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \\ 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Concluímos então que o terno (0, 0, 0) é uma solução desse sistema. Esse terno é chamado de "**solução trivial** do sistema homogêneo".

Propriedade

> Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de "**solução trivial** do sistema".

Notas

1. Pela propriedade anterior temos que um sistema linear homogêneo é sempre possível.
2. A **solução trivial** pode ser também denominada **solução nula** ou **solução imprópria do sistema linear homogêneo.**

Exemplos

a) A solução trivial do sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ é (0, 0).

b) A solução trivial do sistema $\begin{cases} 5a + 2b - c + d = 0 \\ a - 3b + 2c - d = 0 \end{cases}$ é (0, 0, 0, 0).

2.2. Sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas

Observe o seguinte sistema linear homogêneo: $A \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0. \end{cases}$

Certamente esse sistema é possível, pois admite a solução trivial (0, 0, 0). Será que o sistema admite outras soluções, além da trivial?

Para responder tal pergunta, poderíamos escaloná-lo; mas também podemos obter a resposta pelo teorema de Cramer. Observe.

Sendo D o determinante dos coeficientes do sistema A, temos:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPD} \quad \textbf{(nesse caso haverá somente a solução trivial)}$$

ou

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ é SPI} \quad \textbf{(nesse caso haverá outras soluções, além da trivial)} \\ \text{ou} \\ \xcancel{A \text{ é SI}} \quad \text{(nunca } \textbf{ocorrerá, pois o sistema homogêneo é sempre possível).} \end{cases}$$

Calculando D, temos:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right. = -3 + 24 - 2 - 3 - 4 - 12 = 0.$$

Como $D = 0$ e A é um sistema linear homogêneo, concluímos que A é um sistema possível e indeterminado (SPI); portanto há outras soluções, além da trivial.

Propriedade

Sendo A um **sistema linear homogêneo**, com n equações e n incógnitas, cujo determinante dos coeficientes é D, tem-se que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPD } (A \text{ admite apenas a solução trivial})$$

ou

$$D = 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPI } (A \text{ admite outras soluções, além da trivial}).$$

Exemplos

a) No sistema $A \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

temos:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right. = -2 - 1 - 3 - 1 = -7.$$

Como $D \neq 0$, temos que A é SPD, portanto admite apenas a solução trivial (0, 0, 0).

b) No sistema $B \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 4(-1) = 0.$$

Como $D = 0$, temos que B é SPI; portanto admite outras soluções, além da trivial (0, 0). Algumas dessas outras soluções são (1, 2), (2, 4), (3, 6), etc.

Nota: em um sistema linear homogêneo, as soluções diferentes da trivial são chamadas de **soluções próprias**. No exemplo (b), as soluções próprias são aquelas diferentes da trivial (0, 0), isto é, (1, 2), (2, 4), (3, 6), etc.

Exercícios resolvidos

R.4 Classificar cada um dos sistemas lineares homogêneos:

a) $A \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

b) $B \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

Resolução

Como os sistemas homogêneos têm número de equações igual ao número de incógnitas, podemos classificá-los através do teorema de Cramer:

a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10. \quad D \neq 0 \Rightarrow A \text{ é SPD.}$

b) $D = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} = -1 + 6 - 8 - 4 + 3 + 4 = 0. \quad D = 0 \Rightarrow B \text{ é SPI.}$

R.5 Determinar m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema nas variáveis x, y e z:

$$A \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ mx - y + 4z = 0 \\ 5x + y + 7z = 0 \end{cases} \quad \text{admita soluções diferentes da trivial.}$$

Resolução

Para que um sistema homogêneo admita outras soluções, diferentes da trivial, deve ser um sistema possível e indeterminado (SPI). Para que o sistema homogêneo A seja possível e indeterminado, basta impormos a condição $D = 0$, onde D é o determinante dos coeficientes de A. Isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ -7 - m + 60 - 5 - 4 - 21m = 0 \ \therefore\ -22m + 44 = 0 \ \therefore\ m = 2.$

Logo, $m = 2$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, C.1, C.3, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, C.2, C.4, C.5, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Resolva os sistemas seguintes pelo método de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ 4y - z = 1 \end{cases}$

B.2 Dê o conjunto solução de cada um dos sistemas, resolvendo-os pelo método de Cramer:

a) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + y - z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$

B.3 Determine a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z seja possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + ay - z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

B.4 Obtenha m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z seja possível e determinado.

$$\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ mx - y + z = 0 \\ x + 10y + 5z = 3 \end{cases}$$

B.5 Classifique os sistemas lineares homogêneos como SPD ou SPI:

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

B.6 Qual é a classificação do sistema, SPD ou SPI?

$$\begin{cases} x + 2y - t + z = 0 \\ 2x - y + 3t + z = 0 \\ 3x + y + t - z = 0 \\ 4x - 2y + 5t - z = 0 \end{cases}$$

B.7 Para que valor de m, $m \in \mathbb{R}$, o sistema abaixo nas variáveis x, y e z admite apenas a solução trivial?

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ mx - y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

B.8 Determine a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ ax - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Exercícios complementares

C.1 Dado o sistema nas variáveis x e y: $\begin{cases} ax + 2y = 7a \\ 2x + y = 6 + 2a, \end{cases}$

a) determine a, $a \in \mathbb{R}$, para que o sistema seja possível e determinado;

b) se o sistema é possível e determinado, encontre os valores de x e y em função de a.

C.2 Considere o sistema nas variáveis x e y: $\begin{cases} 2x + y = 3a \\ x - y = 3. \end{cases}$

a) Obtenha a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema seja possível e determinado.

b) Se o sistema é possível e determinado, encontre os valores de x e y em função de a.

C.3 Determine m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z seja possível e determinado.

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ mx + 3y - z = 2 \\ mx + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

C.4 Encontre o valor de k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x e y admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} x + 2y = kx \\ 3x + 2y = ky \end{cases}$$

C.5 Resolva o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 8y + 3z = 0. \end{cases}$

Sugestão: o determinante D, dos coeficientes, é igual a zero; portanto o sistema é possível e indeterminado; para resolvê-lo, escalone-o.

C.6 Numa prova bimestral, um teste com cinco alternativas pedia o conjunto solução de um sistema linear homogêneo cujo determinante D, dos coeficientes, era igual a zero. As alternativas eram:

a) $S = \left\{\left(2z, \frac{z}{3}, z + 1\right), z \in \mathbb{R}\right\}$

b) $S = \{(z - 3, 2z, 3z), z \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \left\{\left(3z, \frac{z}{3}, \frac{z}{5}\right), z \in \mathbb{R}\right\}$

d) $S = \{(0, 0, 0)\}$

e) $S = \{(5z, z + 4, z), z \in \mathbb{R}\}$

Qual é a alternativa correta para esse teste?

C.7 Determine a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que exista mais de uma matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) Resolver o seguinte sistema, nas incógnitas x e y: $\begin{cases} x \cos a - y \operatorname{sen} a = -\operatorname{sen} a \\ x \operatorname{sen} a + y \cos a = \cos a. \end{cases}$

V.2 (Alfenas-MG) O sistema, nas variáveis x e y, $\begin{cases} ax + 5y = 5 \\ bx + y = 0 \end{cases}$ terá solução única se:

a) $a = 5b$　b) $a + 5b = 0$　c) $a - 5b \neq 0$　d) $5ab = 0$　e) $5ab \neq 0$

V.3 (Fuvest-SP) A equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admite mais de uma solução se, e somente se, λ é igual a:

a) 0　b) $\pm\sqrt{3}$　c) ± 3　d) $\pm\sqrt{6}$　e) $\pm\sqrt{11}$

V.4 (Cesgranrio) O valor de λ para que o sistema $\begin{cases} x + y - \lambda z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ x + (1 + \lambda)y + z = 0 \end{cases}$ admita soluções (x, y, z) distintas de $(0, 0, 0)$ é:

a) 2　b) 1　c) 0　d) -1　e) -2

Capítulo 19

Discussão de um sistema linear

1. Conceituação

Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ mx + 4y = 1. \end{cases}$$

Observe que, além das incógnitas x e y, o sistema apresenta uma variável m. Tal variável é chamada de "**parâmetro** do sistema".

Discutir esse sistema em função do parâmetro m significa classificá-lo como SPD, SPI ou SI para cada valor real assumido por m.

Por uma questão puramente didática, vamos separar o estudo das discussões de sistemas lineares em dois casos.

1.1. Primeiro caso: sistemas lineares cujo número de equações é igual ao número de incógnitas

A discussão de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas pode ser feita com o teorema de Cramer auxiliado pelo método do escalonamento.

Como exemplo, vamos discutir o seguinte sistema:

$$A \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ mx + 4y = 1 \end{cases}$$

segundo os valores do parâmetro real m.

Sendo D o determinante dos coeficientes do sistema, temos, pelo teorema de Cramer, que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPD.}$$

Impomos então a condição $D \neq 0$, garantindo assim que A seja SPD. Isto é:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 12 - 2m \neq 0 \ \therefore m \neq 6.$$

Temos então que $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD.

Por outro lado, note que para $m = 6$ temos $D = 0$ e nesse caso ficamos entre duas alternativas: ou A é SPI ou A é SI.

Para descobrir qual das duas alternativas ocorre, basta substituir $m = 6$ em A e escalonar o sistema. Ou seja:

$$m = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 & \overset{\times}{\longrightarrow} \textcircled{-2} \\ 6x + 4y = 1 & \overset{+}{\longleftarrow} \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 0x + 0y = -3. \end{cases}$$

Observe, portanto, que para $m = 6$ o sistema é impossível. Concluímos então que:

$m \neq 6 \Rightarrow$ SPD;
$m = 6 \Rightarrow$ SI.

Exercícios resolvidos

R.1 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y segundo os valores do parâmetro real m.

$$\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ 3x + my = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix}$. Impondo que $D \neq 0$, temos, pelo teorema de Cramer, que o sistema é possível e determinado: $\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 \neq 0 \therefore m \neq 3$ e $m \neq -3$.

Logo, $m \neq 3$ e $m \neq -3 \Rightarrow$ SPD.

Observemos que para $m = 3$ ou $m = -3$ temos $D = 0$, o que significa que o sistema é **possível e indeterminado** ou **impossível** para cada um desses dois valores de m.

- Substituindo $m = 3$ no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 & \overset{\times}{\longrightarrow} \textcircled{-1} \\ 3x + 3y = 1 & \overset{+}{\longleftarrow} \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim \{3x + 3y = 1 \ \textbf{(SPI)}.$$

Logo, $m = 3 \Rightarrow$ SPI.

- Substituindo $m = -3$ no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 1 & \overset{\times}{\longrightarrow} \textcircled{1} \\ 3x - 3y = 1 & \overset{+}{\longleftarrow} \end{cases} \sim \begin{cases} -3x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \textbf{(SI)}.$$

Logo, $m = -3 \Rightarrow$ SI.

Resumindo:
$m \neq 3$ e $m \neq -3 \Rightarrow$ SPD,
$m = 3 \Rightarrow$ SPI,
$m = -3 \Rightarrow$ SI.

R.2 Discutir o sistema abaixo nas variáveis x, y e z em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ ax - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

Impondo que $D \neq 0$, temos, pelo teorema de Cramer, que o sistema é possível e determinado:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ a & -3 & 4 & a & -3 \end{array}\right. \neq 0 \Leftrightarrow -4 + 6a + 6 - a + 9 - 16 \neq 0 \therefore a \neq 1.$$

Logo, $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD.

Para descobrir a classificação do sistema para $a = 1$, basta substituir $a = 1$ no sistema, escalonando-o:

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 & \times(-2) \quad \times(-1) \\ 2x - y + 3z = 2 & + \\ x - 3y + 4z = 0 & + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 5z = 0 & \times(-1) \\ 0x - 5y + 5z = -1 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 5z = 0 \quad \textbf{(SI).} \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Logo, $a = 1 \Rightarrow$ SI.

Resumindo: $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD,
$a = 1 \Rightarrow$ SI.

R.3 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix}$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 2a \neq 0 \therefore a \neq 2.$$

Logo, $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD.
Para obter a classificação do sistema para $a = 2$, substituímos $a = 2$ no sistema, escalonando-o:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & \times(-2) \\ 2x + 4y = b & + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = b - 6. \end{cases}$$

Observe que:
- se $b - 6 \neq 0$, então o sistema é impossível;
- se $b - 6 = 0$, então o sistema é possível e indeterminado.

Logo, temos: $a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI, $a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI.

Resumindo: $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD,
$a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI,
$a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI.

1.2. Segundo caso: sistemas lineares cujo número de equações é diferente do número de incógnitas

Vamos discutir sistemas lineares com número de equações diferente do número de incógnitas através do escalonamento. Não poderemos usar, nesse caso, o determinante dos coeficientes do sistema, pois a matriz dos coeficientes não será quadrada e, portanto, não existirá o determinante.

Como exemplo, vamos discutir o seguinte sistema em função do parâmetro real m:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y+mz=1 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y+mz=1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times} \textcircled{-2} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 0x+0y+(m+2)z=-1. \end{cases}$$

Note que:

- se $m+2=0$, então o sistema é impossível;
- se $m+2\neq 0$, então o sistema é possível e indeterminado, pois é um sistema escalonado do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas).

Resumindo, temos:

$$\begin{array}{l} m=-2 \Rightarrow \text{SI}, \\ m\neq -2 \Rightarrow \text{SPI}. \end{array}$$

Exercícios resolvidos

R.4 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+5y=13 \\ 2x+3y=m \end{cases}$$

Resolução

Vamos mostrar dois modos diferentes para se discutir esse sistema.

Primeiro modo

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+5y=13 \\ 2x+3y=m \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times} \textcircled{-3} \quad \xrightarrow{\times} \textcircled{-2} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim \begin{cases} x+2y=5 \\ 0x-y=-2 \\ 0x-y=m-10 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{\times} \textcircled{-1} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+2y=5 \\ 0x-y=-2 \\ 0x+0y=m-8. \end{cases}$$

Note que:

- se $m-8\neq 0$, então o sistema é impossível;

- se $m - 8 = 0$, então o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -2, \end{cases} \quad \text{que é possível e determinado.}$$

Resumindo: $\begin{array}{l} m \neq 8 \Rightarrow \text{SI}, \\ m = 8 \Rightarrow \text{SPD}. \end{array}$

Segundo modo

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 5 \xrightarrow{\times} \textcircled{-3} \\ 3x + 5y = 13 \xleftarrow{+} \end{array}\right. \sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 2.$$

Se a solução (1, 2) também for solução da última equação, então o sistema será possível e determinado; caso contrário, será impossível, pois não existirá uma solução comum às três equações.
Substituindo $x = 1$ e $y = 2$ na terceira equação, temos $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = m \Rightarrow m = 8$.

Resumindo: $\begin{array}{l} m = 8 \Rightarrow \text{SPD}, \\ m \neq 8 \Rightarrow \text{SI}. \end{array}$

R.5 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x + by - 9z = 6 \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = a \xrightarrow{\times} \textcircled{-3} \\ 3x + by - 9z = 6 \xleftarrow{+} \end{array}\right. \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 0x + (b - 6)y + 0z = 6 - 3a \end{cases}$$

Note que:

- se $b - 6 \neq 0$, temos um sistema escalonado do 2º tipo (número de equações menor que o número de incógnitas) e, portanto, é possível e indeterminado;
- se $b - 6 = 0$ e $6 - 3a \neq 0$, então o sistema é impossível;
- se $b - 6 = 0$ e $6 - 3a = 0$, então o sistema é equivalente a:

$$\{x + 2y - 3z = a, \quad \text{que é possível e indeterminado.}$$

Resumindo: $\begin{array}{l} b \neq 6 \Rightarrow \text{SPI}, \\ b = 6 \text{ e } a \neq 2 \Rightarrow \text{SI}, \\ b = 6 \text{ e } a = 2 \Rightarrow \text{SPI}. \end{array}$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.6, B.8, B.10, B.11, C.1, C.2, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.7, B.9, B.12, B.13, C.4, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ mx + 6y = 1 \end{cases}$$

B.2 Discuta, em função do parâmetro real m, o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} mx - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7. \end{cases}$$

B.3 Faça a discussão, segundo os valores reais de m, do sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + y = -3. \end{cases}$$

B.4 Classifique o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z como SPD, SPI ou SI, para cada valor real do parâmetro m.

$$\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ mx - 2y + z = 1 \end{cases}$$

B.5 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - 2y = b \end{cases}$$

B.6 Discuta, segundo os valores reais de a e b, o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ 2x + 2ay + 2z = 2 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

B.7 Apresente a discussão do sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ ax + 4y - z = b \end{cases}$$

B.8 No sistema abaixo, de incógnitas x, y e z, o parâmetro k pode assumir qualquer valor real. Faça a discussão em função de k.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ kx + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

B.9 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real k.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ kx + 5y + z = 0 \\ -2x - ky - 2z = 0 \end{cases}$$

B.10 Classifique o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z como SPD, SPI ou SI, para cada valor real do parâmetro m.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5x - 10y + mz = 1 \end{cases}$$

B.11 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -5 \\ 3x + y = a \end{cases}$$

B.12 Faça a discussão do sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 2x - y + mz = 1 \\ 8x - 4y + 4z = 7 \end{cases}$$

B.13 No sistema abaixo de incógnitas x e y o parâmetro k pode assumir qualquer valor real. Discuta o sistema em função de k.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \\ x + 5y = k \end{cases}$$

Exercícios complementares

C.1 As incógnitas do sistema abaixo são x e y. Discuta esse sistema em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = a \end{cases}$$

C.2 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 3y = m \end{cases}$$

C.3 Faça a discussão do sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 3x - y = mx \\ 4x + 3y = 5my \end{cases}$$

C.4 Seja m um parâmetro real no sistema de incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 3y - z = my \\ 4x + y + z = mx \\ 4x + 3y = 0. \end{cases}$$

Classifique esse sistema como SPD, SPI ou SI, para cada valor de m.

C.5 Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + by - 2z = 6. \end{cases}$$

C.6 Segundo os valores reais dos parâmetros a e b, discuta o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ 3x + 2ay + 3az = 15. \end{cases}$$

C.7 Apresente a discussão do sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax - 4y = 0 \\ 3x + ay = 8 \end{cases}$$

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) O sistema $\begin{cases} ax - by = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

a) é impossível se $a = 12$ e $b \neq -30$.

b) é possível e determinado se $a = 12$ e $b = -30$.

c) é impossível se $a \neq 12$ e $b \neq -30$.

d) é determinado se $a = -2$ e $b = 5$.

e) é indeterminado se $a = 12$ e $b = -30$.

V.2 (UDF) Determine os valores dos parâmetros m e n, de tal modo que o sistema seguinte seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = m \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + ny - 6z = 1. \end{cases}$$

a) $m = 1$ e $n = -1$.

b) $m \neq -3$ e $n = 1$.

c) $m = 3$ e $n = 4$.

d) $m = -3$ e $n \neq 1$.

V.3 (FGV-SP) Seja S o sistema de equações simultâneas $\begin{cases} x + y + z = k \\ x - y - z = k \\ x + y - z = k, \end{cases}$ onde k é uma constante real.

Então:

a) S possui uma solução somente para $k = 0$.

b) S possui infinitas soluções se $k \neq 0$.

c) S possui solução única, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

d) S não possui solução, qualquer que seja k real.

e) Se $x = y$, então $z = -k$ para qualquer valor real de k.

V.4 (Fuvest-SP) O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para:

a) todo m real.

b) nenhum m real.

c) $m = 1$.

d) $m = -1$.

e) $m = 0$.

Capítulo 20

Matrizes inversas

1. Matriz inversível

Definição

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se, e somente se, existir uma matriz B tal que:

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

As matrizes A e B são chamadas de "**inversas** entre si", e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lê-se "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lê-se "A é igual à inversa de B").

Exemplo

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Logo, $B = A^{-1}$ ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Teorema

Se uma matriz quadrada A de ordem n é inversível, então a matriz B tal que $AB = BA = I_n$ é única.

Para justificarmos esse teorema, suponhamos a existência de duas matrizes B e C tais que:

$$AB = BA = I_n \text{ e } AC = CA = I_n.$$

Temos que:

$$B = \underbrace{I_n}B = \underbrace{(CA)}B = C\underbrace{(AB)} = C\underbrace{I_n} = C.$$

Como $B = C$, concluímos que existe uma só matriz B tal que: $AB = BA = I_n$.

Nota: com esse teorema, provamos que, se a matriz A admite inversa, então a inversa é única.

Teorema

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Demonstração

Primeira parte: se A é inversível, então $\det A \neq 0$.

Sendo A inversível, então existe a matriz quadrada A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Logo, temos $\det (A \cdot A^{-1}) = \det (A^{-1} \cdot A) = \det I_n$.

Pelo teorema de Binet e pelo fato de $\det I_n = 1$, temos que $\det A \det A^{-1} = \det A^{-1} \det A = 1$.

Concluímos então que $\det A \neq 0$ (pois caso contrário, isto é, se $\det A = 0$, teríamos $\det A \det A^{-1} = 0$).

Segunda parte: se $\det A \neq 0$ então A é inversível.

No exercício resolvido R.4 do capítulo 15, vimos que:
Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e sendo $\overline{A}$ a matriz adjunta de A (isto é, $\overline{A}$ é a transposta da matriz dos cofatores de A), temos que $A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = (\det A)I_n$.

Assim sendo, se $\det A \neq 0$, podemos concluir que:

$$A\left(\frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}\right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}\right) A = I_n.$$

Logo, se $\det A \neq 0$, então existe a matriz $B = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$ tal que $AB = BA = I_n$.

Assim, concluímos: A é inversível; e sua inversa é $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$.

Nota: a segunda parte da demonstração anterior mostra um método para o cálculo da inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ é inversível.

Resolução
A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Calculando $\det A$, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 = 3.$$

Como $\det A \neq 0$, temos que A é inversível.

R.2 Verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ é inversível.

Resolução

A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Calculando $\det A$, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 5 \end{array}\right. = 10 + 4 - 20 - 4 - 10 + 20 = 0.$$

Como $\det A = 0$, temos que A não é inversível.

R.3 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ seja inversível.

Resolução

A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Logo, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 & x & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right. \neq 0 \Leftrightarrow 1 + 24 - 5x + 4 - 15 - 2x \neq 0$$

$$\therefore -7x + 14 \neq 0 \therefore x \neq 2.$$

Logo, A é inversível para todo x real, $x \neq 2$.

2. Cálculo da matriz inversa

O cálculo da inversa de uma matriz quadrada A, com $\det A \neq 0$, pode ser feito pelo teorema:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$$

ou também através do teorema seguinte.

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n e $AB = I_n$, então A e B são inversíveis e $B = A^{-1}$ ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Demonstração

Devemos demonstrar que:

- primeira parte: $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$;
- segunda parte: $B = A^{-1}$, ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Primeira parte: $AB = I_n \Rightarrow \det AB = \det I_n$.

Pelo teorema de Binet e pelo fato de $\det I_n = 1$, temos $\det A \det B = 1$.

Logo, $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$. Portanto A e B são inversíveis.

Segunda parte: temos por hipótese que $AB = I_n$.

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por A^{-1} (à esquerda de cada membro), temos que:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot I_n \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)B = A^{-1} \cdot I_n \therefore I_n \cdot B = A^{-1} \cdot I_n \therefore B = A^{-1}.$$

Concluímos então que A e B são matrizes inversas entre si.

Exercícios resolvidos

R.4 Verificar se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ são inversas.

Resolução

Calculando AB temos $AB = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Como A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e $AB = I_2$, concluímos, pelo teorema anterior, que $B = A^{-1}$ ou, ainda, que $A = B^{-1}$.

Nota: lembre-se de que a definição de matrizes inversas diz que duas matrizes quadradas A e B de ordem n são inversas se, e somente se, $AB = BA = I_n$; perceba, portanto, que o teorema anterior reduz à metade o tempo gasto para a verificação se A e B são inversas, pois basta calcularmos um dos produtos AB ou BA.

R.5 Determinar, caso exista, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução

Calculando $\det A$, temos $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 2$.

Como $\det A \neq 0$, temos que existe A^{-1}. A matriz A^{-1} tem a mesma ordem de A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Assim, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} a+3b & 2b \\ c+3d & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a + 3b = 1 \ \textbf{(I)} \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \ \textbf{(II)} \\ c + 3d = 0 \ \textbf{(III)} \\ 2d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2}. \ \textbf{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos $a + 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow a = 1$.

Substituindo (IV) em (III), temos $c + 3 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$.

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

R.6 Determinar, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolução

Calculando $\det A$, temos: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right| = 6 + 1 - 1 - 4 = 2.$

Como $\det A \neq 0$, temos que existe A^{-1}.
Se fôssemos aplicar o método do exercício R.5 para o cálculo da inversa de A, cairíamos num sistema linear com nove equações e nove incógnitas. Por isso nesse caso vamos aplicar o teorema:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}.$$

Em primeiro lugar vamos obter a matriz dos cofatores de A, que indicamos por $\operatorname{cof} A$:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Logo, $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz $\overline{A}$, adjunta de A, é a transposta da matriz $\operatorname{cof} A$. Isto é:

$$\overline{A} = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$, temos que: $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

R.7 Provar que, "se A é uma matriz inversível, então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$".

Resolução

Temos que $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Logo, $\det (A \cdot A^{-1}) = \det I_n$.

Pelo teorema de Binet e pelo fato de $\det I_n = 1$, temos que $\det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

R.8 A é uma matriz quadrada tal que $\det A \neq 0$. X, B e C são matrizes tais que $AX + B = C$. Determinar a matriz X em função de A, B e C.

Resolução

Temos que $AX + B = C$. Somando $-B$ a ambos os membros da igualdade, temos:

$$AX + B + (-B) = C + (-B) \ \therefore \ AX + 0 = C - B \text{ (onde 0 é matriz nula)} \ \therefore \ AX = C - B.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por A^{-1} (à esquerda de cada membro), temos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \ \therefore \ (A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B) \ \therefore \ IX = A^{-1}(C - B).$$

Logo, $X = A^{-1}(C - B)$.

R.9 A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$. Provar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Resolução

Devemos provar que a matriz $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB. Para isso, basta provar que $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = I_n$.
De fato, temos que:

$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,\underbrace{(BB^{-1})}\,A^{-1} = A\,\underbrace{I_n} \cdot A^{-1} = \underbrace{(A \cdot I_n)}\,A^{-1} = \underbrace{A}\,A^{-1} = I_n.$$

Logo, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (c.q.d.)

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.7, B.9, B.11, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.8, B.10, B.12, B.13, C.2, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Usando a definição de matrizes inversas, examine se as matrizes A e B são inversas entre si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

B.2 As matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si?

B.3 Verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são inversas entre si.

B.4 A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é inversível ou não?

B.5 Verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ é inversível.

B.6 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ seja inversível.

B.7 Para que valores reais de x, a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é inversível?

B.8 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & x \end{pmatrix}$ seja inversível.

B.9 Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

B.10 Obtenha, caso exista, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

B.11 Usando a identidade $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$, encontre, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

B.12 Qual é a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

B.13 Prove que, "se A e B são matrizes inversíveis, então a matriz AB é inversível".

Exercícios complementares

C.1 Sendo A uma matriz quadrada tal que $\det A = 5$, calcule $\det A^{-1}$. **Sugestão:** exercício resolvido R.7.

C.2 Dado que A é uma matriz inversível tal que $\det A = x + 2$ e $\det A^{-1} = x - \dfrac{2}{3}$, obtenha x.

C.3 A é uma matriz inversível; X, B e C são matrizes tais que $XA + B = C$. Determine X em função de A, B e C.

C.4 A e B são matrizes inversíveis; X e C são matrizes tais que $(AB)X - C = 0$, onde 0 é matriz nula. Determine X em função de A, B e C. **Sugestão:** a inversa da matriz AB é $B^{-1}A^{-1}$.

C.5 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & x \end{pmatrix}$ seja inversível.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Sendo A e B matrizes inversíveis de mesma ordem e X uma matriz tal que $(XA)^t = B$, então:

a) $X = A^{-1}B^t$

b) $X = B^tA^{-1}$

c) $X = (BA)^t$

d) $X = (AB)^t$

e) nenhuma das respostas anteriores está correta.

Sugestão: a transposta da transposta de uma matriz M é igual à própria matriz M; isto é, $(M^t)^t = M$.

V.2 (UFMG) Os valores reais de x para os quais a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

não admite inversa são:

a) $x = 3$ ou $x = -2$.

b) $x = 0$ ou $x = 4$.

c) $x = 3$ ou $x = -1$.

d) $x = 2$ ou $x = 1$.

e) $x = 1$ ou $x = 7$.

V.3 (Fuvest-SP) A matriz $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se:

a) $\theta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

b) $\theta \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c) $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

d) $\theta \neq \dfrac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

e) $\theta \in \mathbb{R}$

Capítulo 21

Análise combinatória – métodos de contagem

1. Introdução

10... 9... 8... 7... 6... 5... 4... 3... 2... 1... 0... fogo!

Você já percebeu o quanto é necessário contar em nosso dia-a-dia? Contamos os dias que faltam para as férias, as páginas de um livro, os habitantes de uma região, etc.

Há, entretanto, algumas quantidades que gostaríamos de contar, mas nos deparamos com certas dificuldades. Quantas placas de automóvel podem ser confeccionadas com as 26 letras e os dez algarismos disponíveis? Quantos números de telefone podem ser formados? Quantas pessoas assistiram ao *show* de *rock* na praça?

Esse e muitos outros problemas nós vamos estudar agora, na análise combinatória, cuja principal finalidade é estabelecer métodos de contagem.

2. Princípio fundamental de contagem

Consideremos o seguinte problema: lançando simultaneamente um dado e uma moeda, quantos são os possíveis resultados?

Para efetuar a contagem, vamos apresentar os possíveis resultados no dado, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, e os possíveis resultados na moeda, C (cara) e K (coroa), conforme disposição ao lado:

Moeda Dado	C	K
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Vamos agora construir a matriz formada por todos os pares (x, y), onde x é um dos resultados no dado e y é um dos resultados na moeda:

$$\begin{array}{c|c}
\overset{\text{Moeda}}{\text{Dado}} & \begin{matrix} C & \qquad K \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (1, C) & (1, K) \\ (2, C) & (2, K) \\ (3, C) & (3, K) \\ (4, C) & (4, K) \\ (5, C) & (5, K) \\ (6, C) & (6, K) \end{bmatrix}
\end{array}$$

Note que a tabela assim construída apresenta todos os possíveis resultados do experimento. Assim, o número de elementos dessa matriz é igual ao número de resultados possíveis do experimento. Como a matriz possui seis linhas por duas colunas, temos que o número de elementos que a compõem é:

$$\underbrace{6}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis na moeda}}} = 12.$$

Consideremos, agora, um outro problema: lançando-se um dado, uma moeda e retirando-se uma etiqueta de uma urna que contém quatro etiquetas de cores diferentes, azul (A), vermelha (V), preta (P) e branca (B), quantos são os possíveis resultados?

Observe que temos um experimento composto de três experimentos: lançar o dado, lançar a moeda e retirar uma etiqueta da urna. Será possível construir a matriz das possibilidades, isto é, a tabela formada por todos os possíveis resultados?

É perfeitamente possível, bastando para isso associarmos os dois primeiros experimentos e apresentarmos os resultados conforme disposição a seguir:

Etiqueta Dado e moeda	A	V	P	B
1, C				
1, K				
2, C				
2, K				
3, C				
3, K				
4, C				
4, K				
5, C				
5, K				
6, C				
6, K				

Construindo a matriz formada por todos os ternos (x, y, z), onde x é um resultado no dado, y é um resultado na moeda e z é uma das etiquetas, temos:

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{r}\text{Etiqueta}\\ \text{Dado e moeda}\end{array} & \begin{array}{cccc} \quad A \quad & \quad V \quad & \quad P \quad & \quad B \quad \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 1, C \\ 1, K \\ 2, C \\ 2, K \\ 3, C \\ 3, K \\ 4, C \\ 4, K \\ 5, C \\ 5, K \\ 6, C \\ 6, K \end{array} &
\begin{bmatrix}
(1, C, A) & (1, C, V) & (1, C, P) & (1, C, B) \\
(1, K, A) & (1, K, V) & (1, K, P) & (1, K, B) \\
(2, C, A) & (2, C, V) & (2, C, P) & (2, C, B) \\
(2, K, A) & (2, K, V) & (2, K, P) & (2, K, B) \\
(3, C, A) & (3, C, V) & (3, C, P) & (3, C, B) \\
(3, K, A) & (3, K, V) & (3, K, P) & (3, K, B) \\
(4, C, A) & (4, C, V) & (4, C, P) & (4, C, B) \\
(4, K, A) & (4, K, V) & (4, K, P) & (4, K, B) \\
(5, C, A) & (5, C, V) & (5, C, P) & (5, C, B) \\
(5, K, A) & (5, K, V) & (5, K, P) & (5, K, B) \\
(6, C, A) & (6, C, V) & (6, C, P) & (6, C, B) \\
(6, K, A) & (6, K, V) & (6, K, P) & (6, K, B)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Como essa matriz apresenta doze linhas por quatro colunas, temos que o número possível de resultados do experimento é $12 \cdot 4 = 48$, ou seja:

$$\underbrace{6}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis na moeda}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis na urna}}} = 48.$$

Tendo como motivação os dois exemplos anteriores, vamos enunciar o seguinte princípio, conhecido por **princípio fundamental de contagem**:

> Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta k resultados distintos, então o experimento composto de A e B, nessa ordem, apresenta nk resultados distintos.

Justificativa

Apresentemos os n resultados possíveis do experimento A, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, e os k resultados possíveis do experimento B, $b_1, b_2, b_3, ..., b_k$, conforme a disposição a seguir:

$$\begin{array}{c|ccccc}
{}_{A}\diagdown^{B} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_k \\
\hline
a_1 & & & & & \\
a_2 & & & & & \\
a_3 & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
a_n & & & & &
\end{array}$$

Construindo a matriz formada por todos os pares (a_i, b_j), com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq k$, temos:

$$\begin{array}{c|c}
{}_{A}\diagdown^{B} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_k \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{array} & \begin{bmatrix}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \cdots & (a_1, b_k) \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \cdots & (a_2, b_k) \\
(a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \cdots & (a_3, b_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(a_n, b_1) & (a_n, b_2) & (a_n, b_3) & \cdots & (a_n, b_k)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Essa matriz apresenta todos os possíveis resultados do experimento composto de A e B, nessa ordem. Como a matriz possui n linhas por k colunas, o número de resultados do experimento é nk.

3. Generalização do princípio fundamental de contagem

Se os experimentos $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ apresentam como números de resultados possíveis $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$, respectivamente, então o experimento composto de $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, nessa ordem, apresenta $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot .... \cdot n_k$ resultados possíveis.

Exercícios resolvidos

R.1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em cinco cores diferentes. Um consumidor que quiser adquirir esse veículo terá quantas opções de escolha?

Resolução

Consideremos o seguinte diagrama: $\boxed{\text{Modelo}}\boxed{\text{Cor}}$

Para a primeira "casa", temos quatro possibilidades de escolha e, para a segunda, cinco possibilidades:

Os números de possibilidades →

$$\underbrace{\boxed{\text{Modelo}}}_{4}\underbrace{\boxed{\text{Cor}}}_{5}$$

Pelo princípio fundamental de contagem, o consumidor terá $4 \cdot 5 = 20$ opções de escolha.

R.2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher com um algarismo cada uma das casas do diagrama:

$$\boxed{\text{Centenas}}\boxed{\text{Dezenas}}\boxed{\text{Unidades}}$$

O número de possibilidades para cada casa é cinco:

Os números de possibilidades →

$$\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}$$

Assim, estamos realizando o seguinte experimento: preencher a primeira casa, preencher a segunda casa e preencher a terceira casa. Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

R.3 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher, sem repetir algarismos, cada uma das casas do diagrama:

$$\boxed{\text{Centenas}}\boxed{\text{Dezenas}}\boxed{\text{Unidades}}$$

O número de possibilidades para a primeira casa é cinco:

$$\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}$$

O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, pois um algarismo já foi usado para preencher a primeira casa e não pode ser repetido na segunda casa:

$$\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{4}\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}$$

O número de possibilidades para a última casa é três, pois os dois algarismos que já foram usados nas casas anteriores não podem ser repetidos:

$$\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{5}\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{4}\underbrace{\boxed{\phantom{\text{Centenas}}}}_{3}$$

Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

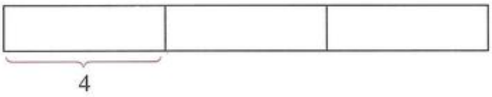
R.4 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 6 e 8?

Resolução

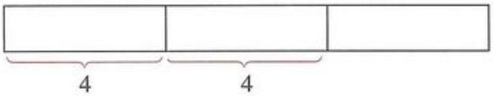
Observe que o algarismo 0 (zero) não pode ocupar a casa das centenas no diagrama abaixo, caso contrário o número não teria três algarismos:

Centenas	Dezenas	Unidades

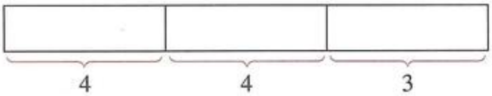
Assim sendo, o número de possibilidades para a primeira casa é quatro, porque excluímos o zero:



O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, porque o algarismo zero pode ocupar essa casa:



O número de possibilidades para a última casa é três:

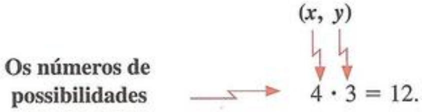


Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

R.5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

Resolução

Temos que $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Os divisores de 72 são do tipo $2^x \cdot 3^y$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Assim, o total de divisores de 72 é igual ao número de pares ordenados (x, y) que podem ser formados de modo que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Pelo princípio fundamental de contagem, temos:



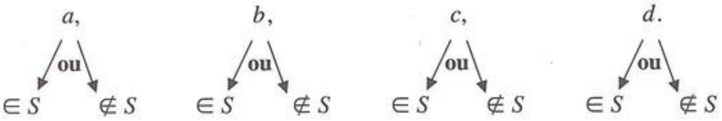
Logo, o número 72 possui doze divisores naturais.

R.6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

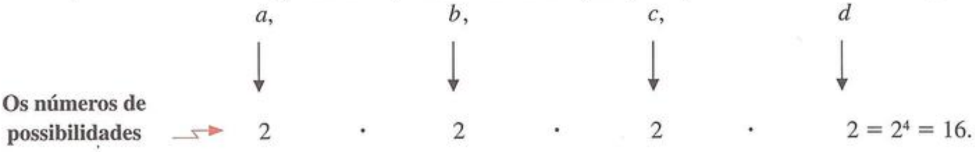
Resolução

Vejamos de quantas maneiras diferentes podemos formar um subconjunto S de A.

Para cada elemento de A temos duas possibilidades: ou o elemento pertence a S ou não pertence a S. Isto é:



Assim, o número de subconjuntos de A pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:



Assim, o conjunto A possui dezesseis subconjuntos.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.11, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, B.8, B.9, B.10, B.12, C.4, C.5, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para uma cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B?

B.2 Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.3 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.4 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.5 Quantos números pares e positivos de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.6 Quatro linhas de ônibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?

B.7 Oito atletas participam de uma corrida. Serão premiados apenas os três primeiros lugares. De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?

B.8 Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhum sem resposta e assinalando apenas uma alternativa em cada um?

B.9 Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros dígitos sejam distintos?

B.10 Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos; por exemplo:

SP-SAO PAULO
BNP·0339
LUIZ ANTONIO

Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal? (Incluímos as letras Y, W e K.)

B.11 Qual o número de divisores naturais de $n = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$?

B.12 Qual o número de divisores naturais de $n = 504$?

Exercícios complementares

C.1 Quantas funções bijetoras têm domínio $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e contradomínio $B = \{5, 6, 7, 8\}$?

C.2 Quantas funções injetoras podem ser definidas em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ com imagens em $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?

C.3 Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?

C.4 O número $n = 2^x \cdot 3^4 \cdot 5^2$, com $x \in \mathbb{N}$, possui sessenta divisores naturais. Determine x.

C.5 Quantos números naturais pares de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

C.6 Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

C.7 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C.8 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) Dum ponto A a um ponto B existem cinco caminhos; de B a um terceiro ponto C existem seis caminhos; e de C a um quarto ponto D existem também seis caminhos. Quantos caminhos existem para ir do ponto A ao ponto D, passando por B e C?

a) 17
b) 30
c) 180
d) 680
e) 4080

V.2 (FGV-SP) Antes de 1990 as placas de automóveis eram constituídas de duas letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas desse tipo, diferentes, podem ser formadas com as vogais do afabeto e algarismos pares?

a) 400
b) 31250
c) 7812
d) 15625
e) n.d.a.

V.3 (Vunesp) Os jornais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seria constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma letra R e pelo menos uma letra C é:

a) $32 \cdot 35 \cdot 10^4$
b) $3 \cdot 2 \cdot 26 \cdot 10^4$
c) $3 \cdot 26 \cdot 10^4$
d) $325 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10^4$
e) $41 \cdot 6 \cdot 10^4$

V.4 (PUC-MG) Considerando os elementos do conjunto $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$, quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, maiores que 64 000, podem ser formados?

V.5 (Cesgranrio) Considere todos os n números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Então n é:

a) 10
b) 12
c) 16
d) 18
e) 24

Capítulo 22

Princípio aditivo de contagem

Conceituação

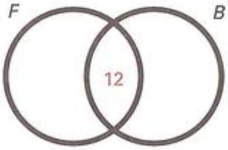
No início do ano letivo, o professor de educação física passou duas listas entre os alunos de uma turma: a primeira para os que quisessem se inscrever no curso de futebol e a segunda para os que preferissem o curso de basquetebol. Ao final da aula, o professor constatou que:

- todos os alunos haviam se inscrito em pelo menos um dos cursos;
- 22 alunos inscreveram-se no curso de futebol;
- 21 alunos, no curso de basquetebol;
- doze alunos, nos dois cursos.

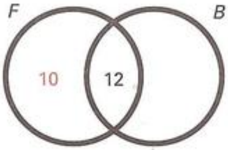
Qual é o número de alunos dessa classe?

Representando por *F* e *B* os conjuntos dos alunos inscritos nos cursos de futebol e basquetebol, respectivamente, temos:

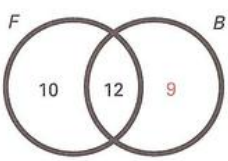
- doze alunos se inscreveram nos dois cursos; para nos orientar, vamos escrever o número 12 na intersecção dos conjuntos *F* e *B*:



- 22 alunos se inscreveram no curso de futebol; como no item anterior já existem doze alunos inscritos nesse curso, faltam apenas dez alunos para completar o conjunto *F*:



- 21 alunos se inscreveram no curso de basquetebol; como no primeiro item já existem doze alunos destinados a esse curso, faltam ainda nove alunos para completar o conjunto *B*:



Finalmente, como todos os alunos da classe se inscreveram em pelo menos um dos cursos, conclui-se que o número de alunos dessa classe é $10 + 12 + 9 = 31$. Note que esse número poderia ser calculado somando-se o número de elementos de F com o número de elementos de B e subtraindo-se o número de elementos da intersecção de F e B, ou seja, $22 + 21 - 12 = 31$.

Esse exemplo nos ajudará a entender o teorema seguinte, conhecido como **princípio aditivo de contagem**.

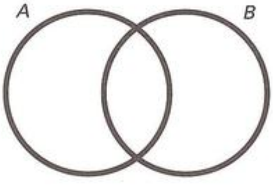
Teorema

Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

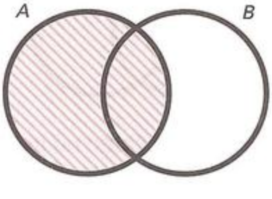
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

onde o símbolo ***n***( ) representa o número de elementos do conjunto indicado entre parênteses.

Vamos interpretar esse teorema através do seguinte diagrama:

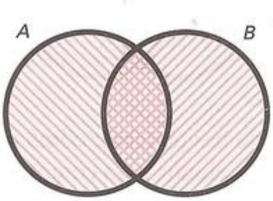


Para contar os elementos de $A \cup B$, vamos inicialmente contar os elementos de A:



A região hachurada representa os elementos que já foram contados.

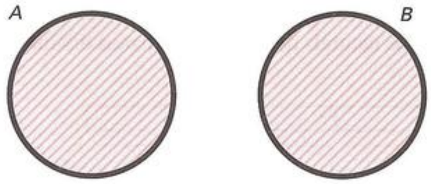
Agora, vamos contar os elementos de B:



Note que os elementos da intersecção foram contados **duas vezes**. Para corrigir esse "erro" devemos subtrair dessa contagem o número de elementos da intersecção $A \cap B$, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Nota: se os conjuntos A e B forem **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$:



então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Exercícios resolvidos

R.1 O professor de português pediu para que os alunos de uma classe lessem pelo menos uma das obras, *Dom Casmurro* ou *O alienista*, de Machado de Assis. Após algum tempo o professor constatou que:

1º) cada aluno havia lido pelo menos uma das obras;
2º) 22 alunos leram *Dom Casmurro*;
3º) dezoito alunos, *O alienista*;
4º) dez alunos, as duas obras.

Quantos alunos há nessa classe?

Resolução

Sendo:

- A o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*, tem-se que $n(A) = 22$;
- B o conjunto dos alunos que leram *O alienista*, tem-se que $n(B) = 18$;
- $A \cap B$ o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro* e *O alienista*, tem-se que $n(A \cap B) = 10$.

O conjunto $A \cup B$ é definido por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

Logo, o número de alunos que leram *Dom Casmurro* ou *O alienista* é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \therefore n(A \cup B) = 22 + 18 - 10 = 30.$$

Logo, a classe é formada por trinta alunos.

R.2 Durante um exame médico, foram medidas as estaturas dos alunos de uma classe. Observou-se que dezenove alunos têm estatura até 1,70 m e dez alunos têm estatura maior do que 1,70 m. Quantos alunos havia na classe?

Resolução

Sejam:

- A o conjunto dos alunos de até 1,70 m de estatura;
- B o conjunto dos alunos com mais de 1,70 m de estatura.

(Note que A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.)

O número de alunos da classe é o número de elementos do conjunto $A \cup B$. Como A e B são disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \therefore n(A \cup B) = 19 + 10 = 29.$$

Logo, na classe havia 29 alunos.

R.3 Quantos números naturais de quatro ou cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Seja A o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(A)$:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{}}_{6} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \quad \therefore n(A) = 360.$$

Seja B o conjunto dos números naturais de cinco algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(B)$:

$$n(B) = \underbrace{\boxed{}}_{6} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{2} \quad \therefore n(B) = 720.$$

O problema pede o número de elementos que pertencem a A **ou** a B, isto é, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \ \therefore \ n(A \cup B) = 360 + 720 = 1080$.

Assim, podem ser formados 1080 números.

R.4 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados de modo que o algarismo das unidades seja par ou o algarismo dos milhares seja ímpar?

Resolução

Seja A o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 tal que o algarismo das unidades é par. Calculando $n(A)$:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \cdot \underbrace{\overset{\underbrace{\textbf{2, 4 ou 6}}}{\overset{\downarrow}{\boxed{}}}}_{3} \quad \therefore n(A) = 180.$$

Seja B o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 tal que o algarismo dos milhares é ímpar. Calculando $n(B)$:

$$n(B) = \underbrace{\overset{\textbf{1, 3 ou 5}}{\overset{\downarrow}{\boxed{}}}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \quad \therefore n(B) = 180.$$

Observe que $A \cap B$ é o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 tal que o algarismo das unidades é par **e** o algarismo dos milhares é ímpar. Calculando $n(A \cap B)$:

$$n(A \cap B) = \underbrace{\overset{\textbf{1, 3 ou 5}}{\overset{\downarrow}{\boxed{}}}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \cdot \underbrace{\overset{\textbf{2, 4 ou 6}}{\overset{\downarrow}{\boxed{}}}}_{3} \quad \therefore n(A \cap B) = 108.$$

Portanto temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ \therefore \ n(A \cup B) = 180 + 180 - 108 = 252$.
Logo, podem ser formados 252 números.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.7, B.9, B.11, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.8, B.10, B.12, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 200 \leqslant x \leqslant 450\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 100 \leqslant y \leqslant 300\}$, calcule $n(A \cup B)$.

B.2 Dados dois conjuntos A e B tais que $n(A) = 18$, $n(B) = 12$ e $n(A \cup B) = 23$, calcule $n(A \cap B)$.

B.3 Considerando os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 200 < x \leqslant 300\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 150 < y \leqslant 230\}$, calcule $n(A \cup B)$.

B.4 A e B são conjuntos disjuntos tais que $n(A \cup B) = 25$ e $n(A) = 10$. Calcule $n(B)$.

B.5 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 de modo que o algarismo das unidades seja menor que 4 ou maior que 5?

B.6 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6 e 8 de modo que o algarismo das unidades seja menor que 4 ou o algarismo das dezenas seja par?

B.7 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos podem ser formados de modo que o algarismo das centenas seja ímpar ou seja múltiplo de 3? **Cuidado!** Esse enunciado não exige que o número seja formado por algarismos **distintos**.

B.8 Calcule a quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que o algarismo das unidades seja par ou o algarismo das dezenas seja múltiplo de 3.

B.9 Qual é o total de múltiplos positivos de 5, com quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6?

B.10 Encontre o total de números naturais pares, de quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

B.11 Obtenha a quantidade de números naturais maiores que 34000 e de cinco algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

B.12 Com os algarismos 1, 2, 3, 5, 8 e 9 quantos números naturais compreendidos entre 2800 e 20000 podem ser formados sem repetição de algarismos?

B.13 Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados de modo que os dois primeiros dígitos sejam diferentes de zero ou o segundo e o terceiro dígitos sejam diferentes de zero?

Exercícios complementares

C.1 Qual é o total de números pares ou múltiplos de 5, com três algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

C.2 Quantos números pares ou múltiplos de 5, com três algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

C.3 Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais, de cinco algarismos distintos, formados por 1, 2, 3, 4 e 5, qual a ordem (número da posição) do número 32415?

C.4 Sabendo-se que o segredo de um cofre é uma seqüência de quatro algarismos distintos e que o primeiro algarismo é o triplo do segundo, qual é o maior número de tentativas diferentes que devemos fazer para conseguir abri-lo?

C.5 Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, podendo repetir no máximo um algarismo uma única vez?

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Os conjuntos M e N são finitos. Sabe-se que $n(M \cup N) = 38$, $n(M \cap N) = 12$ e $n(M) = 35$; então $n(N)$ vale:

a) 23 b) 15 c) 3 d) 26 e) 50

V.2 (UFCE) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30000 e 65000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:

a) 48 b) 66 c) 96 d) 120

V.3 (PUC-SP) O total de números naturais de três algarismos distintos que existem no nosso sistema de numeração é:

a) 650 b) 615 c) 640 d) 649 e) 648

Capítulo 23

Arranjo simples

1. Tipos de agrupamento

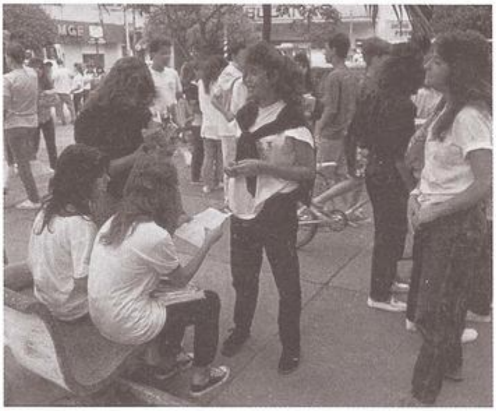
Um agrupamento de elementos é qualquer conjunto, ordenado ou não, formado por esses elementos.

A análise combinatória classifica os agrupamentos em dois tipos fundamentais: os agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos – os **arranjos** – e os agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos – as **combinações**.

Vejamos dois exemplos para nos convencer de que existem realmente esses dois tipos de agrupamento.

Exemplo 1

Os alunos do segundo ano colegial fizeram um bolão, apostando nos três primeiros colocados do campeonato brasileiro de futebol. Observemos as apostas dos alunos Ewerton e Priscilla.


GLADSTONE CAMPOS/ABRIL IMAGENS

Ewerton:

1º colocado, Corinthians;
2º colocado, Flamengo;
3º colocado, Cruzeiro.

Priscilla:

1º colocado, Flamengo;
2º colocado, Cruzeiro;
3º colocado, Corinthians.

Apesar de os dois terem apostado nos mesmos clubes, suas apostas são diferentes, pois a ordem das colocações é diferente.

Isto é, nesse tipo de agrupamento a ordem deve ser considerada.

Exemplo 2

Os alunos do primeiro ano colegial fizeram uma votação para eleger uma comissão de três representantes da classe. O regulamento foi estabelecido da seguinte maneira: em cada cédula o eleitor deveria escrever apenas três nomes de candidatos; não haveria cargos distintos na comissão, isto é, todos os eleitos teriam funções idênticas. Observemos os votos dos alunos Lúcia e Émerson.

Lúcia:

João Lucatto,
Cláudia Medeiros,
Luiz Vieira.

Émerson:

Cláudia Medeiros,
Luiz Vieira,
João Lucatto.

Observe que esses alunos votaram na mesma comissão, pois a ordem de apresentação dos nomes não deve ser considerada.

2. O conceito de arranjo simples

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todas as seqüências possíveis de três elementos distintos:

(a, b, c)
(a, c, b)
(b, a, c)
(b, c, a)
(c, a, b)
(c, b, a)
(a, b, d)
(a, d, b)
(b, a, d)
(b, d, a)
(d, a, b)
(d, b, a)
(a, c, d)
(a, d, c)
(c, a, d)
(c, d, a)
(d, a, c)
(d, c, a)
(b, c, d)
(b, d, c)
(c, b, d)
(c, d, b)
(d, c, b)
(d, b, c)

Tais seqüências são chamadas de "arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três". Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **seqüência** formada por três elementos distintos de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam ou pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que os compõem. Por exemplo:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

O número de arranjos simples de quatro elementos distintos tomados três a três é indicado pelo símbolo $A_{4,3}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos do conjunto I em três casas, sem repetição:

$$A_{4,3} = \underbrace{\boxed{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{3^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{2} \qquad \therefore A_{4,3} = 24.$$

Definição

> Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo tal que $p \leq n$. Chama-se "**arranjo simples** de p elementos de I" toda seqüência formada por p elementos de I distintos.

Exemplos

a) Os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{5, 6, 7, 8\}$ tomados dois a dois são:

(5, 6)
(6, 5)
(5, 7)
(7, 5)
(5, 8)
(8, 5)
(6, 7)
(7, 6)
(6, 8)
(8, 6)
(7, 8)
(8, 7)

O número de arranjos simples de quatro elementos tomados dois a dois é indicado por $A_{4,2}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos de I em duas casas, sem repetição:

$$A_{4,2} = \underbrace{\boxed{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{3} \qquad \therefore A_{4,2} = 12.$$

b) Quatro clubes A, B, C e D disputam as finais de um torneio de basquetebol. Ao final do certame as classificações possíveis desses clubes são os arranjos simples dos quatro elementos A, B, C e D tomados quatro a quatro, isto é:

(A, B, C, D)
(A, B, D, C)
(A, C, B, D)
(A, C, D, B)
(A, D, B, C)
(A, D, C, B)
(B, A, C, D)
(B, A, D, C)
(B, C, A, D)
(B, C, D, A)
(B, D, A, C)
(B, D, C, A)
(C, A, B, D)
(C, A, D, B)
(C, B, D, A)
(C, B, A, D)
(C, D, B, A)
(C, D, A, B)
(D, A, B, C)
(D, A, C, B)
(D, B, A, C)
(D, B, C, A)
(D, C, A, B)
(D, C, B, A)

O número de arranjos simples de quatro elementos tomados quatro a quatro, isto é, $A_{4,4}$, pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

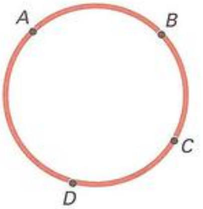
$$A_{4,4} = \underbrace{\boxed{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{3^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{2} \cdot \underbrace{\boxed{4^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{1} \quad \therefore\ A_{4,4} = 24.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Quais dos seguintes agrupamentos são arranjos simples? Por quê?

a) Com os algarismos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4\}$, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa um número natural de três algarismos distintos.

b) Com os pontos A, B, C e D da circunferência ao lado, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa os vértices de um triângulo.



c) Com as vogais *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa uma palavra, com sentido ou não, de duas letras distintas.

d) Com cinco pessoas, A, B, C, D e E, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa uma comissão de quatro pessoas onde os componentes da comissão têm funções idênticas.

Resolução

a) Os números que podemos formar são:

$$\begin{gathered}123,\\412,\\324,\\ \vdots\end{gathered}$$

Para descobrir se esses agrupamentos são, ou não, arranjos, escolhemos um deles e invertemos a ordem de seus elementos. Se essa inversão **alterar** o agrupamento, então esses agrupamentos são arranjos. Caso contrário, não o são.

Tomando o número 123 como exemplo, vamos escrever os algarismos em outra ordem: 213. Note que $123 \neq 213$; logo, classificamos esses agrupamentos como arranjos simples.

b) Os triângulos que podemos formar são:

$$\begin{gathered}ABC,\\ABD,\\BCD,\\ \vdots\end{gathered}$$

Tomando o triângulo ABC como exemplo, vamos escrever as letras em outra ordem: BAC. Note que ABC e BAC representam o mesmo triângulo, isto é, a inversão da ordem dos elementos não alterou o agrupamento; logo, esses agrupamentos não são arranjos.

c) As palavras que podemos formar são:

$$\begin{gathered}ai,\\ei,\\ui,\\ \vdots\end{gathered}$$

Tomando a palavra *ai* como exemplo, vamos inverter a ordem das letras, escrevendo *ia*. Note que as palavras *ai* e *ia* são diferentes; logo, classificamos esses agrupamentos como arranjos simples.

d) As comissões que podemos formar são:

$$\begin{gathered} A, B, C, D; \\ A, B, C, E; \\ B, C, D, E; \\ \vdots \end{gathered}$$

Tomando a comissão A, B, C, D como exemplo, vamos trocar a ordem de seus elementos: C, B, A, D. Note que a comissão A, B, C, D é a mesma que a comissão C, B, A, D; logo, esses agrupamentos não são arranjos.

R.2 Calcular $A_{6,3}$.

Resolução

Devemos calcular o número de seqüências de três elementos distintos que podem ser formadas com seis elementos distintos. Pelo princípio fundamental de contagem, temos:

$$A_{6,3} = \underbrace{\boxed{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{6} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{3^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{4} \qquad \therefore A_{6,3} = 120.$$

3. Cálculo do número de arranjos simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo, $p \leqslant n$. O número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p, isto é, $A_{n,p}$, pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

Os números de possibilidades →

$$\underbrace{\boxed{1^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{n}\ \underbrace{\boxed{2^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{n-1}\ \underbrace{\boxed{3^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{n-2}\ \underbrace{\boxed{4^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{n-3}\ \cdots\ \underbrace{\boxed{p^{\underline{o}}\text{ elemento}}}_{n-(p-1)}$$

Assim, temos que $A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot [n-(p-1)]$ ou

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot (n-p+1).$$

Daqui por diante, podemos utilizar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,p}$; porém, se você preferir aplicar o princípio fundamental em vez da fórmula, achamos até melhor.

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular $A_{6,4}$.

Resolução

$$A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

R.4 Para que valores naturais de n existe o número $A_{n,3}$?

Resolução

O símbolo $A_{n,3}$ indica o número de seqüências de **três elementos distintos** escolhidos dentre n elementos. Logo, o menor n natural possível é 3; se n fosse menor que 3, não poderíamos formar uma seqüência com três elementos **distintos**. Logo, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

R.5 Se n é um número natural e $n \geqslant 3$, então a expressão $\dfrac{A_{n,3}}{A_{n,2}} + 2$ é igual a:

a) $3n$ b) n c) $2n$ d) 2 e) $\dfrac{1}{2}$

Resolução

$$\frac{A_{n,3}}{A_{n,2}} + 2 = \frac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2)}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}} + 2 = n - 2 + 2 = n.$$

Temos então como correta a alternativa (b).

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.6, B.8, B.10, C.2, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, B.7, B.9, B.11, B.12, C.1, C.3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Descreva todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

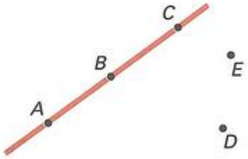
B.2 Apresente todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{2, 4, 6, 8\}$ tomados três a três.

B.3 Dentre os agrupamentos seguintes, quais são arranjos simples?

a) Com os elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa um **subconjunto** de I com três elementos.

b) Com os elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa uma **seqüência** formada por três elementos distintos de I.

c) Com os pontos A, B, C, D e E da figura



formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento determina um triângulo.

d) Com as letras da palavra "caderno", formam-se agrupamentos de modo que cada agrupamento é um anagrama dessa palavra.

Nota: chama-se **anagrama** de uma palavra a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando-se a ordem de suas letras. Alguns **anagramas** da palavra CADERNO são: CADERNO, DECARNO, NODECAR, etc.

B.4 Calcule:

a) $A_{8,3}$ b) $A_{5,4}$ c) $A_{6,6}$

B.5 Determine o valor de:

a) $A_{4,2}$ b) $A_{5,3}$ c) $A_{4,1}$

B.6 Para que valores naturais de n existe a expressão $A_{n,6}$?

B.7 Obtenha valores naturais de n de modo que exista a expressão $\dfrac{A_{n,4}}{A_{n,2}}$.

B.8 Sendo n um número natural e $n \geqslant 4$, calcule o valor da expressão $E = \dfrac{A_{n,4}}{A_{n,2}} - n^2 + 5n$.

B.9 Simplifique a expressão $\dfrac{A_{n,3} - A_{n-1,2}}{(n-1)^2}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

B.10 Num teatro, uma fila possui vinte cadeiras numeradas. O número de maneiras distintas de dez pessoas se sentarem nessa fila é:

a) $A_{20,20}$ b) $A_{10,10}$ c) $A_{20,10}$ d) $A_{10,20}$ e) $A_{10,1}$

B.11 Dez atletas participam de uma corrida de atletismo. Serão premiados apenas os três primeiros colocados, não podendo haver empate. O número de maneiras de serem distribuídos os prêmios é:

a) $A_{10,3}$ b) $A_{10,10}$ c) $A_{3,3}$ d) $A_{3,10}$ e) $A_{3,1}$

B.12 A quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é:

a) $A_{9,9}$ b) $A_{5,1}$ c) $A_{5,5}$ d) $A_{9,1}$ e) $A_{9,5}$

Exercícios complementares

C.1 "Uma função $f: D \rightarrow C$ é injetora se, e somente se, elementos distintos de D tiverem imagens distintas em C, através de f." O número de funções injetoras com domínio $D = \{1, 2, 3\}$ e contradomínio $C = \{a, b, c, d, e\}$ é:

a) $A_{3,3}$ b) $A_{5,5}$ c) $A_{5,3}$ d) $A_{3,5}$ e) $A_{3,1}$

C.2 A expressão $E = \frac{A_{n,5}}{A_{n,4}} - \frac{A_{n,4}}{A_{n,3}}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$, é igual a:

a) -1 b) 1 c) $2n - 7$ d) $2n + 7$ e) $2n$

C.3 De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem formar uma fila indiana?

C.4 O total de números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pode ser expresso por:

a) $A_{6,4}$ b) $A_{5,3} + A_{5,4}$ c) $A_{6,4} - A_{5,3}$ d) $A_{6,3}$ e) $A_{6,3} - A_{6,2}$

C.5 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $6A_{5,3} = A_{6,4}$.

b) Existe $A_{n,4}$ para todo n, $n \in \mathbb{N}$.

c) Existe $\frac{A_{n,5}}{A_{n,2}}$ se, e somente se, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$.

d) $A_{6,1} \cdot A_{5,1} \cdot A_{4,1} = A_{6,3}$.

e) Se dois arranjos simples são formados pelos mesmos elementos, então esses arranjos são iguais.

f) Dois arranjos simples formados pelos mesmos elementos são iguais se, e somente se, a ordem desses elementos nos dois arranjos for a mesma.

g) Se existir um elemento num arranjo que não pertença a um outro arranjo, então esses arranjos podem ser iguais.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Sendo n um número natural e $n \geqslant 3$, a razão $\frac{A_{n,3}}{A_{n-1,2}}$ é igual a:

a) 2 b) $2n$ c) 1 d) n e) $n + 1$

V.2 (UFCE) Sendo uma placa de automóvel formada por duas letras seguidas de quatro algarismos, quantas placas podem ser formadas por duas letras distintas seguidas de quatro algarismos distintos? (Considere as 26 letras do alfabeto e os dez algarismos do nosso sistema de numeração.)

a) $A_{26,2} + A_{10,4}$
b) $A_{26,2} \cdot A_{10,4}$
c) $A_{36,6}$
d) $6A_{36,1}$
e) $2A_{26,1} \cdot 4A_{10,1}$

V.3 (Cescem) Se existir a expressão $E = \frac{A_{n,3}}{A_{3,n}}$, então E é necessariamente igual a:

a) 2 b) $2n$ c) n d) 0 e) 1

Capítulo 24

Fatorial

1. Conceituação

Certos cálculos da análise combinatória são tediosos e desanimadores, como, por exemplo:

$$A_{12,\,12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Para facilitar as operações com expressões desse tipo, adotamos o símbolo $n!$ (lê-se "fatorial de n") para indicar o produto dos números naturais consecutivos n, $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1, com $n \geqslant 2$. Assim, temos:

$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Essa nova notação nos auxilia em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, permitindo-nos apresentar resoluções de maneira abreviada.

Definição

Seja n um número natural, $n \geqslant 2$. Define-se o fatorial de n, que indicamos por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos n, $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1, isto é:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Exemplos

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

1.1. Propriedade fundamental dos fatoriais

Observando a igualdade $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, percebemos que $7! = 7 \cdot 6!$.
Podemos generalizar esse resultado através da seguinte propriedade:

$$n! = n(n-1)!, \quad \text{para } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3.$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

Exemplos

a) $9! = 9 \cdot 8!$

b) $10! = 10 \cdot 9!$

c) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$

d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

1.2. Extensão da definição de fatorial

Para que não tenhamos exceções nas aplicações de fórmulas que vamos estudar mais adiante, é conveniente definirmos **1!** e **0!**.

Vimos que a propriedade:

$$n! = n(n-1)!$$

é válida para todo n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$. E se fizermos $n = 2$? Vejamos o que acontece:

$$2! = 2(2-1)! \therefore 2! = 2 \cdot 1! \therefore 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \therefore 1 = 1!$$

Assim sendo, para que a propriedade fundamental valha também para $n = 2$, definimos:

$$1! = 1.$$

Vamos ousar um pouco mais e atribuir o valor 1 para a variável n na igualdade $n! = n(n-1)!$:

$$1! = 1(1-1)! \therefore 1! = 1 \cdot 0! \therefore 1! = 0!$$

Assim sendo, para estendermos a propriedade fundamental para $n = 1$, definimos:

$$0! = 1.$$

Com essas duas novas definições, $1! = 1$ e $0! = 1$, temos que:

$$n! = n(n-1)!, \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular:

a) $6!$ b) $3! + 2!$ c) $\dfrac{4!}{0!}$ d) $1! + 0!$

Resolução

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $3! + 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$

c) $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$

d) $1! + 0! = 1 + 1 = 2$

R.2 Simplificar as frações:

a) $\dfrac{8!}{7!}$

b) $\dfrac{8!}{6!}$

c) $\dfrac{3!}{5!}$

d) $\dfrac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 5!}$

e) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

f) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}$

g) $\dfrac{(n-2)!}{(n-3)!}$

h) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$

Resolução

a) $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 8$

b) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

c) $\dfrac{3!}{5!} = \dfrac{\cancel{3!}}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}} = \dfrac{1}{20}$

d) $\dfrac{7!\cdot 9!}{8!\cdot 5!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot \cancel{5!}} = 378$

e) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$

f) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!} = \dfrac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{(n+3)!}} = n^2 + 9n + 20$

g) $\dfrac{(n-2)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = n - 2$

h) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)n\cancel{(n-1)!}} = \dfrac{1}{n^2+n}$.

R.3 Resolver a equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 20 \therefore n^2 + n - 20 = 0 \therefore n = 4 \text{ ou } n = -5.$$

Verificação

Lembramos que só se define fatorial para número natural. Assim sendo, devemos verificar se, para esses valores de n, existem os fatoriais apresentados na equação.

Para $n = 4$, temos $\dfrac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!} = 20$; logo, 4 é raiz da equação.

Para $n = -5$, temos $\dfrac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{(-4)!}{(-6)!} = 20$. **(absurdo!)**

Como não existem os fatoriais $(-4)!$ e $(-6)!$, temos que -5 não é raiz da equação.
Logo, $S = \{4\}$.

2. Cálculo do número de arranjos simples através de fatoriais

Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-p+1).$$

Com o auxílio dos fatoriais podemos apresentar essa fórmula de uma maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, vejamos antes alguns casos particulares.

• Consideremos a igualdade $A_{7,\,3} = 7\cdot 6\cdot 5$. Multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro dessa igualdade por 4!, a sentença continuará verdadeira e teremos:

$$A_{7,\,3} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}.$$

Assim sendo, o número $A_{7,\,3}$ pode ser expresso através de fatoriais por $\dfrac{7!}{4!}$.

• Consideremos a igualdade $A_{8,\,2} = 8\cdot 7$. Multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro dessa igualdade por 6!, teremos:

$$A_{8,\,2} = 8\cdot 7\cdot \frac{6!}{6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = \frac{8!}{6!}.$$

Portanto, o número $A_{8,2}$ pode ser expresso através de fatoriais por $\frac{8!}{6!}$.

Generalização

Consideremos a igualdade $A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1)$. Multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro dessa igualdade por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n+p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\therefore \quad A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Essa é a fórmula que calcula $A_{n,p}$ através de fatoriais.

Exercício resolvido

R.4 Calcular, usando a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$:

a) $A_{6,4}$ b) $A_{7,3}$ c) $A_{5,5}$

Resolução

a) $A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$

b) $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

c) $A_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$

3. Extensão do cálculo $A_{n,p}$ para $n = 0$ ou $p = 0$

Definimos o número $A_{n,p}$ para $\{n, p\} \subset \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$. Estenderemos agora o cálculo de $A_{n,p}$ para $n = 0$ ou $p = 0$.

Para qualquer n natural, inclusive $n = 0$, calculamos $A_{n,0}$ através da fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad \text{isto é:}$$

$$A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \forall n, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos

a) $A_{4,0} = \frac{4!}{(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$

b) $A_{0,0} = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

Exercícios resolvidos

R.5 Para que valores de p existe o número $A_{5,\,p}$?

Resolução

Temos $A_{5,\,p} = \dfrac{5!}{(5-p)!}$.

Sabemos que existe $(5-p)!$ se, e somente se, $(5-p) \in \mathbb{N}$.
Para que isso ocorra, só podemos ter $p = 0$ ou $p = 1$ ou $p = 2$ ou $p = 3$ ou $p = 4$ ou $p = 5$.
Assim, existe $A_{5,\,p}$ se, somente se, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant 5$.

R.6 Resolver a equação $A_{n,\,3} = 6n$.

Resolução

Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

$$A_{n,\,3} = 6n \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 6n \;\therefore\; \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 6n \;\therefore\; n(n-1)(n-2) = 6n.$$

Como $n \neq 0$, pois $n \geqslant 3$, podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por n:

$$(n-1)(n-2) = 6 \;\therefore\; n^2 - 3n + 2 = 6 \;\therefore\; n^2 - 3n - 4 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos $n = 4$ ou $n = -1$ (não convém).

Logo, $S = \{4\}$.

R.7 Sendo $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, mostrar que a quantidade de números naturais de quatro algarismos distintos que podem ser formados com os elementos de I é dada por $A_{6,\,4} - A_{5,\,3}$.

Resolução

O número de seqüências formadas por quatro elementos distintos de I é dada por $A_{6,\,4}$. Porém as seqüências que começam por zero, por exemplo, 0324, não representam números de quatro algarismos. Logo, o total dessas seqüências deve ser subtraído de $A_{6,\,4}$. Calculando quantas seqüências começam por zero, temos:

$$\boxed{\;0\;}\underbrace{\boxed{\quad\;}\boxed{\quad\;}\boxed{\quad\;}}_{A_{5,\,3}}$$

Logo, o total de números de quatro algarismos distintos formados por 0, 1, 2, 3, 4 e 5 é $A_{6,\,4} - A_{5,\,3}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.9, B.10, B.11, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.5, B.6, B.7, B.8, B.12, B.13, B.14, B.15, C.2, C.3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) $7!$

b) $3! \cdot 2!$

c) $4! - 2!$

d) $\dfrac{0!}{3!}$

B.2 Assinale V ou F:

a) $3! + 2! = 5!$

b) $3! \cdot 2! = 6!$

c) $4! + 4! = 2 \cdot 4!$

d) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

e) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

f) $n! + n! = (2n)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

g) $n! + n! = 2 \cdot n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

h) $n! - n! = 0!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B.3 Simplifique as frações:

a) $\frac{6!}{3!}$ d) $\frac{n!}{(n-1)!}$ g) $\frac{(n+2)!}{(n+3)!}$

b) $\frac{4!}{6!}$ e) $\frac{(n-3)!}{n!}$ h) $\frac{(n-5)!}{(n-7)!}$

c) $\frac{5!8!}{4!7!}$ f) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$ i) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!}$

B.4 Resolva a equação $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 12$.

B.5 Determine o conjunto dos valores de n, tais que $\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} = 15$.

B.6 Qual é o conjunto solução da equação $\frac{1}{n!} + \frac{n}{(n-1)!} = \frac{5}{n(n-1)(n-2)!}$?

B.7 Resolva a equação $n! + \frac{48}{n!} = 26$.

B.8 O produto dos n primeiros números inteiros pares positivos é:

a) 0 b) $2^n\left(\frac{n}{2}\right)!$ c) $2^n \cdot n!$ d) $2^{25} \cdot n!$ e) $(n!)^2$

B.9 Calcule:

a) $A_{2,0}$ b) $A_{10,0}$ c) $A_{0,0}$

B.10 Resolva a equação $A_{n,2} = 20$.

B.11 Obtenha o conjunto solução da equação $\frac{A_{n,3}}{A_{n,4}} = \frac{1}{5}$.

B.12 Determine o conjunto dos valores de n, tais que $A_{6,n} = 30$.

B.13 Resolver a equação $A_{7,n} = 1$.

B.14 Determine n de modo que $\frac{A_{n,p}}{A_{n+2,p+2}} = \frac{1}{12}$.

B.15 A expressão $A_{n+1,1} + A_{n+2,2} + A_{n+3,3}$ com $n \in \mathbb{N}$ é igual a:

a) $(n+1)(n+3)^2$ c) $n!(n+3)$ e) $n!(n+3)!$

b) $(n+1)(n+3)$ d) $n(n+3)!$

Exercícios complementares

C.1 Determine n de modo que $\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{(n+1)!} = \frac{1}{240}$. **Sugestão:** $1+2+3+4+\ldots+n$ é a soma dos n primeiros termos de uma P.A.

C.2 A expressão $E = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m-1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, é equivalente a:

a) $E = (2m)!$ c) $E = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$ e) $2m(2m)!$

b) $E = 2m!$ d) $2!(2m)!$

C.3 Obtenha m de modo que $\frac{(2m)!}{2^m \cdot m! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} = \frac{1}{9}$. **Sugestão:** multiplique o numerador e o denominador da fração do primeiro membro por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2m$.

C.4 Determine n de modo que $A_{n,3} + A_{n-1,3} = 14\,A_{n-2,2}$.

C.5 Cinco pessoas entram num ônibus onde há oito lugares vagos. O número de modos de essas pessoas escolherem os lugares para se sentar é:

a) $A_{5,5}$ b) $A_{8,8}$ c) $A_{5,1}$ d) $A_{8,5}$ e) $A_{8,1}$

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) A expressão $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$, com n inteiro estritamente positivo, vale:

a) $\dfrac{n^2+n}{1+n}$ c) $\dfrac{n}{1+n}$ e) $\dfrac{n}{n+2}$

b) $\dfrac{n^2-n}{1+n}$ d) $\dfrac{n^2+n-1}{2}$

V.2 (PUC-SP) Se $(n-6)! = 720$, então:

a) $n = 12$ b) $n = 11$ c) $n = 10$ d) $n = 13$ e) $n = 14$

V.3 (Cescem) O número de funções injetoras cujo domínio é $A = \{1, 2, 3\}$ e o contradomínio é $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ é:

a) $A_{5,1}$ b) $A_{5,3}$ c) $A_{5,5}$ d) $A_{3,3}$ e) $A_{3,1}$

Capítulo 25

Permutação simples

1. Conceituação

Consideremos o conjunto $I = \{a, b, c\}$. Os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três são:

$$(a, b, c)$$
$$(a, c, b)$$
$$(b, a, c)$$
$$(b, c, a)$$
$$(c, a, b)$$
$$(c, b, a)$$

Cada um desses arranjos é chamado de "**permutação simples** dos elementos de I". Isto é, uma permutação simples dos elementos de I é qualquer seqüência de elementos distintos formada por todos os elementos de I. Observe que duas dessas permutações se diferenciam apenas pela ordem dos elementos.

Exemplo

$(a, b, c) \neq (b, a, c)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. Chama-se "**permutação simples** dos n elementos de I" todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.

Exemplos

a) As permutações simples dos três elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3\}$ são:

$$(1, 2, 3) \qquad (2, 1, 3) \qquad (3, 1, 2)$$
$$(1, 3, 2) \qquad (2, 3, 1) \qquad (3, 2, 1)$$

Isto é, são todos os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três.

b) Quantas permutações simples podemos formar com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$? O número de permutações simples de quatro elementos distintos, que indicamos por P_4, é igual ao número de arranjos simples desses quatro elementos tomados quatro a quatro. Isto é:

$$P_4 = A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24.$$

Algumas dessas permutações são:

$$(a, b, c, d)$$
$$(a, b, d, c)$$
$$(a, c, b, d)$$
$$\vdots$$

1.1. Cálculo do número de permutações simples de *n* elementos distintos

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I, que indicamos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n. Isto é:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Assim, temos que:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exercícios resolvidos

R.1 De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem formar uma fila indiana?

Resolução

O número de filas é igual ao número de permutações simples desses cinco elementos, isto é:

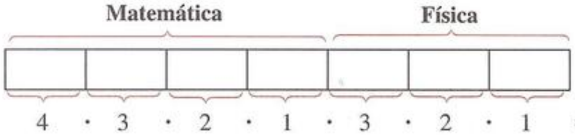
$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Logo, podem ser formadas 120 filas.

R.2 De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, quatro livros de matemática e três livros de física, de modo que livros de mesma matéria pemaneçam juntos?

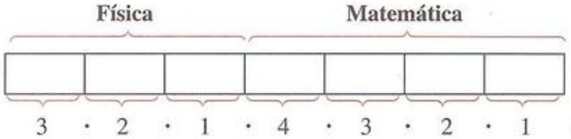
Resolução

Podemos dispor os livros de matemática antes dos de física **ou** os de física antes dos de matemática. Isto é:



$= P_4 \cdot P_3 = 4!3!$

ou



$= P_3 \cdot P_4 = 3!4!$

Temos então como resposta: $4!3! + 3!4! = 288$.

ou

Assim, os livros podem ser dispostos na prateleira de 288 modos diferentes.

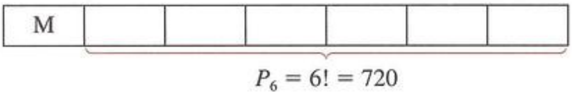
R.3 Com a palavra MARTELO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por M?
c) quantos anagramas começam por M e terminam por O?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?
h) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem?
i) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas?

Resolução

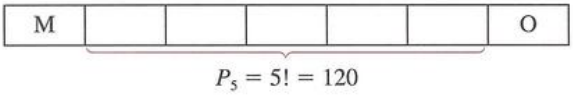
a) Um anagrama da palavra MARTELO é a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando a ordem de suas letras. Assim, o número de anagramas da palavra MARTELO é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é: $P_7 = 7! = 5040$.

b) Fixando-se a letra M na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores:



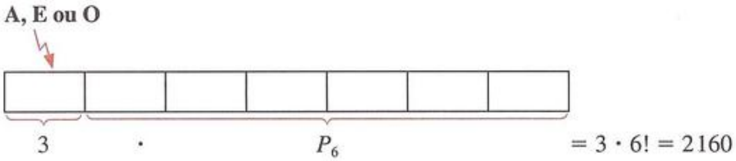
Logo, há 720 anagramas que começam por M.

c) Fixando-se as letras M e O na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:



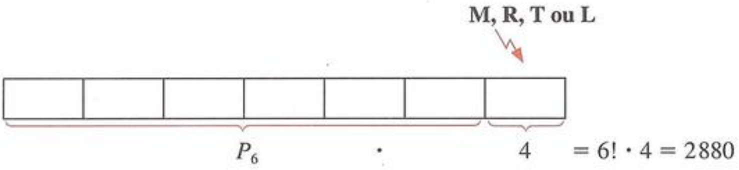
Portanto há 120 anagramas que começam por M e terminam por O.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição: A, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



Assim, há 2160 anagramas que começam por vogal.

e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) posição: M, R, T ou L. Para cada consoante fixada na sétima posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições anteriores:



Assim, há 2880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima). Fixadas uma vogal e uma consoante na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{A, E ou O}\\ \downarrow}}{\boxed{}}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5} \cdot \underbrace{\overset{\substack{\text{M, R, T ou L}\\ \downarrow}}{\boxed{}}}_{4} = 3 \cdot 5! \cdot 4 = 1440$$

Há, portanto, 1440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Sejam A e B conjuntos de anagramas da palavra MARTELO, tais que:

$A = \{\text{Anagramas que começam por vogal}\}$;
$B = \{\text{Anagramas que terminam por consoante}\}$;
$A \cap B = \{\text{Anagramas que começam por vogal } \textbf{e} \text{ terminam por consoante}\}$;
$A \cup B = \{\text{Anagramas que começam por vogal } \textbf{ou} \text{ terminam por consoante}\}$.

Lembremos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Nos itens (d), (e) e (f) já calculamos $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$ e obtivemos:

$$n(A) = 2160;\ n(B) = 2880;\ n(A \cap B) = 1440.$$

Logo, $n(A \cup B) = 2160 + 2880 - 1440 = 3600$.
Temos então que 3600 anagramas começam por vogal ou terminam por consoante.

h) Vamos resolver este item de dois modos diferentes.

Primeiro modo
As letras M, A e R podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições: primeira, segunda, terceira; segunda, terceira, quarta; terceira, quarta, quinta; quarta, quinta, sexta; quinta, sexta, sétima. Analisemos cada caso:

$$\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{R}}\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\underset{\cdot}{\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{R}}}\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\underset{\cdot}{\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{R}}}\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\underset{\cdot}{\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{R}}}\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1}\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{R}} = P_4$$

Assim, temos $P_4 + P_4 + P_4 + P_4 + P_4 = 5P_4 = 5 \cdot 4! = 5! = 120$.

Ou seja, 120 anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem.

Segundo modo
Observando o primeiro modo, percebemos que o bloco MAR atuou como um único elemento nas permutações. Assim sendo, podemos resolver esse problema calculando o número de permutações dos cinco elementos, MAR, T, E, L e O, isto é, considerando o bloco MAR como um único elemento.
Temos assim $P_5 = 5! = 120$.

i) Nesse caso, um bloco composto pelas letras M, A e R pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MAR, MRA, ARM, AMR, RAM e RMA.
Para cada um desses seis blocos podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item (h). Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas. Ou seja, o número de anagramas que apresentam as letras M, A e R juntas é $P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

R.4 Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais de cinco algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 6 e 8, qual será a ordem (número da posição) do número 36812?

Resolução

Todo número obtido de uma permutação simples de 1, 2, 3, 6 e 8, da forma:

$$\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{6}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{6}\boxed{2}\boxed{}\boxed{}$$

é menor do que 36812. Vejamos quantos são esses números:

$$\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{4! = 24}$$

ou

$$\boxed{2}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{4! = 24}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{3! = 6}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{2}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{3! = 6}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{6}\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{2! = 2}$$

ou

$$\boxed{3}\boxed{6}\boxed{2}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{2! = 2}$$

Note que, em ordem crescente, o próximo número é:

$$\boxed{3}\boxed{6}\boxed{8}\boxed{1}\boxed{2}$$

Assim, nessa seqüência crescente existem $24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 64$ números menores do que 36812. Logo, o número 36812 ocupa a 65ª posição.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.6, B.7, C.1, C.4, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.8, B.9, B.10, C.2, C.3, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Num ônibus há exatamente cinco lugares vagos. Os próximos cinco passageiros que embarcarem poderão ocupar esses lugares vagos de quantas maneiras diferentes?

B.2 De quantos modos diferentes podemos dispor quatro livros de português, três de história e dois de geografia numa mesma prateleira de uma estante de modo que livros de mesma matéria permaneçam juntos?

B.3 De quantos modos podemos dispor cinco meninas e quatro meninos em fila indiana de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

B.4 Quantos números podemos obter permutando apenas os algarismos pares do número 32456 e mantendo os algarismos ímpares em suas respectivas posições?

B.5 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que os algarismos ímpares permaneçam sempre juntos?

B.6 Com a palavra EDITORA:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam pela letra T?
c) quantos anagramas começam pela sílaba TO?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?
h) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas e nessa ordem?
i) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas?
j) quantos anagramas não apresentam as letras E, D e T juntas?

B.7 Quantos números naturais de seis algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 que não sejam múltiplos de 5?

B.8 Escrevendo em ordem decrescente todos os números naturais de cinco algarismos distintos formados por 3, 4, 5, 6 e 7, qual será a ordem (número da posição) do número 56347?

B.9 Quatro rapazes e uma moça formam uma fila. De quantas maneiras essa fila pode ser formada de modo que a moça fique sempre em primeiro lugar?

a) 24 b) 12 c) 18 d) 4 e) 6

B.10 Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudar de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:

a) 4 h b) 2 h c) 3 h d) 5 h e) 6 h

Exercícios complementares

C.1 Qual é o número de anagramas da palavra VOLUME que apresentam a letra V antes da letra L?

C.2 Obtenha o total de anagramas da palavra VOLUME que apresentam as consoantes em ordem alfabética.

C.3 Quantos números naturais de seis algarismos distintos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5 e 7 de modo que os algarismos pares nunca fiquem juntos?

C.4 Uma fileira de sete cadeiras de um cinema será ocupada por quatro homens e três mulheres. De quantos modos diferentes essas pessoas podem ocupar esses lugares de modo que na primeira e na última cadeira não sente uma mulher?

C.5 Usando n símbolos distintos, criou-se um código onde cada permutação simples desses n símbolos representa uma das 26 letras do alfabeto. Qual é o menor valor possível de n de modo que todas as letras tenham uma representação nesse sistema de códigos?

C.6 Um teatro possui 680 lugares. Cada espectador que ocupar um desses lugares receberá um cupom com um número, representado por n algarismos distintos, para concorrer a um prêmio. Qual é o menor valor possível de n, $n \in \mathbb{N}$, de modo que cada um dos 680 espectadores receba um só cupom, que não haja dois cupons com o mesmo número e que cada número seja formado pelos algarismos 1, 2, 3, ..., n?

Questões dos vestibulares

V.1 (U. Taubaté-SP) Numa estante existem três livros de história, três de matemática e um de geografia. Se se deseja sempre um livro de história em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses sete livros é:

a) 720 b) 36 c) 81 d) 126 e) n.d.a.

V.2 (Fuvest-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:

a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

V.3 (FEI-SP) Obter o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

V.4 (FGV-SP) Um inspetor visita seis máquinas diferentes durante o dia. A fim de evitar que os operários saibam quando ele os irá inspecionar, o inspetor varia a ordem de suas visitas. Essas visitas poderão ser feitas em:

a) 6 diferentes ordens.
b) 12 diferentes ordens.
c) 36 diferentes ordens.
d) 365 diferentes ordens.
e) 720 diferentes ordens.

V.5 (FGV-SP) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. De quantos modos podemos permutá-los de modo que os algarismos ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

a) 60 b) 120 c) 150 d) 181 e) 240

Capítulo 26

Permutação com elementos repetidos

1. Conceituação

Quantos anagramas podemos formar com a palavra BATATA?

Essa palavra é composta por seis letras. Se todas as letras fossem distintas, então teríamos 6! anagramas; porém, como há letras repetidas, o número de anagramas é certamente menor do que 6!. Para calcular esse número, vamos indexar (colocar índice) as letras iguais: $B\ A_1\ T_1\ A_2\ T_2\ A_3$, para podermos raciocinar com essas letras, como se fossem elementos distintos.

Consideremos um anagrama dessa palavra, por exemplo: $B\ A_1\ A_2\ A_3\ T_1\ T_2$. Quantas permutações podemos efetuar com essas letras, sem alterar esse anagrama?

Note que, quando permutamos as letras iguais, o anagrama não se altera. Por exemplo:

$$B\ A_2\ A_3\ A_1\ T_1\ T_2 \text{ e } B\ A_3\ A_2\ A_1\ T_2\ T_1$$

são anagramas iguais.

Assim sendo, o número de permutações que podem ser feitas sem alterar o anagrama é:

$$\underbrace{3!}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{permutações}\\ \textbf{de } A_1,\, A_2 \textbf{ e } A_3.}} \cdot \underbrace{2!}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{permutações}\\ \textbf{de } T_1 \textbf{ e } T_2.}}$$

Repetindo esse raciocínio para cada anagrama que podemos formar, temos:

k anagramas (todos os anagramas da palavra BATATA)

Anagramas	Total de permutações sem alterar o anagrama
$BA_1A_2A_3T_1T_2$	3!2!
$A_1BA_2A_3T_1T_2$	3!2!
$T_1BA_1A_2T_2A_3$	3!2!
⋮	⋮
$BA_1T_1A_2T_2A_3$	3!2!

Perceba assim que as 6! permutações das letras da $BA_1T_1A_2T_2A_3$ podem ser separadas em k grupos de 3!2! permutações cada um, de modo que cada grupo corresponda a um único anagrama.

Assim sendo, somando os k produtos iguais a 3!2! da segunda coluna da tabela anterior, obtemos o total de permutações dos elementos B, A_1, T_1, A_2, T_2 e A_3. Isto é:

$$k \cdot 3!2! = 6! \therefore k = \frac{6!}{3!2!} \therefore k = 60.$$

Portanto, a palavra BATATA apresenta sessenta anagramas.

1.1. Cálculo do número de permutações com elementos repetidos

Consideremos:

n_1 elementos iguais a a_1,
n_2 elementos iguais a a_2,
n_3 elementos iguais a a_3,
$\vdots$
n_k elementos iguais a a_k,

de modo que $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$ e $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, isto é:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\substack{n_1\\ \textbf{elementos}}},\ \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{\substack{n_2\\ \textbf{elementos}}},\ \underbrace{a_3, a_3, \ldots, a_3}_{\substack{n_3\\ \textbf{elementos}}}, \ldots,\ \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{\substack{n_k\\ \textbf{elementos}}}}^{n \textbf{ elementos}}.$$

O número de permutações desses n elementos é indicado por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$ e calculado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA.

Resolução

A palavra apresenta um total de sete letras, com três letras A, duas letras R, uma letra G e uma letra F.

Assim, temos $P_7^{(3, 2, 1, 1)} = \frac{7!}{3!2!1!1!}$.

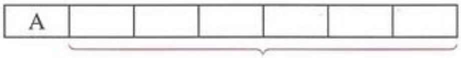
Para simplificar a notação, indicamos esse número simplesmente por $P_7^{(3, 2)} = \frac{7!}{3!2!} = 420$.

Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que comparecem uma única vez na palavra.
Portanto, a palavra GARRAFA possui 420 anagramas.

R.2 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA que começam pela letra A.

Resolução

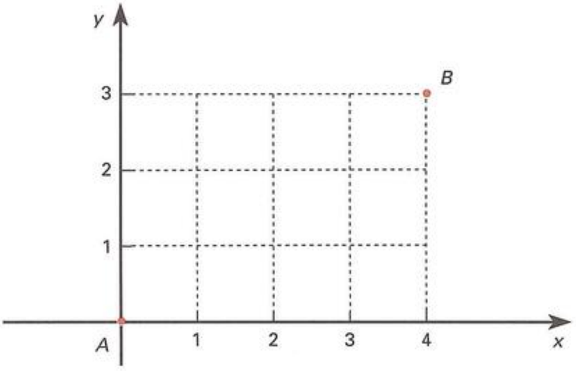
Fixando uma letra A na primeira posição, sobram as letras G, R, R, A, F e A, que devem ser distribuídas nas seis posições posteriores:



$$P_6^{(2, 2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

Nota: uma dúvida muito comum é "devemos ou não multiplicar o resultado 180 por 3?", pois há três letras A. A resposta é **não**. Porque, se substituirmos o A da primeira posição por outro A da palavra, obteremos os mesmos anagramas.
Logo, há 180 anagramas que começam por A.

R.3 Na figura abaixo, quantos caminhos diferentes podem ser percorridos do ponto A ao ponto B, deslocando uma unidade de cada vez para cima ou para a direita?



Resolução

Para nos deslocarmos de A para B, nas condições do problema, devemos percorrer 3 unidades para cima e 4 unidades para a direita.

Indiquemos por d cada unidade para a direita e por c cada unidade para cima.

O número possível de caminhos é igual ao número de seqüências que podem ser formadas com as sete letras: d, d, d, d, c, c, c. Isto é $P_7^{(4,\,3)} = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4, B.7, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, B.5, B.6, C.3, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Determine o número de anagramas da palavra VIOLINO.

B.2 Qual é o número de anagramas da palavra BANANA?

B.3 Obtenha o número de anagramas da palavra TAMPA.

B.4 Quantos anagramas da palavra BARRAR começam por R?

B.5 Encontre o número de anagramas da palavra DEZENA que começam por vogal.

B.6 Ache o total de anagramas da palavra PAPAGAIO que terminam por vogal.

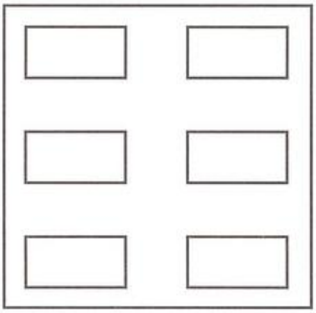
B.7 Quantos anagramas da palavra RETRATAR começam e terminam por vogal?

Exercícios complementares

C.1 Quantas soluções (x, y, z), com $\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$, possui a equação $x + y + z = 7$? **Sugestão:** indicando cada unidade pelo símbolo "|", podemos indicar $2 + 1 + 4$ por || + | + ||||; $3 + 0 + 4$ por ||| + + ||||; $0 + 1 + 6$ por + | + ||||||; etc.

C.2 Um sistema de códigos é formado por seqüências compostas pelos símbolos + e −. Cada seqüência contém n símbolos iguais a + e dois símbolos iguais a −. Qual é o mínimo valor de n de modo que cada uma das 26 letras do alfabeto e cada um dos dez algarismos do nosso sistema decimal sejam representados por uma dessas seqüências?

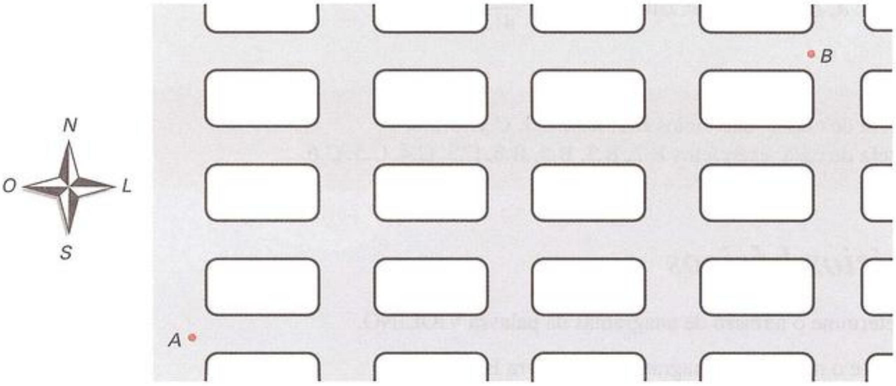
C.3 Num teste psicológico, uma criança dispõe de duas cores de tinta (azul e vermelha) e um cartão (ver figura) apresentando seis quadrinhos. O teste consiste em pintar os quadrinhos de modo que pelo menos quatro deles sejam vermelhos. De quantos modos diferentes o cartão pode ser pintado?



C.4 Lançando-se uma moeda seis vezes, quantas seqüências diferentes de resultados apresentam quatro caras e duas coroas?

C.5 Lançando-se uma moeda cinco vezes, quantas seqüências diferentes de resultados apresentam no mínimo três caras?

C.6 A figura mostra um mapa de uma certa região:



Uma pessoa deseja deslocar-se de A para B andando sempre para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes podem ser feitos?

Questões dos vestibulares

V.1 (U. E. Londrina-PR) Usando uma vez a letra A, uma vez a letra B e $n - 2$ vezes a letra C, podemos formar vinte anagramas diferentes com n letras em cada anagrama. O valor de n é:
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

V.2 (UFSC) Quantos números pares de cinco algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?
a) 12 b) 30 c) 6 d) 24 e) 18

V.3 (ITA-SP) O número de soluções (x, y, z, w), $\{x, y, z, w\} \subset \mathbb{N}$, da equação $x + y + z + w = 5$ é:
a) 36 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

Capítulo 27

Combinação simples

1. Conceituação

Dado o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todos os subconjuntos de I com três elementos:

$$\{a, b, c\}$$
$$\{a, b, d\}$$
$$\{a, c, d\}$$
$$\{b, c, d\}$$

Tais subconjuntos são chamados de "**combinações simples** dos quatro elementos de I tomados três a três". Ou seja, uma combinação simples de três elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e **não** pela ordem de apresentação desses elementos.

Exemplos

a) $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

b) $\{b, c, d\} = \{c, b, d\}$ **(a ordem dos elementos não altera o conjunto)**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Chama-se "**combinação simples** de p elementos de I" todo subconjunto de I formado por p elementos.

Exercícios resolvidos

R.1 Descrever todas as combinações simples que podem ser formadas com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d, e\}$ tomados dois a dois.

Resolução

Devemos obter todos os subconjuntos de I formados por dois elementos:

$$\{a, b\} \ \{a, c\} \ \{a, d\} \ \{a, e\} \ \{b, c\}$$
$$\{b, d\} \ \{b, e\} \ \{c, d\} \ \{c, e\} \ \{d, e\}$$

Note, portanto, que obtivemos dez combinações. O número de combinações dos cinco elementos tomados dois a dois é indicado por $C_{5,2}$.

Logo, $C_{5,2} = 10$.

R.2 Descrever todas as combinações simples que podem ser formadas com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d, e\}$ tomados um a um.

Resolução

Devemos obter todos os subconjuntos unitários de I: $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$.
Assim sendo, temos que $C_{5,1} = 5$.

R.3 Descrever todas as combinações simples dos elementos de $I = \{a, b, c, d, e\}$ tomados zero a zero.

Resolução

Devemos obter todos os subconjuntos de I formados por zero elemento. Sabemos que existe apenas um subconjunto de I com zero elemento: o vazio ($\varnothing$). Logo, $C_{5,0} = 1$.

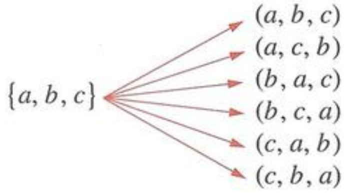
1.1. Cálculo do número de combinações simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

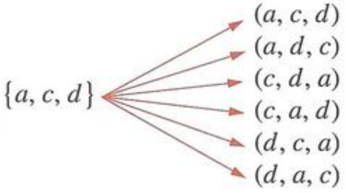
Para efetuar esse cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

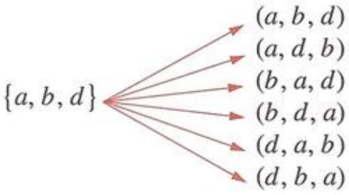
Voltemos ao exemplo introdutório desse assunto. As combinações simples dos elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três são: $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$.

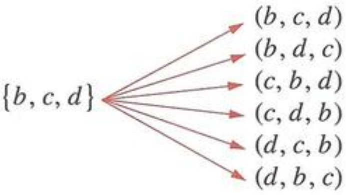
Temos então $C_{4,3} = 4$.

Vejamos agora quantos arranjos simples de três elementos podemos formar com cada uma dessas combinações:









Note que cada combinação simples de três elementos gera 3! arranjos simples de três elementos. Podemos então relacionar os números $C_{4,3}$ e $A_{4,3}$ através da seguinte regra de três:

Número de combinações simples de quatro elementos tomados três a três		Número de arranjos simples de quatro elementos tomados três a três
1	$\longleftrightarrow$	$3!$
$C_{4,3}$	$\longleftrightarrow$	$A_{4,3}$

$$\therefore C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{3!}.$$

Podemos generalizar o resultado anterior do seguinte modo: seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos e seja p, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.

O número de combinações simples dos n elementos tomados p a p é indicado por $C_{n,p}$ e pode ser obtido através da regra de três:

Número de combinações simples de n elementos tomados p a p		**Número de arranjos simples de n elementos tomados p a p**
1	$\longleftrightarrow$	$p!$
$C_{n,p}$	$\longleftrightarrow$	$A_{n,p}$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \quad \therefore C_{n,p} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$\therefore \quad \boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Exercícios resolvidos

R.4 Calcular:

a) $C_{6,4}$ b) $C_{7,3}$ c) $C_{5,5}$ d) $C_{5,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, temos:

a) $C_{6,4} = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 15;$

b) $C_{7,3} = \dfrac{7!}{3!\,(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35;$

c) $C_{5,5} = \dfrac{5!}{5!\,(5-5)!} = \dfrac{5!}{5!0!} = \dfrac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} = 1;$

d) $C_{5,0} = \dfrac{5!}{0!\,(5-0)!} = \dfrac{5!}{0!5!} = \dfrac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} = 1.$

R.5 Calcular o valor da expressão $E = C_{5,3} + A_{4,2} - P_3$.

Resolução

$$E = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} + \frac{4!}{(4-2)!} - 3! \therefore E = \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{2!} - 3!$$

$$\therefore E = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} - 3 \cdot 2 \cdot 1 \therefore E = 10 + 12 - 6 = 16.$$

1.2. Interpretação do símbolo $C_{0,0}$

Calculando $C_{0,0}$ pela fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, temos:

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1.$$

A interpretação desse resultado é: o número de subconjuntos do conjunto $I = \varnothing$ formados por zero elemento é 1. De fato, sabemos que o conjunto $I = \varnothing$ possui um único subconjunto com zero elemento: é o próprio $\varnothing$. Portanto temos $C_{0,0} = 1$.

Exercícios resolvidos

R.6 Para que valores de n existe o número $C_{n,3}$?

Resolução

Existe tal número para qualquer n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

R.7 Para que valor de p existe o número $C_{0,p}$?

Resolução

Existe tal número somente para $p = 0$.

R.8 Resolver a equação $C_{n,2} = 10$.

Resolução

Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

$$C_{n,2} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{2!\,(n-2)\,!} = 10$$

$$\therefore \frac{n\,(n-1)\,\cancel{(n-2)\,!}}{2 \cdot 1\,\cancel{(n-2)\,!}} = 10 \therefore n^2 - n = 20 \therefore n^2 - n - 20 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos $n = 5$ ou $n = -4$ **(não convém).**
Logo, $S = \{5\}$.

R.9 Sendo $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, sob que condições se tem $C_{n,p} = A_{n,p}$?

Resolução

$$C_{n,p} = A_{n,p} \Rightarrow \frac{\cancel{n!}}{p!\,\cancel{(n-p)\,!}} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-p)\,!}}$$

$$\therefore \frac{1}{p!} = 1 \therefore p! = 1 \Rightarrow p = 0 \text{ ou } p = 1.$$

Logo, para que $C_{n,p} = A_{n,p}$, devemos ter $p = 0$ ou $p = 1$.

R.10 Resolver a equação $6C_{n,3} + A_{n,2} = \dfrac{P_n}{(n-1)\,!}$.

Resolução

Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

$$6C_{n,3} + A_{n,2} = \frac{P_n}{(n-1)\,!} \Rightarrow 6 \cdot \frac{n!}{3!\,(n-3)\,!} + \frac{n!}{(n-2)\,!} = \frac{n!}{(n-1)\,!}$$

$$\therefore \frac{\cancel{6}n\,(n-1)\,(n-2)\,\cancel{(n-3)\,!}}{\cancel{6}\,\cancel{(n-3)\,!}} + \frac{n\,(n-1)\,\cancel{(n-2)\,!}}{\cancel{(n-2)\,!}} = \frac{n\,\cancel{(n-1)\,!}}{\cancel{(n-1)\,!}}$$

$$\therefore \cancel{n}(n-1)\,(n-2) + \cancel{n}(n-1) = \cancel{n}$$ **(como $n \neq 0$, pois $n \geqslant 3$, podemos dividir ambos os membros por n)**

$$\therefore (n-1)(n-2) + n - 1 = 1$$

$$\therefore n^2 - 2n - n + 2 + n - 1 - 1 = 0 \therefore n^2 - 2n = 0 \therefore n(n-2) = 0.$$

Resolvendo essa equação, temos:

$n = 0$ **(não convém)** ou $n = 2$ **(não convém).**

Logo, $S = \varnothing$.

2. Critério para diferenciar arranjo de combinação

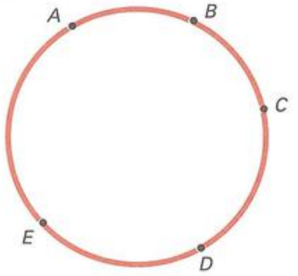
Quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, nos deparamos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações? Para eliminar essa dúvida, vamos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento:

I. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esse agrupamento é um **arranjo**.

II. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento é uma **combinação**.

Exercícios resolvidos

R.11 Quantos triângulos ficam determinados pelos pontos distintos A, B, C, D, E da circunferência abaixo?



Resolução

Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices do triângulo) não-colineares (não-pertencentes a uma mesma reta). Como não existem três pontos colineares dentre os pontos A, B, C, D, E, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.

Agora, a dúvida: um agrupamento de três pontos para determinar um triângulo é um arranjo ou uma combinação?

Vamos aplicar o **critério diferenciador** entre arranjo e combinação.

Formemos um agrupamento de três pontos distintos e, a seguir, mudemos a ordem de apresentação de seus elementos:

$$\text{Triângulo } ABC = \text{Triângulo } BAC.$$

Como a mudança na ordem das letras **não** altera o triângulo, temos que esses agrupamentos são combinações. Logo, o número de triângulos é dado por $C_{5,3}$, isto é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10.$$

R.12 Uma comissão de três membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

Resolução

Como a ordem dos elementos componentes **não** altera a comissão, temos que uma comissão é uma **combinação**. Logo, o número de comissões é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35.$$

R.13 Uma comissão de quatro homens e três mulheres deve ser escolhida dentre seis homens e cinco mulheres. De quantos modos diferentes pode-se escolher a comissão, sabendo-se que os membros dessa comissão terão funções idênticas?

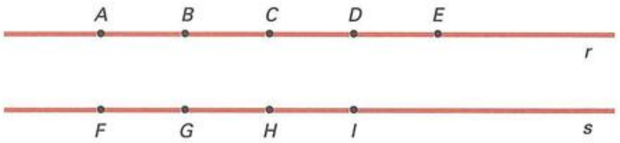
Resolução

Devemos escolher quatro homens dentre seis **e** três mulheres dentre cinco. Pelo princípio fundamental de contagem, isso pode ser feito de $C_{6,4} \cdot C_{5,3}$ modos diferentes, isto é:

$$C_{6,4} \cdot C_{5,3} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} \cdot \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 150.$$

R.14 Quantos triângulos ficam determinados por nove pontos distintos, sendo que cinco deles pertencem a uma reta r e os outros quatro pertencem a uma reta s ($s \not\equiv r$) paralela a r?

Resolução



Um triângulo fica determinado por três pontos não-colineares. Assim sendo, algumas combinações de três dentre os nove pontos determinam triângulos e outras não. Por exemplo, a combinação ABF determina um triângulo, enquanto a combinação ABC não determina um triângulo.

Podemos resolver esse problema de dois modos diferentes.

Primeiro modo

Vamos calcular todas as combinações dos nove pontos três a três, subtraindo desse resultado o total de combinações que não determinam triângulos. Isto é:

$$C_{9,3} - \underbrace{C_{5,3}}_{\textbf{Pontos da reta } r} - \underbrace{C_{4,3}}_{\textbf{Pontos da reta } s} = 84 - 10 - 4 = 70.$$

Logo, ficam determinados setenta triângulos.

Segundo modo

Um triângulo fica determinado se escolhermos dois pontos numa reta e um ponto na outra, isto é:

- 2 pontos em r **e** 1 ponto em $s \Rightarrow C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$

ou $\leftarrow \oplus$

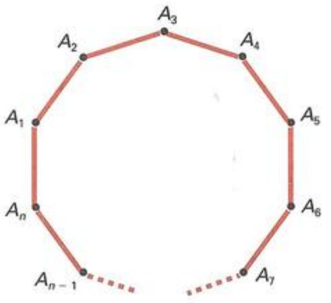
- 1 ponto em r **e** 2 pontos em $s \Rightarrow C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 5 \cdot 6 = 30$.

Logo, o número de triângulos é $40 + 30 = 70$.

R.15 Provar que "o número d de diagonais de um polígono convexo de n vértices é dado por $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$".

Resolução

Se o polígono possui n vértices, então possui também n lados.



Algumas combinações dos n vértices dois a dois determinam diagonais; outras, não. Por exemplo, a combinação A_1A_3 determina uma diagonal, enquanto a combinação A_1A_2 não determina diagonal, mas determina um lado do polígono. O número de combinações que não determinam diagonais é exatamente o número n de lados do polígono. Então, para o cálculo do número de diagonais, basta calcularmos o número de combinações dos n vértices dois a dois e do resultado subtrair n.

Assim, temos:

$$d = C_{n,2} - n$$

$$\therefore d = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n\,(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1\,\cancel{(n-2)!}} - n \therefore d = \frac{n\,(n-1)}{2} - n = \frac{n\,(n-1) - 2n}{2}$$

$$\therefore d = \frac{n[\,(n-1) - 2\,]}{2} = \frac{n\,[n-1-2]}{2} \therefore d = \frac{n\,(n-3)}{2}. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.4, B.6, B.9, B.10, B.12, B.15, B.16, B.17, C.2, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.1, B.2, B.3, B.7, B.8, B.11, B.13, B.14, B.18, B.19, C.1, C.3, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Descreva todas as combinações simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c\}$ tomados dois a dois.

B.2 Apresente todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c\}$ tomados dois a dois.

B.3 Baseando-se nos exercícios B.1 e B.2, determine x tal que $xC_{3,2} = A_{3,2}$.

B.4 Determine:
a) $C_{7,5}$ b) $C_{5,4}$ c) $C_{8,8}$ d) $C_{9,1}$

B.5 Calcule o valor da expressão $4C_{6,2} + A_{5,3} - 3P_3$.

B.6 Resolva a equação $C_{n,2} = 15$.

B.7 Obtenha o conjunto dos valores de n tais que $C_{n,3} = 5n$.

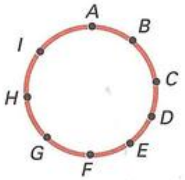
B.8 Qual é o conjunto solução da equação $C_{n,3} + C_{n+1,2} = 5n$?

B.9 Sendo $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, sob que condições ocorre a igualdade: $C_{n,p} = C_{n+1,p+1}$?

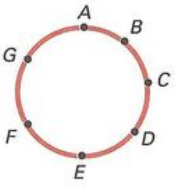
B.10 Resolva a equação $C_{x,3} = 3A_{x,3}$.

B.11 Obtenha m tal que $\dfrac{C_{m,3}}{C_{m-1,3}} = \dfrac{7}{4}$.

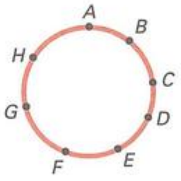
B.12 Considere nove diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura). Quantas retas ficam determinadas por esses nove pontos?



B.13 Considere sete diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura). Quantos triângulos ficam determinados por esses sete pontos?



B.14 Considere oito diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura). Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses oito pontos?



B.15 Uma comissão de cinco membros será escolhida dentre oito pessoas. Sabendo que todos os membros da comissão terão cargos idênticos, calcule o número de comissões diferentes que podem ser formadas.

B.16 Numa universidade será formada uma comissão composta por quatro biólogos e três médicos, escolhida dentre sete biólogos e oito médicos. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada, sabendo que todos os membros da comissão terão cargos idênticos?

B.17 Calcule o número de diagonais do octógono convexo.

B.18 Qual é o número de diagonais de um polígono convexo de 25 lados?

B.19 Quantos subconjuntos de três elementos possui um conjunto de cinco elementos?

Exercícios complementares

C.1 A diretoria de uma firma é formada por sete diretores brasileiros e quatro japoneses. Quantas comissões de três brasileiros e três japoneses podem ser formadas?

C.2 O número de triângulos determinados por sete pontos distintos, sendo que quatro deles pertencem a uma reta r e os outros três pertencem a outra reta s ($r \not\equiv s$) paralela a r, é:
a) 60 b) 30 c) 20 d) 10 e) 5

C.3 Um conjunto A possui n elementos, sendo $n \geqslant 4$. O número de subconjuntos de A com quatro elementos é:

a) $\dfrac{n!}{24\,(n-4)\,!}$

b) $\dfrac{n!}{(n-4)\,!}$

c) $(n-4)!$

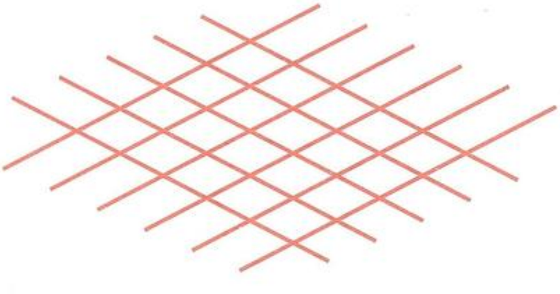
d) $n!$

e) $4!$

C.4 Um químico possui dez tipos de substância. De quantos modos possíveis poderá misturar seis dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

C.5 Dentre seis números positivos e seis números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?
a) 255 b) 960 c) 30 d) 625 e) 720

C.6 Seis retas paralelas distintas de um plano se interceptam com outras cinco retas paralelas distintas desse plano (conforme figura). Calcule o número de paralelogramos cujos lados estão contidos nessa rede.



Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) Em uma classe de doze alunos, um grupo de cinco será selecionado para uma viagem. De quantas maneiras distintas esse grupo poderá ser formado, sabendo que, entre os doze alunos, dois são irmãos e só poderão viajar se estiverem juntos?

a) 30240 b) 594 c) 462 d) 408 e) 372

V.2 (UFGO) De um grupo de dez professores, dos quais exatamente cinco são de matemática, deve ser escolhida uma comissão de quatro professores para elaborar uma determinada prova de seleção. De quantas formas diferentes esses quatro professores podem ser escolhidos, se em cada comissão deve haver pelo menos um professor de matemática?

V.3 (PUC/Campinas-SP) O valor de $A_{3,2} + C_{5,2} - P_3$ é:

a) 18 b) 15 c) 13 d) 12 e) 10

V.4 (Fesp) Um vendedor de livros tem oito livros de assuntos distintos para distribuir a três professores A, B e C. De quantos modos poderá fazer a distribuição, dando três livros ao professor A, quatro livros ao professor B e um livro ao professor C?

a) 1232 b) 280 c) 730 d) 680 e) 480

V.5 (FGV-SP) Uma equipe de pesquisa da universidade deve ser formada por um engenheiro e quatro técnicos. Com cinco engenheiros e dez técnicos, o número de diferentes equipes que poderão ser formadas é:

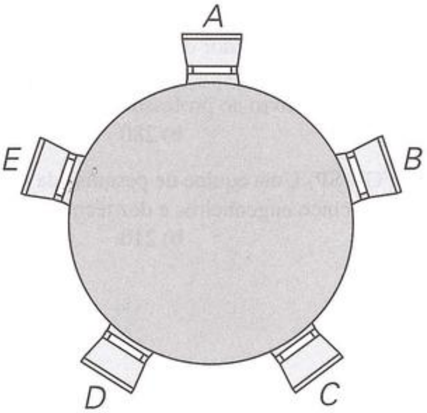
a) 15 b) 210 c) 1050 d) 2520 e) 25200

Capítulo 28

Permutação circular

1. Conceituação

Uma reunião de presidentes de países da América do Sul será realizada em uma mesa redonda. Participarão dessa reunião os presidentes da Argentina (A), do Brasil (B), do Chile (C), do Paraguai (P) e do Equador (E). Uma preocupação do Itamarati é com a disposição dos presidentes em torno da mesa. Em quantas ordens diferentes podem ser dispostos os presidentes em volta da mesa? Para podermos raciocinar, vamos imaginar uma determinada disposição, como a mostrada ao lado.

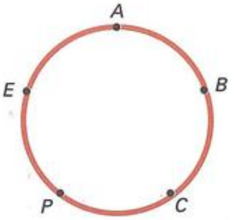


Tal disposição dos elementos A, B, C, P e E em torno da mesa é uma **permutação circular** desses cinco elementos. Note que, se girarmos no sentido horário:

I. partindo de A, obteremos a permutação em linha $ABCPE$;
II. partindo de B, obteremos a permutação em linha $BCPEA$;
III. partindo de C, obteremos a permutação em linha $CPEAB$;
IV. partindo de P, obteremos a permutação em linha $PEABC$;
V. partindo de E, obteremos a permutação em linha $EABCP$.

Isto é, as cinco permutações em linha, $ABCPE$, $BCPEA$, $CPEAB$, $PEABC$ e $EABCP$, correspondem a uma única permutação circular:

$$\left.\begin{matrix} ABCPE \\ BCPEA \\ CPEAB \\ PEABC \\ EABCP \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow$$



A partir dessa correspondência, podemos relacionar o número de permutações em linha com o número de permutações circulares dos elementos A, B, C, P e E, através da seguinte regra de três:

Número de permutações simples em linha de cinco elementos distintos		**Número de permutações circulares de cinco elementos distintos**
5	⟷	1
5!	⟷	x

$$\therefore\ x = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5}\cdot 4!}{\cancel{5}} = 4!$$

Indicando o número de permutações circulares de cinco elementos distintos por $P_{c(5)}$, temos:

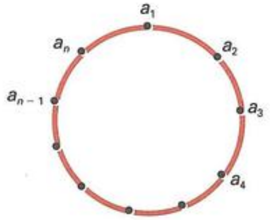
$$P_{c(5)} = 4! = 24.$$

Portanto os cinco presidentes podem ocupar os lugares em volta da mesa em 24 disposições diferentes.

1.1. Cálculo do número de permutações circulares de *n* elementos distintos

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações circulares desses n elementos é indicado por $P_{c(n)}$ e calculado como apresentamos a seguir.

Consideremos uma determinada permutação circular desses n elementos. Por exemplo:



Tal permutação circular corresponde a n permutações em linha, se girarmos no sentido horário. São elas:

- partindo de a_1, temos $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$;
- partindo de a_2, temos $a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_1$;
- partindo de a_3, temos $a_3, a_4, a_5, ..., a_1, a_2$;

⋮

- partindo de a_n, temos $a_n, a_1, a_2, a_{n-2}, a_{n-1}$.

Vemos então que n permutações simples em linha correspondem a uma única permutação circular. Podemos por isso relacionar o número de permutações simples em linha com o número de permutações circulares de n elementos distintos, através da seguinte regra de três:

Número de permutações simples em linha de *n* elementos distintos		**Número de permutações circulares de *n* elementos distintos**
n	$\longleftrightarrow$	1
$n!$	$\longleftrightarrow$	$P_{c(n)}$

$$P_{c(n)} = \frac{n!}{n} = \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)!$$

$$\therefore P_{c(n)} = (n-1)!$$

Exercícios resolvidos

R.1 Em quantas disposições diferentes seis pessoas podem se sentar em volta de uma mesa redonda?

Resolução

$$P_{c(6)} = (6-1)! = 5! = 120.$$

Logo, são possíveis 120 disposições.

R.2 Algumas crianças estão brincando de roda, isto é, dão-se as mãos formando uma roda. É possível formar rodas com essas crianças em 720 disposições diferentes. Quantas crianças estão brincando?

Resolução

Seja n o número de crianças. Devemos ter:

$$P_{c(n)} = 720 \Rightarrow (n-1)! = 720 \therefore (n-1)! = 6! \therefore n-1 = 6 \therefore n = 7.$$

Assim, sete crianças formarão a roda.

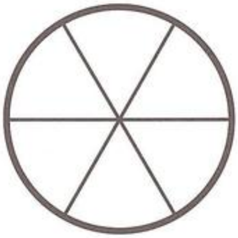
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.2.

Exercícios básicos

B.1 Numa pista circular será disputada uma prova de atletismo. Cinco juízes serão colocados em cinco pontos distintos dessa pista. Quantas são as possíveis disposições para esses juízes?

B.2 Uma roleta é dividida em seis setores (conforme a figura). Em cada setor será colocado um dos números, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, em qualquer disposição. Em quantas disposições diferentes podem ser distribuídos esses números?



B.3 Algumas pérolas artificiais, de cores diferentes entre si, formarão um colar sem fecho. Sabendo que com essas pérolas o colar pode ser feito de 5040 maneiras diferentes, calcule o número de pérolas.

B.4 Num parque de diversões, uma roda-gigante apresenta n cadeiras que devem ser pintadas uma de cada cor e todas com cores diferentes entre si. Sabendo que as cores podem ser apresentadas em 720 disposições diferentes, determine n.

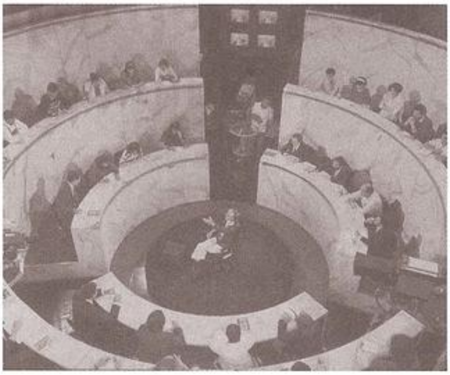
B.5 Quatro homens e três mulheres vão se sentar em torno de uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes isso pode ser feito, se pessoas do mesmo sexo devem permanecer juntas?

B.6 Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

Exercícios complementares

C.1 Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos e dois filhos briguentos não fiquem juntos?

C.2 Em São Paulo há um programa de entrevistas na tevê *Cultura*, chamado "Roda Vida". Os entrevistadores sentam-se em volta de uma grande roda e o entrevistado senta-se no centro da roda em uma cadeira giratória. Os seis entrevistadores do próximo programa serão: dois do jornal *Folha de S. Paulo*, dois do jornal *O Estado de S. Paulo* e dois do jornal *O Globo*. Sabendo-se que os jornalistas serão dispostos em torno da roda de modo que colegas de jornal permaneçam juntos, quantas disposições serão possíveis?



NANI GÓIS/ABRIL IMAGENS

Questões dos vestibulares

V.1 (Santa Cecília-SP) O número de maneiras em que podemos dispor vinte pessoas em torno de uma mesa redonda é:

a) 20!   b) $\frac{20!}{2}$ c) 19!   d) $\frac{19!}{2}$ e) n.d.a.

V.2 (Osec-SP) O número de maneiras diferentes segundo as quais um casal, dois filhos e uma filha podem sentar-se em torno de uma mesa circular, com a condição de que os dois filhos não fiquem juntos, é:

a) 6   b) 12   c) 24   d) 60   e) n.d.a.

V.3 (PUC-SP) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

a) 15   b) 18   c) 24   d) 16   e) 12

Capítulo 29

Número binomial

1. Conceituação

Como vimos anteriormente, o número de combinações de n elementos tomados p a p é indicado pelo símbolo $C_{n,\,p}$. A partir de agora, indicaremos esse número também pelo símbolo $\binom{n}{p}$. Essa nova notação pode também ser lida como "número binomial de numerador n e denominador p" ou, simplesmente, "número binomial n sobre p". Assim sendo, temos:

$$\binom{n}{p} = C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}, \quad \text{para } \{n, p\} \subset \mathbb{N},\ p \leqslant n.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular os números binomiais:

a) $\binom{5}{3}$ b) $\binom{8}{2}$ c) $\binom{4}{0}$ d) $\binom{0}{0}$

Resolução

a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$

b) $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 28$

c) $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1$

d) $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$

R.2 Sendo $n \in \mathbb{N}$, calcular:

a) $\binom{n}{0}$ b) $\binom{n}{n}$

Resolução

a) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}} = 1$

b) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}0!} = 1$

Notas

1. Todo binomial de denominador zero é igual a 1.
2. Todo binomial de numerador igual ao denominador é igual a 1.

2. Números binomiais complementares

Dois números binomiais que tiverem o mesmo numerador e cuja soma dos denominadores for igual ao numerador comum, são chamados de **números binomiais complementares**.

Exemplos

a) $\binom{7}{2}$ e $\binom{7}{5}$ são complementares.

b) $\binom{8}{0}$ e $\binom{8}{8}$ são complementares.

c) $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$, com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, são complementares.

3. Propriedades

I. Dois números binomiais complementares são iguais, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ para } \{n, p\} \subset \mathbb{N} \text{ e } p \leqslant n.$$

Demonstração

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \binom{n}{n-p}.$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$

b) $\binom{8}{0} = \binom{8}{8}$

II. Sendo $\{n, p, q\} \subset \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ e $q \leqslant n$, tem-se que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow \begin{array}{l} p = q \\ \text{ou} \\ p + q = n. \end{array}$

Exemplo

$$\binom{5}{p} = \binom{5}{2} \Leftrightarrow \begin{array}{l} p = 2 \\ \text{ou} \\ p + 2 = 5 \Rightarrow p = 3. \end{array}$$

III. **Relação de Stiffel:** sendo $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p + 1 \leqslant n$, tem-se que:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)\,!} + \frac{n!}{(p+1)\,!\,(n-p-1)\,!} =$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)\,(n-p-1)\,!} + \frac{n!}{(p+1)\,p!\,(n-p-1)\,!} =$$

$$= \frac{(p+1)\,n! + (n-p)\,n!}{p!\,(n-p-1)\,!\,(n-p)\,(p+1)} = \frac{n!\,(\cancel{p}+1+n-\cancel{p})}{p!\,(n-p-1)\,!\,(n-p)\,(p+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{(p+1)\,p!\,(n-p)\,(n-p-1)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$

b) $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \binom{11}{3}$

Exercícios resolvidos

R.3 Resolver a equação $C_{8,\,x+3} = C_{8,\,x+1}$.

Resolução

Em vez de impor a condição de existência, faremos a verificação da existência das combinações para cada valor de x encontrado:

$$C_{8,\,x+3} = C_{8,\,x+1} \Leftrightarrow \binom{8}{x+3} = \binom{8}{x+1} \quad \therefore\ x+3 = x+1 \Rightarrow \nexists\, x$$

ou $x + 3 + x + 1 = 8 \Rightarrow x = 2.$

Verificação

Lembremos que existe um binomial $\binom{n}{p}$ se, e somente se, $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.

Fazendo $x = 2$ na equação original, temos que $\binom{8}{5} = \binom{8}{5}$. Como os binomiais existem para $x = 2$, temos como conjunto solução: $S = \{2\}$.

R.4 Efetuar, usando a relação de Stiffel:

a) $\binom{6}{4} + \binom{6}{5}$ b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ c) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1}$

Resolução

a) $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$ b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$ c) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} = \binom{11}{1}$

R.5 Resolver a equação $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{x}$.

Resolução

Pela relação de Stiffel, devemos ter: $\binom{9}{x} = \binom{9}{4} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 4 \\ \text{ou} \\ x + 4 = 9 \end{array} \quad \therefore \begin{array}{l} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = 5. \end{array}$

Verificação

Para $x = 4$, $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$.

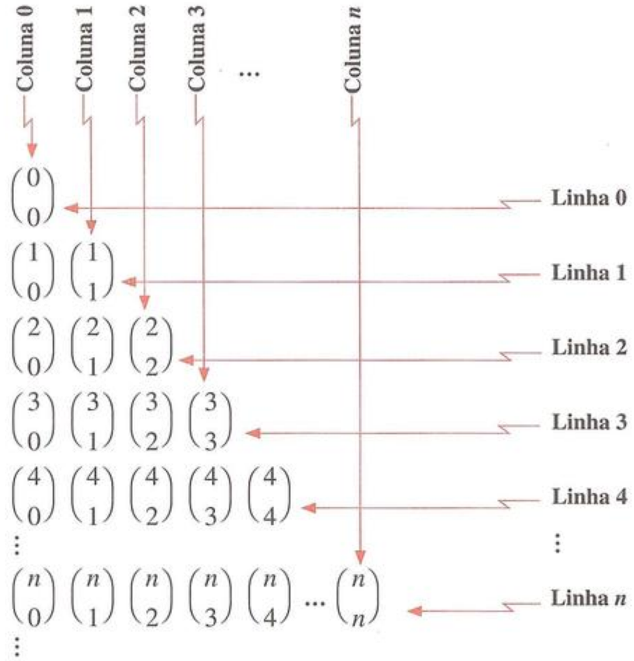
Como existem os binomiais, temos que 4 é raiz da equação.

Para $x = 5$, $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$.

Como existem os binomiais, temos que 5 é raiz da equação.
Logo, $S = \{4, 5\}$.

4. Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal nada mais é do que uma tabela de números binomiais, onde cada número $\binom{n}{p}$ está localizado na linha n e coluna p.



$$\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\vdots \\
\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \binom{n}{4} \cdots \binom{n}{n} \\
\vdots
\end{array}$$

SPL/STOCK PHOTOS

Blaise Pascal (1623-1662), matemático, filósofo, físico e escritor francês. Contribuiu para a matemática com trabalhos sobre variados temas, inclusive o cálculo de probabilidades.

Notas

1. O primeiro elemento de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de denominador zero é igual a 1.

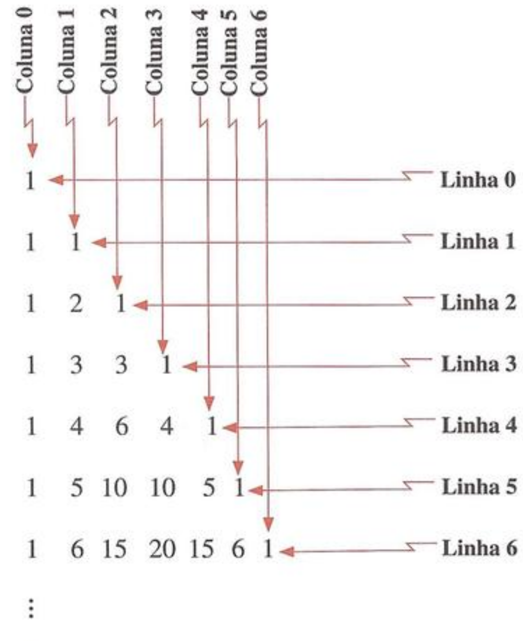
2. O último elemento de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de numerador igual ao denominador é igual a 1.

3. Pela relação de Stiffel, temos que a soma de dois binomiais consecutivos de uma linha é igual ao binomial localizado na linha seguinte, embaixo do segundo binomial somado.

Exemplos

a) $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$ b) $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$

Com as observações anteriores, podemos construir o triângulo de Pascal com os valores dos binomiais já calculados:


Coluna 0
Coluna 1
Coluna 2
Coluna 3
Coluna 4
Coluna 5
Coluna 6
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮
Linha 0
Linha 1
Linha 2
Linha 3
Linha 4
Linha 5
Linha 6

Exercícios resolvidos

R.6 Procurar, no triângulo de Pascal abaixo, os valores de:

a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{7}{4}$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
⋮

Resolução

O binomial $\binom{n}{p}$ está localizado na linha n e coluna p. (**Cuidado!** O triângulo começa na linha zero e coluna zero.)

Assim temos que:

a) O binomial $\binom{6}{3}$ está na linha 6 e coluna 3; logo, $\binom{6}{3} = 20$.

b) O binomial $\binom{7}{4}$ está na linha 7 e coluna 4; logo, $\binom{7}{4} = 35$.

R.7 A seqüência 1, 9, 36, x, y, 126, 84, 36, 9, 1 é uma linha do triângulo de Pascal. Determine x e y.

Resolução

A linha de número n do triângulo de Pascal possui $n + 1$ elementos. Como a linha apresentada possui 10 elementos, concluímos que se trata da linha de número 9. Logo, temos:

$x = \binom{9}{3}$. Lembremos que $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$. Como $\binom{9}{6} = 84$ foi apresentado na linha, temos que $x = 84$.

$$y = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 126.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.7, B.10.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, B.6, B.8, B.9, C.1, C.2, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Resolva a equação $C_{14,\,2x+1} = C_{14,\,x+4}$.

B.2 Determine o conjunto solução da equação $C_{x,\,5} = C_{x,\,3}$.

B.3 Efetue, usando a relação de Stiffel:

a) $\binom{11}{6} + \binom{11}{7}$

b) $\binom{18}{9} + \binom{18}{10}$

c) $\binom{n+5}{p+2} + \binom{n+5}{p+3}$, com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n + 2$.

B.4 Obtenha o conjunto dos valores de x, tais que $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \binom{11}{x}$.

B.5 Resolva a equação $\binom{8}{x} + \binom{8}{x+1} = \binom{9}{5}$.

B.6 Demonstre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a relação entre os números binomiais:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$$

B.7 Procure no triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{lllllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

os valores de:

a) $\binom{5}{3}$ b) $\binom{6}{4}$ c) $\binom{8}{5}$

B.8 A seqüência 1, 8, x, y, 70, y, x, 8, 1 é uma linha do triângulo de Pascal. Determine x e y.

B.9 Calcule o valor de x, sabendo que x é um elemento localizado na linha 12 e coluna 7 do triângulo de Pascal.

B.10 Uma linha do triângulo de Pascal possui treze elementos. Determine o termo médio dessa linha.

Exercícios complementares

C.1 Vale para o triângulo de Pascal a seguinte propriedade: a soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n. Por exemplo:

Linha zero $\longrightarrow$ 1 $\longrightarrow$ **Soma $2^0 = 1$**

Linha 1 $\longrightarrow$ 1 1 $\longrightarrow$ **Soma $2^1 = 2$**

Linha 2 $\longrightarrow$ 1 2 1 $\longrightarrow$ **Soma $2^2 = 4$**

Linha 3 $\longrightarrow$ 1 3 3 1 $\longrightarrow$ **Soma $2^3 = 8$**

Linha 4 $\longrightarrow$ 1 4 6 4 1 $\longrightarrow$ **Soma $2^4 = 16$**

$\vdots$

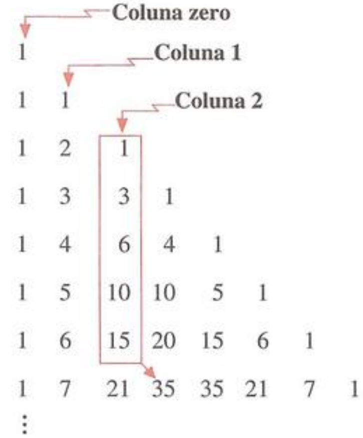
Calcule, de acordo com essa propriedade, o valor de cada expressão:

a) $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$

b) $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8}$

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$

C.2 Vale para o triângulo de Pascal a seguinte propriedade: a soma dos elementos da coluna p, desde o primeiro até o elemento da linha n, é igual ao elemento $\binom{n+1}{p+1}$. Por exemplo:


Coluna zero
Coluna 1
Coluna 2
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
⋮

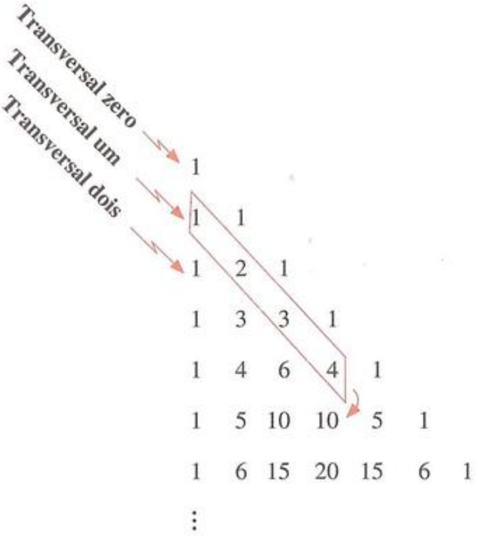
Isto é, $\underbrace{\binom{2}{2}}_{\mathbf{1}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\mathbf{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\mathbf{6}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\mathbf{10}} + \underbrace{\binom{6}{2}}_{\mathbf{15}} = \underbrace{\binom{7}{3}}_{\mathbf{35}}$.

Calcule de acordo com essa propriedade o valor de cada expressão:

a) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}$

b) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{k+r}{k}$, com $\{k, r\} \subset \mathbb{N}$.

C.3 Vale para o triângulo de Pascal a seguinte propriedade: a soma dos elementos da transversal n desde o primeiro até o elemento da coluna p é igual a $\binom{n+p+1}{p}$. Por exemplo:


Transversal zero
Transversal um
Transversal dois
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮

Isto é, $\underbrace{\binom{1}{0}}_{\mathbf{1}} + \underbrace{\binom{2}{1}}_{\mathbf{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\mathbf{3}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\mathbf{4}} = \underbrace{\binom{5}{3}}_{\mathbf{10}}$.

Calcule, de acordo com essa propriedade, o valor de cada expressão:

a) $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{4}$

b) $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots + \binom{k+r}{r}$, com $\{k, r\} \subset \mathbb{N}$

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Os valores de m que tornam iguais os números binomiais $\binom{11}{m-1}$ e $\binom{11}{2m-3}$ são:

a) $m = 1$ ou $m = 2$.
b) $m = 3$ ou $m = 4$.
c) $m = 2$ ou $m = 5$.
d) $m = 3$ ou $m = 2$.
e) Nenhuma das anteriores.

V.2 (FGV-SP) O símbolo $\binom{n}{p}$, $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq n$ representa um número binomial. Os valores de p de modo que $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{p}$ são:

a) $p = 4$.
b) $p = 4$ ou $p = 6$.
c) $p = 4$ ou $p = 5$.
d) $p = 3$ ou $p = 5$.
e) $p = 5$.

V.3 (UFPR) O valor de n de modo que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 1024$ é:

a) 5
b) 8
c) 10
d) 11
e) 12

Capítulo 30

Binômio de Newton

1. Introdução

Para resolver certos problemas de matemática, necessitamos de potências do tipo $(x + a)^n$, onde x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são:

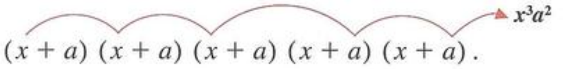
$$(x + a)^0 = 1; \qquad (x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2;$$
$$(x + a)^1 = x + a; \qquad (x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3.$$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, usando os conceitos que aprendemos com a análise combinatória, podemos deduzir uma expressão, relativamente simples, para desenvolver essas potências. Vejamos.

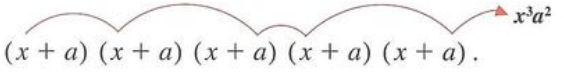
Consideremos a potência $(x + a)^5$. Para desenvolvê-la, devemos efetuar as seguintes multiplicações:

$$(x + a)\ (x + a)\ (x + a)\ (x + a)\ (x + a)\,.$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores (x ou a), escolhendo cada um deles em um dos fatores $(x + a)$ dessa expressão. Uma das possibilidades é:



Através dessa possibilidade obtemos o termo x^3a^2. Porém, existem outras possibilidades que resultam no termo x^3a^2. Por exemplo:



Quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para responder a essa pergunta, recorreremos à análise combinatória. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher: x em três dos cinco fatores $(x + a)$; e a nos outros dois. Note que, escolhido x em três fatores, a escolha de a fica automaticamente determinada nos fatores restantes. Assim, basta calcularmos o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco fatores. Esse número é $C_{5,3}$. Portanto, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes depois de efetuadas todas as multiplicações.

Raciocinando de maneira análoga, temos que:

- o termo x^5 aparecerá $C_{5,5}$ vezes;
- o termo x^4a aparecerá $C_{5,4}$ vezes;
- o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,2}$ vezes;
- o termo xa^4 aparecerá $C_{5,1}$ vezes;
- o termo a^5 aparecerá $C_{5,0}$ vezes.

Assim, podemos escrever:

$$(x + a)^5 = C_{5,5}x^5 + C_{5,4}x^4a + C_{5,3}x^3a^2 + C_{5,2}x^2a^3 + C_{5,1}xa^4 + C_{5,0}a^5,$$

isto é, $(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$.

2. Teorema do binômio de Newton

O matemático, físico e astrônomo inglês *sir* Isaac Newton demonstrou que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \dots + \binom{n}{n}x^0a^n,$$

em que x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$.

Nota: como $(x + \mathrm{a})^n = (a + x)^n$, o teorema de Newton pode ser apresentado sob a seguinte forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \dots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \dots + \binom{n}{n}x^na^0.$$

Isto é, segundo expoentes crescentes de x.

J. BURGESS/SPL - STOCK PHOTOS

Isaac Newton (1642-1727), físico, astrônomo e matemático inglês. Criador do cálculo diferencial e integral.

Exercícios resolvidos

R.1 Desenvolver a potência $(x + a)^4$.

Resolução

Pelo teorema de Newton, temos que:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0}x^0a^4 + \binom{4}{1}x^1a^3 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^3a + \binom{4}{4}x^4a^0.$$

Em vez de calcular cada um dos coeficientes binomiais, podemos usar o triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{l}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \leftarrow \textbf{Linha quatro} \\
\vdots
\end{array}$$

Logo, $(x + a)^4 = a^4 + 4xa^3 + 6x^2a^2 + 4x^3a + x^4$.

R.2 Desenvolver a potência $(2x + y^3)^5$.

Resolução

$$(2x + y^3)^5 = \binom{5}{0}(2x)^0(y^3)^5 + \binom{5}{1}(2x)^1(y^3)^4 + \binom{5}{2}(2x)^2(y^3)^3 + \binom{5}{3}(2x)^3(y^3)^2 +$$
$$+ \binom{5}{4}(2x)^4(y^3)^1 + \binom{5}{5}(2x)^5(y^3)^0.$$

Os coeficientes binomiais formam a linha cinco do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{1} & 5 & 10 & 10 & 5 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\
\hline
\vdots
\end{array} \leftarrow \textbf{Linha cinco}$$

Logo, temos $(2x + y^3)^5 = y^{15} + 5 \cdot 2xy^{12} + 10 \cdot 4x^2y^9 + 10 \cdot 8x^3y^6 + 5 \cdot 16x^4y^3 + 32x^5$.

Portanto, concluímos que $(2x + y^3)^5 = y^{15} + 10xy^{12} + 40x^2y^9 + 80x^3y^6 + 80x^4y^3 + 32x^5$.

R.3 Desenvolver a potência $(x - 2a)^4$.

Resolução

Para desenvolver essa potência, vamos considerá-la sob a seguinte forma: $[x + (-2a)]^4$.
Assim, temos que:

$$[x + (-2a)]^4 = \binom{4}{0}x^0(-2a)^4 + \binom{4}{1}x^1(-2a)^3 + \binom{4}{2}x^2(-2a)^2 +$$
$$+ \binom{4}{3}x^3(-2a)^1 + \binom{4}{4}x^4(-2a)^0.$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{1} & 4 & 6 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\
\hline
\vdots
\end{array} \leftarrow \textbf{Linha quatro}$$

Logo, temos $(x - 2a)^4 = 16a^4 - 4x \cdot 8a^3 + 6x^2 \cdot 4a^2 - 4x^3 \cdot 2a + x^4$.

Portanto, $(x - 2a)^4 = 16a^4 - 32xa^3 + 24x^2a^2 - 8x^3a + x^4$.

R.4 Resolver o seguinte sistema, onde x e y são números reais:

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -1. \end{cases}$$

Resolução

A segunda equação desse sistema pode ser escrita sob a forma $(x + y)^5 = -1$.

Logo, temos: $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ (x + y)^5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases} -$

$$\begin{array}{rcl} x & = & -2 \end{array}$$

Fazendo $x = -2$ na equação $x + y = -1$, temos $-2 + y = -1 \;\therefore\; y = 1$.

Logo, $x = -2$ e $y = 1$.

R.5 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 \cdot 3^5 + \binom{5}{1}2^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{2}2^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{3}2^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4}2^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{5}2^5 \cdot 3^0.$$

Resolução

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}x^na^0,$$

temos que $E = (2 + 3)^5 = 5^5 = 3125$.

R.6 Calcular o valor da expressão $E = \binom{4}{0}3^0 + \binom{4}{1}3^1 + \binom{4}{2}3^2 + \binom{4}{3}3^3 + \binom{4}{4}3^4$.

Resolução

Multiplicando cada parcela por 1^{n-p}, onde n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que $E = \binom{4}{0}3^0 \cdot 1^4 + \binom{4}{1}3^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}3^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{4}3^4 \cdot 1^0$.

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}x^na^0,$$

temos que $E = (3 + 1)^4 = 4^4 = 256$.

3. Somatório

Durante o estudo das progressões, vimos que o símbolo Σ (letra grega denominada "sigma") é utilizado nas ciências exatas para indicar um somatório.

Para rever essa notação, vamos desenvolver alguns somatórios.

Exercícios resolvidos

R.7 Calcular o somatório $\sum_{p=0}^{2}\binom{5}{p}$.

Resolução

A expressão $\sum_{p=0}^{2}\binom{5}{p}$ deve ser lida "somatório dos números binomiais $\binom{5}{p}$ com p variando no conjunto dos números naturais de 0 a 2".

Atribuindo a p os valores 0, 1 e 2, temos que:

$$\sum_{p=0}^{2}\binom{5}{p} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = 16.$$

R.8 Calcular o somatório $\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p$.

Resolução

Atribuindo a p os valores 0, 1, 2 e 3, temos que:

$$\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p = \binom{6}{0}2^0 + \binom{6}{1}2^1 + \binom{6}{2}2^2 + \binom{6}{3}2^3 = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 8 = 233.$$

R.9 Provar que $\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} 2^p = 3^{50}$.

Resolução

$$\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} 2^p = \binom{50}{0} 2^0 + \binom{50}{1} 2^1 + \binom{50}{2} 2^2 + \dots + \binom{50}{50} 2^{50}.$$

Multiplicando cada parcela dessa soma por 1^{n-p}, onde n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que:

$$\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} 2^p \cdot 1^{50-p} = \binom{50}{0} 2^0 \cdot 1^{50} + \binom{50}{1} 2^1 \cdot 1^{49} + $$
$$+ \binom{50}{2} 2^2 \cdot 1^{48} + \dots + \binom{50}{50} 2^{50} \cdot 1^0.$$

Comparando essa última expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^0 a^n + \binom{n}{1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} x^n a^0,$$

percebemos que $\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} 2^p = (2+1)^{50} = 3^{50}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3, B.5, B.6, B.8, B.11, B.12, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c), B.2 (c), B.4, B.7, B.9, B.10, B.13, B.14, B.15, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Aplique o teorema de Newton para desenvolver as potências:

a) $(x+a)^6$ b) $(2x+3)^3$ c) $(2x+y^2)^4$

B.2 Desenvolva as potências:

a) $(x-a)^5$ b) $(2-x^2)^4$ c) $(2x^4-3y)^3$

B.3 Resolva o sistema, onde x e y são números reais:

$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + y^5 = 32. \end{cases}$$

B.4 Determine os números reais x e y de modo que:

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^4 - \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 - \binom{4}{3} x y^3 + y^4 = 16. \end{cases}$$

B.5 Calcule o valor da expressão:

$$E = \binom{4}{0} 2^0 \cdot 3^4 + \binom{4}{1} 2^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{2} 2^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} 2^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{4} 2^4 \cdot 3^0.$$

Sugestão: compare essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^0 a^n + \binom{n}{1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} x^n a^0.$$

B.6 Qual é o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 + \binom{5}{1}2^1 + \binom{5}{2}2^2 + \binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{4}2^4 + \binom{5}{5}2^5?$$

Sugestão: multiplique cada parcela por 1^{n-p}, onde n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial.

B.7 Efetue $E = \binom{5}{0}2^5 - \binom{5}{1}2^4 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^2 + \binom{5}{4}2^1 - \binom{5}{5}2^0$.

B.8 Obtenha a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x - y)^{10}$. **Sugestão:** basta fazer $x = y = 1$. (Pense o porquê.)

B.9 Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^8$.

B.10 A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(5x - 3y^3)^n$ é 2048. Determine o valor de n.

B.11 Se $S = \sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} 2^p$, então:

a) $S = 2^{40}$ b) $S = 9^{10}$ c) $S = 2^{22}$ d) $S = 20^{20}$ e) $S = 20!$

Sugestão: multiplique cada parcela $\binom{20}{p} 2^p$ por 1^{20-p}. Como $1^{20-p} = 1, \forall\, p$, tais operações não alterarão a expressão S.

B.12 A expressão $\sum_{p=2}^{20} \binom{20}{p} 5^p$ é igual a:

a) 6^{20} b) $6^{20} - 7$ c) $6^{20} - 101$ d) 5^{20} e) $5^{20} - 21$

B.13 $\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$ é igual a:

a) 2^{10} b) $2^{10} - 1$ c) $3^{10} - 1$ d) $3^{10} + 1$ e) 3^{10}

B.14 $\sum_{p=0}^{15} (-1)^p \binom{15}{p}$ é igual a:

a) -2^{15} b) -15^2 c) 0 d) 15^2 e) 2^{15}

B.15 A soma $\sum_{p=0}^{30} \binom{30}{p}$ é igual a:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ b) 12^{30} c) 30^{30} d) 3^{30} e) 2^{30}

Sugestão: multiplique cada parcela $\binom{30}{p}$ por $1^p \cdot 1^{30-p}$.

Exercícios complementares

C.1 Prove que a soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n, isto é:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n, \text{ com } \{n, p\} \subset \mathbb{N} \text{ e } p \leqslant n.$$

Sugestão: $2^n = (1 + 1)^n$. Desenvolva essa potência pelo teorema do binômio de Newton.

C.2 Um conjunto A possui dez elementos. Quantos são os subconjuntos de A?
Sugestão: a soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n.

C.3 Um conjunto A possui 64 subconjuntos. Quantos são os elementos de A?

C.4 Seja A um conjunto formado por onze pontos distintos de uma circunferência. Quantos polígonos convexos podem ser construídos, cujos vértices sejam elementos de A?

Questões dos vestibulares

V.1 (UFPR) Os números reais x e y são tais que:

$$x - y = 1 \text{ e } x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = 243.$$

Determine o produto xy.

V.2 (FGV-SP) O valor de $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} 2^x \cdot 3^{n-x}$, com $\{n, x\} \subset \mathbb{N}$ e $x \leqslant n$, é:

a) 6^n b) 5^n c) 1 d) 2^n e) impossível de se calcular por vias elementares.

V.3 (ITA-SP) Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Então $\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^p(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) Nenhuma das respostas anteriores está correta.

Capítulo 31

Termo geral do binômio de Newton

Conceituação

Vimos que:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p a^{n-p}, \text{ isto é:}$$

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^0 a^n + \binom{n}{1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p} x^p a^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n} x^n a^0.$$

Observe que todas as parcelas do desenvolvimento são da forma $\binom{n}{p} x^p a^{n-p}$ com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq n$.

Por isso chamamos de **termo geral do binômio de Newton** a expressão:

$$T = \binom{n}{p} x^p a^{n-p}.$$

Nota: como $(x + a)^n = (a + x)^n$, temos que o termo geral do binômio de Newton pode ser escrito também sob a seguinte forma:

$$T = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar o coeficiente do termo em x^{12} no desenvolvimento de $(x^3 + 2)^6$.

Resolução

O termo geral do desenvolvimento do binômio é:

$$T = \binom{6}{p} (x^3)^p \cdot 2^{6-p} \quad \therefore \; T = \binom{6}{p} x^{3p} \cdot 2^{6-p}.$$

Queremos o coeficiente de x^{12}. Então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 12, isto é, $3p = 12 \Rightarrow p = 4$.

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{6}{4} x^{3 \cdot 4} \cdot 2^{6-4} \Rightarrow T = \binom{6}{4} x^{12} \cdot 2^2,$$

mas $\binom{6}{4} = \dfrac{6!}{4!\,(6-4)\,!} = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 2\cdot 1} = 15\,.$

Logo, $T = 15x^{12}\cdot 4 \Rightarrow T = 60x^{12}$.
Assim, o coeficiente de x^{12} é 60.

Nota: escrevemos o termo geral $T = \binom{6}{p}(x^3)^p\cdot 2^{6-p}$ segundo expoentes crescentes de x; poderíamos ter formado o termo geral segundo expoentes decrescentes de x, isto é, $T = \binom{6}{p}2^p(x^3)^{6-p}$, e obtido o mesmo resultado; faça você mesmo os cálculos.

R.2 Determinar o coeficiente do termo em x^{19} no desenvolvimento de $(x^3 - 2x^2)^8$.

Resolução

Para montarmos o termo geral, devemos considerar o binômio sob a forma $[x^3 + (-2x^2)]^8$. Assim, temos como termo geral:

$$T = \binom{8}{p}(-2x^2)^p(x^3)^{8-p} \quad \therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^p x^{2p}x^{24-3p} \quad \therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^p x^{24-p}.$$

Queremos o coeficiente de x^{19}, então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 19, isto é, $24 - p = 19 \Rightarrow p = 5$.

Fazemos $p = 5$ no termo geral: $T = \binom{8}{5}(-2)^5x^{24-5} \quad \therefore\ T = \binom{8}{5}(-2)^5x^{19}$.

Temos que:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)\,!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 56 \quad \text{e} \quad (-2)^5 = -32.$$

Logo, $T = 56(-32)x^{19} = -1792x^{19}$.
Assim, o coeficiente de x^{19} é -1792.

R.3 Determinar o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 + \dfrac{1}{x^3}\right)^7$.

Resolução

Para facilitar os cálculos convém considerarmos o binômio sob a forma $(x^4 + x^{-3})^7$.

Seu termo geral é $T = \binom{7}{p}(x^{-3})^p(x^4)^{7-p} \quad \therefore\ T = \binom{7}{p}x^{-3p}x^{28-4p} \quad \therefore\ T = \binom{7}{p}x^{28-7p}$.

Queremos o termo independente de x, isto é, o coeficiente de x^0. Assim sendo, para obter o valor de p de modo que o termo T não dependa de x, basta igualarmos a zero o expoente de x, isto é:

$$28 - 7p = 0 \Rightarrow p = 4.$$

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{7}{4}x^{28-7\cdot 4}$$

$$\therefore\ T = \binom{7}{4}x^0 \quad \therefore\ T = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)\,!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Portanto, o termo independente de x é 35.

R.4 Desenvolvendo a potência $(2x + 1)^{10}$, segundo expoentes crescentes de x, determinar o quarto termo.

Resolução

Lembremos que o termo geral pode ser apresentado sob duas formas:

segundo expoentes crescentes de x: $T = \binom{10}{p}(2x)^p\cdot 1^{10-p}$,

ou segundo expoentes decrescentes de x: $T = \binom{10}{p}(2x)^{10-p}\cdot 1^p$.

Nesse caso, o problema exige a primeira forma, isto é:

$$T = \binom{10}{p}(2x)^p \cdot 1^{10-p} \quad \therefore \ T = \binom{10}{p} 2^p x^p \cdot 1^{10-p}.$$

Queremos o quarto termo do desenvolvimento. Para obter o valor de p, basta observarmos que:

$p = 0$ corresponde ao primeiro termo; $p = 1$ corresponde ao segundo termo;
$p = 2$ corresponde ao terceiro termo; $p = 3$ corresponde ao quarto termo.

Portanto, fazendo $p = 3$ no termo geral: $T = \binom{10}{3} 2^3 x^3 \cdot 1^{10-3} \ \therefore \ T = \binom{10}{3} 2^3 x^3$.

Temos que:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120 \text{ e } 2^3 = 8.$$

Logo, $T = 120 \cdot 8x^3 = 960x^3$.
Assim, o quarto termo é $960x^3$.

R.5 Determinar o termo em x^3 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^6$.
Resolução
Temos que $(1 + x + x^2)^6 = [1 + (x + x^2)]^6$.

Assim, o termo geral desse desenvolvimento pode ser escrito sob a forma: $T' = \binom{6}{p}(x + x^2)^p \cdot 1^{6-p}$.

Porém, o termo geral de $(x + x^2)^p$ pode ser escrito como $T'' = \binom{p}{k}(x^2)^k x^{p-k} \ \therefore \ T'' = \binom{p}{k} x^{p+k}$.

Logo, as parcelas do desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^6$ são da forma:

$$T = \binom{6}{p}\binom{p}{k} x^{p+k} \cdot 1^{6-p}, \text{ com } \{p, k\} \subset \mathbb{N},\ k \leq p \leq 6.$$

Queremos o termo em x^3. Então devemos ter $p + k = 3$.
Vamos atribuir a p os valores naturais de 0 a 6:

$p = 0 \Rightarrow 0 + k = 3 \ \therefore \ k = 3$ **(não convém, pois devemos ter $k \leq p$);**
$p = 1 \Rightarrow 1 + k = 3 \ \therefore \ k = 2$ **(não convém);**
$p = 2 \Rightarrow 2 + k = 3 \ \therefore \ k = 1$;
$p = 3 \Rightarrow 3 + k = 3 \ \therefore \ k = 0$;
$p = 4 \Rightarrow 4 + k = 3 \ \therefore \ k = -1$ **(não convém, pois devemos ter $k \in \mathbb{N}$);**
$p = 5 \Rightarrow 5 + k = 3 \ \therefore \ k = -2$ **(não convém);**
$p = 6 \Rightarrow 6 + k = 3 \ \therefore \ k = -3$ **(não convém).**

Percebemos então que existem duas parcelas do tipo $T = \binom{6}{p}\binom{p}{k} x^{p+k} \cdot 1^{6-p}$ que apresentam x^3. Essas parcelas são obtidas do seguinte modo:

- para $p = 2$ e $k = 1$ temos $\binom{6}{2}\binom{2}{1} x^3 \cdot 1^{6-2} = 30x^3$;
- para $p = 3$ e $k = 0$ temos $\binom{6}{3}\binom{3}{0} x^3 \cdot 1^{6-3} = 20x^3$.

Finalmente, obtemos o termo em x^3: $30x^3 + 20x^3 = 50x^3$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.6, B.7, B.9, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.8, B.10, B.11, C.1, C.2.

Exercícios básicos

B.1 Qual é o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$?

B.2 Qual é o coeficiente de x^4 no desenvolvimento $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^8$?

B.3 No desenvolvimento de $\left(\dfrac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x}\right)^{12}$, qual é o coeficiente de x^{-6}? **Sugestão:** $\left[x^{-2} + \left(-x^{\frac{1}{4}}\right)\right]^{12}$.

B.4 Determine o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento de $(x + 2)^7(x - 2)^7$.
Sugestão: $(x + 2)^7(x - 2)^7 = [(x + 2)(x - 2)]^7$.

B.5 Obtenha o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 + \dfrac{2}{x}\right)^8$.

B.6 Encontre o termo que não depende de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

B.7 Mostre que o desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ não possui o termo independente de x.

Sugestão: escreva o binômio na forma $\left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{11}$.

B.8 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^6$.

B.9 Desenvolvendo a potência $(x^3 + 2)^6$ segundo expoentes decrescentes de x, determine o quarto termo.

B.10 Escrevendo o desenvolvimento do binômio $(x^2 - 2)^8$ segundo expoentes crescentes de x, determine o sexto termo.

B.11 Qual é o termo médio do desenvolvimento da potência $\left(2x - \dfrac{1}{y}\right)^6$, feito segundo expoentes crescentes de x?

Exercícios complementares

C.1 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(1 + x + \dfrac{2}{x}\right)^3$.

C.2 Determine o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

C.3 Dar o termo em x^{10} no desenvolvimento de $(1 + x + x^3)^5$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) O coeficiente do termo em x^6 do polinômio $p(x) = (2 + x)^{10}$ é:
a) 210 b) 420 c) 340 d) 1680 e) 3360

V.2 (FEI-SP) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^6$ vale:
a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 60

V.3 (Mackenzie-SP) No desenvolvimento de $(\sqrt{2} + x)^6$ segundo as potências crescentes de x, o termo central é:
a) $10x^2$ b) $40x^3$ c) $40\sqrt{2}\,x^3$ d) $12x^3$ e) $20x^3$

Capítulo 32

O conceito de probabilidade

1. Introdução

José, Alex e Anita participam do sorteio de um automóvel. O regulamento desse sorteio permite que cada participante envie tantas cartas quantas quiser e estabelece que será sorteada uma única carta dentre as enviadas por todos os participantes.

Hoje é o dia do sorteio. Sabe-se que foram enviadas 10000 cartas. Dentre essas, José enviou apenas uma, Alex enviou dezessete e Anita enviou cem cartas. Qual é a chance de cada um ser sorteado?

Se entre as 10000 cartas há apenas uma de José, então dizemos que sua chance de ser sorteado é 1 em 10000 e a indicamos pela razão $\frac{1}{10000}$.

Se entre as 10000 cartas há 17 cartas de Alex, então dizemos que sua chance é 17 em 10000, isto é, $\frac{17}{10000}$.

Se entre as 10000 cartas há 100 cartas de Anita, então sua chance é 100 em 10000, isto é, $\frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$.

Cada uma das razões $\frac{1}{10000}$, $\frac{17}{10000}$ e $\frac{1}{100}$ é chamada de **probabilidade** de ser sorteado ou José ou Alex ou Anita, respectivamente.

Assim sendo, probabilidade é um número que mede a possibilidade de ocorrer um resultado.

2. Experimento aleatório

É qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

Exemplos

São experimentos aleatórios:

a) o lançamento de uma moeda,
b) o lançamento de um dado,
c) o lançamento de duas moedas,
d) o lançamento de dois dados,
e) o sorteio de uma carta de um total de 10000 cartas.

3. Espaço amostral de um experimento aleatório

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos

a) No experimento aleatório "lançamento de uma moeda", temos como espaço amostral o conjunto $E = \{c, k\}$, onde c indica a face **cara** e k, a face **coroa**. Indicamos o número de elementos de E pelo símbolo $n(E)$. Assim, $n(E) = 2$.

50
CENTAVOS
1994

LUIZ ANTONIO

b) No experimento "lançamento de um dado", temos como espaço amostral o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Portanto $n(E) = 6$.

LUIZ ANTONIO

c) No experimento "lançamento de duas moedas", temos como espaço amostral o conjunto $E = \{(c, k), (c, c), (k, c), (k, k)\}$. Assim, $n(E) = 4$.

50
CENTAVOS
1994

LUIZ ANTONIO

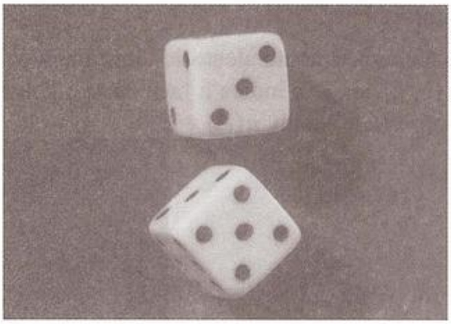
Observação

O par (c, k) é diferente do par (k, c). Para entender o porquê, imagine as moedas com cores diferentes. Por exemplo, uma vermelha e a outra azul. Caindo cara na moeda vermelha e coroa na azul, temos uma possibilidade de obter uma cara e uma coroa. Porém, se cair coroa na moeda vermelha e cara na azul, temos outra possibilidade de obter uma cara e uma coroa. Por isso:

$$(\underset{\text{Moeda vermelha}}{c}, \underset{\text{Moeda azul}}{k}) \neq (\underset{\text{Moeda vermelha}}{k}, \underset{\text{Moeda azul}}{c})$$

d) No experimento "lançamento de dois dados", temos como espaço amostral o conjunto:

$$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & \dots & (1, 6) \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & \dots & (2, 6) \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \dots & (3, 6) \\ \vdots & & & & \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & \dots & (6, 6) \end{matrix}\right\}$$



LUIZ ANTONIO

Logo, $n(E) = 36$.

Nota: o número de elementos desse espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

$$\begin{array}{lcccc} & \underbrace{\textbf{(1º dado,}} & & \underbrace{\textbf{2º dado)}} & \\ \textbf{Os números de possibilidades} \longrightarrow & 6 & \cdot & 6 & = 36. \end{array}$$

e) No experimento "sorteio de uma, dentre 10000 cartas", o espaço amostral é o conjunto E, formado pelas 10000 cartas.

Logo, $n(E) = 10000$.

LUZ BITTAR

4. Evento de um espaço amostral

É qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda, vimos que o espaço amostral é o conjunto $E = \{c, k\}$. O subconjunto de E, $A = \{k\}$, é um evento de E. Note que $n(A) = 1$.

b) No lançamento de um dado, vimos que o espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O subconjunto de E, $B = \{1, 2\}$, é um evento de E. Note que $n(B) = 2$.

c) No lançamento de duas moedas, vimos que o espaço amostral é $E = \{(c, k), (c, c), (k, c), (k, k)\}$. O subconjunto de E, $C = \{(c, k), (c, c), (k, c)\}$, é um evento de E. Note que $n(C) = 3$.

d) No lançamento de dois dados, vimos que o espaço amostral é:

$$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & \dots & (1, 6) \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & \dots & (2, 6) \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \dots & (3, 6) \\ \vdots & & & & \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & \dots & (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

O subconjunto de E, $D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, é um evento de E. Note que $n(D) = 4$.

e) No sorteio de uma, dentre 10000 cartas, vimos que o espaço amostral é o conjunto E formado pelas 10000 cartas. O subconjunto de E, $H = \{x \in E \mid x \text{ é carta enviada por Anita}\}$, é um evento de E. Note que $n(H) = 100$.

5. Espaço amostral equiprovável

Para entendermos o que é um espaço amostral equiprovável, observemos o seguinte exemplo:

Uma moeda é lançada várias vezes. As tabelas seguintes mostram as **freqüências** de cada face nos lançamentos, sendo que as letras c e k indicam, respectivamente, cara e coroa (**nota**: a **freqüência** de uma face é o número de vezes que essa face ocorre no total de lançamentos):

- em vinte lançamentos:

Face	Freqüência
c	12
k	8

- em cinqüenta lançamentos:

Face	Freqüência
c	23
k	27

- em cem lançamentos:

Face	Freqüência
c	49
k	51

Aumentando-se indefinidamente o número de lançamentos, as freqüências das faces tenderão a um mesmo número. Por isso, dizemos que o espaço amostral $E = \{c, k\}$ é equiprovável.

Generalizando, temos que:

> Um espaço amostral $E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ de um experimento aleatório é **equiprovável** se, e somente se, as freqüências dos elementos tendem a um mesmo valor quando o número de vezes que o experimento é realizado tende ao infinito.

Nota: vamos estudar, neste curso, apenas espaços equiprováveis; por comodidade, omitiremos daqui por diante a palavra "equiprovável".

6. Probabilidade

Definição

Seja E um espaço amostral finito e não-vazio; e seja A um evento desse espaço. Chama-se "**probabilidade** de A", e indica-se por $P(A)$, o número $\frac{n(A)}{n(E)}$, onde $n(A)$ e $n(E)$ indicam os números de elementos de A e E, respectivamente. Isto é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara?

Resolução

Indicando por c e k as faces cara e coroa, respectivamente, temos o espaço amostral:

$$E = \{c, k\} \therefore n(E) = 2.$$

O evento que queremos é $A = \{c\} \therefore n(A) = 1$. Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$, ou, ainda, $P(A) = 50\%$.

R.2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que três?

Resolução

O espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \therefore n(E) = 6$.

O evento que queremos é $B = \{1, 2\} \therefore n(B) = 2$.

Logo, $P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, ou, ainda, $P(A) = 33{,}333...\%$.

R.3 No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma cara?

Resolução

O espaço amostral é $E = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\} \therefore n(E) = 4$.

O evento que queremos é $C = \{(c, c), (k, c), (k, c)\} \therefore n(C) = 3$.

Logo, $P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} = \frac{3}{4}$, ou, ainda, $P(C) = 75\%$.

R.4 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5?

Resolução

O espaço amostral é:

$$E = \begin{Bmatrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \dots & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \dots & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & \dots & (3,6) \\ \vdots & & & & \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & \dots & (6,6) \end{Bmatrix} \therefore n(E) = 36.$$

O evento que queremos é $D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \therefore n(D) = 4$.

Logo, $P(D) = \frac{n(D)}{n(E)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, ou, ainda, $P(D) = 11{,}111...\%$.

R.5 Uma carta será sorteada dentre 10000 cartas. Sabendo-se que exatamente cem dessas cartas foram enviadas por Anita, qual é a probabilidade de Anita ser sorteada?

Resolução

O espaço amostral E é formado pelas 10000 cartas. Logo, $n(E) = 10000$.

O evento que queremos é $H = \{x \in E \mid x \text{ é carta enviada por Anita}\} \therefore n(H) = 100$.

Logo, $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(E)} = \dfrac{100}{10000} = \dfrac{1}{100}$, ou, ainda, $P(H) = 1\%$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.9, B.10, B.11, B.12, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.7, B.8, B.13, B.14, C.2, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obtermos na face voltada para cima um número par de pontos?

B.2 Lançando dois dados, qual é a probabilidade de obtermos nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 7?

B.3 Dois dados são lançados. Qual é a probabilidade de se obter nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 6?

B.4 Uma urna contém exatamente cem etiquetas numeradas de 1 a 100. Retirando uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 41?

B.5 No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de obtermos números iguais de pontos nos três dados?

B.6 Uma moeda é lançada três vezes. Qual a probabilidade de obtermos cara nos dois primeiros lançamentos e coroa no terceiro?

B.7 Lançando-se três vezes uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara nos dois primeiros lançamentos?

B.8 No lançamento de três moedas, qual é a probabilidade de se obter duas caras e uma coroa?

B.9 Uma comissão de três pessoas será escolhida dentre cinco pessoas, sendo apenas uma de nome Paulo. Qual é a probabilidade de Paulo participar da comissão?

B.10 Numa corrida participam exatamente seis cavalos. Uma aposta foi feita em três cavalos para as três primeiras posições. Qual é a probabilidade de essa aposta ser vencedora?

STEFAN KOLUMBAN/PULSAR

B.11 Qual é a probabilidade de se obter um número divisível por 5 na escolha ao acaso de um número de cinco algarismos distintos formado pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

B.12 Se num grupo de quinze homens e cinco mulheres sortearmos três pessoas, qual é a probabilidade de serem sorteados dois homens e uma mulher?

B.13 Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". Um candidato responde ao acaso os dez testes. Qual é a probabilidade de esse candidato:

a) acertar apenas o primeiro teste e errar os outros nove.
b) acertar apenas um teste.
c) acertar todos os testes.

B.14 O concurso da Sena é realizado da seguinte maneira: num cartão são apresentadas cinqüenta dezenas distintas e em cada aposta devem ser assinaladas exatamente seis dezenas; no dia do sorteio, são sorteadas seis dezenas. Ganha o prêmio maior do concurso aquele cartão que tiver assinaladas as seis dezenas sorteadas. Qual é a probabilidade de um determinado conjunto de seis dezenas ser sorteado?

SENA
CADERNETA DA CAIXA

LUIZ ANTONIO

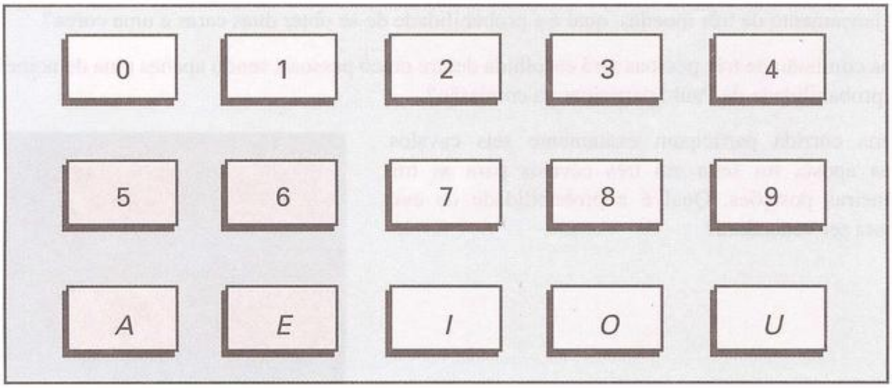
Exercícios complementares

C.1 Sorteando-se um anagrama da palavra TESOURA, qual é a probabilidade de se obter um anagrama que comece e termine por vogal?

C.2 Sorteando-se um anagrama da palavra BANANA, qual é a probabilidade de se obter um anagrama que comece por A?

C.3 Márcia precisa telefonar para sua prima Priscilla, mas se esqueceu do número do telefone. Lembra-se apenas de que o número é formado por sete algarismos e que os três primeiros são 8, 6 e 9, nessa ordem. Qual é a probabilidade de, em apenas uma tentativa, Márcia discar o número correto?

C.4 Um cofre eletrônico de um banco apresenta um teclado com quinze teclas (conforme a figura). O segredo para a abertura do cofre é uma seqüência de três algarismos seguidos de duas letras. Qual é a probabilidade de uma pessoa, numa única tentativa, ao acaso, abrir o cofre?



C.5 Considere duas retas distintas e paralelas r e s. Sobre a reta r marcam-se quatro pontos distintos, A, B, C e D, e sobre a s marcam-se três pontos distintos, E, F, G. Sorteando um conjunto de três pontos distintos dentre A, B, C, D, E, F, G, qual é a probabilidade de esses pontos determinarem um triângulo?

C.6 Três homens e duas mulheres vão ocupar cinco cadeiras em torno de uma mesa circular. Sabendo que a disposição será aleatória, calcule a probabilidade de as mulheres ficarem juntas.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) Em uma amostra de quinhentas peças, existem exatamente quatro defeituosas. Retirando-se, ao acaso, uma peça dessa amostra, a probabilidade de ela ser perfeita é de:

a) 99,0% b) 99,2% c) 99,4% d) 99,1% e) 99,3%

V.2 (FEI-SP) Em um certo país as placas dos veículos são formadas por três letras e quatro algarismos de 0 a 9. Considerando-se o alfabeto com 26 letras e sabendo que letras e algarismos podem aparecer repetidos em uma mesma placa, então a probabilidade de uma placa, escolhida ao acaso, ter letras distintas e a parte numérica inferior a 1000 é:

a) $\frac{15}{169}$ b) $\frac{2}{27}$ c) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{15}$

V.3 (FEI-SP) Em uma indústria com 4000 operários, 2100 têm mais de 20 anos, 1200 são especializados e oitocentos têm mais de 20 anos e são especializados. Se um dos operários é escolhido aleatoriamente, a probabilidade de ele ter no máximo 20 anos e ser especializado é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{27}{85}$ e) $\frac{7}{18}$

V.4 (Fuvest-SP) Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

a) $\frac{9}{38}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{25}$

Capítulo 33

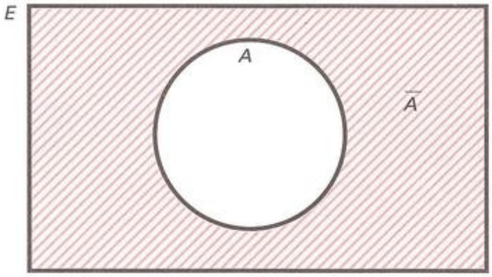
Propriedades da probabilidade

1. Eventos complementares

Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. Chama-se "**evento complementar** de A", que se indica por $\overline{A}$, o evento que satisfaz as seguintes condições:

$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

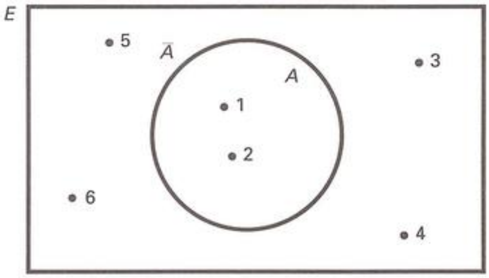
Representando o complementar de A através de diagramas, temos:



O círculo representa o evento A e a região hachurada representa o complementar de A. Note que $\overline{A}$ é formado por todos os elementos de E que não pertencem a A.

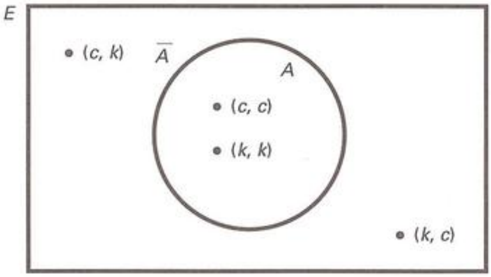
Exemplos

a) No lançamento de um dado, considere o evento A formado pelos resultados menores do que 3. O complementar de A é formado por todos os resultados maiores ou iguais a 3. Isto é:



$A = \{1, 2\};$
$\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}.$

b) No lançamento de duas moedas, considere o evento $A = \{(c, c), (k, k)\}$. O complementar de A é o evento $\overline{A} = \{(c, k), (k, c)\}$.



Nota: se um evento A é determinado por uma propriedade p, então o evento $\overline{A}$ é determinado pela propriedade $\sim p$ (lê-se "não p"), isto é, a negação de p.

Exemplo

Uma urna contém apenas bolas azuis, vermelhas, pretas e brancas, sendo uma de cada cor. Retira-se uma bola da urna. Sendo E o espaço amostral desse experimento, consideremos o seguinte evento:

$$A = \{x \in E \mid \underbrace{x \textbf{ é } \text{bola vermelha}}_{\textbf{Propriedade } p}\}.$$

Para obter o complementar de A, basta negar a propriedade p que determina o evento A, isto é:

$$\overline{A} = \{y \in E \mid \underbrace{y \textbf{ não é } \text{bola vermelha}}_{\textbf{Propriedade } \sim p}\}.$$

2. Propriedades das probabilidades

Sendo E um espaço amostral finito e não-vazio e sendo A um evento de E, tem-se que:

I. $P(\varnothing) = 0$;
II. $P(E) = 1$;
III. $0 \leq P(A) \leq 1$;
IV. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$).

Demonstrações

I. $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(E)} = \dfrac{0}{n(E)} = 0.$

(c.q.d.)

Nota: o evento $\varnothing$ é chamado de **evento impossível**.

II. $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(E)} = 1.$

(c.q.d.)

Nota: o evento que coincide com o próprio espaço amostral é chamado de **evento certo**.

III. Sendo A um evento de E, isto é, $A \subset E$, temos que:

$$\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(E) \quad \therefore 0 \leq n(A) \leq n(E).$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(E)$, temos:

$$\frac{0}{n(E)} \leqslant \frac{n(A)}{n(E)} \leqslant \frac{n(E)}{n(E)} \quad \therefore\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

(c.q.d.)

IV. Temos que $A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Do princípio aditivo de contagem, temos que:

$$n(A \cup \overline{A}) = n(A) + n(\overline{A}) - n(A \cap \overline{A}) \Rightarrow n(E) = n(A) + n(\overline{A}).$$

Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, temos que:

$$\frac{n(E)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} \quad \therefore\ 1 = P(A) + P(\overline{A}).$$

Logo, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$).

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Uma urna contém exatamente dez etiquetas, numeradas de 1 a 10. Retira-se uma etiqueta da urna. Qual é a probabilidade de se obter:

a) um número maior do que 10?

b) um número menor do que 11?

Resolução

O espaço amostral do experimento é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) O evento que queremos é $A = \{x \in E \mid x > 10\} = \varnothing$.

Logo, A é o **evento impossível**. Portanto $P(A) = 0$.

b) O evento que queremos é $B = \{x \in E \mid x < 11\} = E$.

Logo, B é um **evento certo**, pois $B = E$. Portanto $P(B) = 1$.

R.2 Uma urna contém n bolas. Retira-se uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola vermelha é dada por $\frac{n-9}{3}$. Qual o número máximo de bolas que a urna pode conter?

Resolução

Seja E o espaço amostral do experimento: $E = \{x \mid x \text{ é bola da urna}\}$.

Seja A o evento: $A = \{y \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\}$.

É dado que $P(A) = \frac{n-9}{3}$.

Sabemos, pela propriedade (III), que $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Então temos:

$$0 \leqslant \frac{n-9}{3} \leqslant 1 \quad \therefore 0 \leqslant n - 9 \leqslant 3 \quad \therefore 9 \leqslant n \leqslant 12.$$

Assim, o número máximo de bolas que a urna pode conter é doze.

R.3 Uma urna contém apenas bolas vermelhas, azuis, brancas e pretas. Retira-se ao acaso uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola vermelha é $\frac{5}{17}$. Qual é a probabilidade de sair uma bola que não seja vermelha?

Resolução

Seja E o espaço amostral do experimento: $E = \{x \mid x \text{ é bola da urna}\}$.

Sejam os eventos complementares:

$$A = \{y \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\} \text{ e } \overline{A} = \{z \in E \mid z \text{ não é bola vermelha}\}.$$

Temos, pela propriedade (IV), que: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{17} = \frac{12}{17}$.

Assim a probabilidade de sair uma bola **não vermelha** é $\frac{12}{17}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, B.9, B.10, B.11, C.2, C.4.

Exercícios básicos

B.1 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de obtermos nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 13?

B.2 No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de obtermos nas faces voltadas para cima a soma dos pontos menor que 19?

B.3 Uma caixa contém lâmpadas perfeitas ou defeituosas. Retira-se ao acaso uma lâmpada da caixa. A probabilidade de se obter uma lâmpada perfeita é dada por $\frac{n - 82}{50}$, onde n é o número total de lâmpadas da caixa. Qual é o número mínimo de lâmpadas que a caixa pode conter?

B.4 Dois dados são lançados. Qual é a probabilidade de obtermos nas faces voltadas para cima uma soma de pontos diferente de 5?

B.5 No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de obtermos nas faces voltadas para cima uma soma de pontos que não seja 18?

B.6 Três dados são lançados. Qual é a probabilidade de não se obter nas faces voltadas para cima números iguais de pontos em todos os dados?

B.7 Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

JUCA MARTINS/PULSAR

B.8 Uma urna contém apenas bolas vermelhas e azuis. Retira-se ao acaso uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola azul é o dobro da probabilidade de sair uma vermelha. Qual é a probabilidade de retirarmos uma bola azul dessa urna?

B.9 Uma caixa contém lâmpadas perfeitas e lâmpadas defeituosas. Escolhendo ao acaso três lâmpadas dessa caixa, a probabilidade de obtermos pelo menos uma lâmpada defeituosa é $\frac{17}{33}$. Qual é a probabilidade de retirarmos três lâmpadas perfeitas da caixa?

B.10 No lançamento de três dados, calcule a probabilidade de:
a) não se obter a face com 6 pontos, voltada para cima, em nenhum dos dados.
b) cair, voltada para cima, a face com 6 pontos em pelo menos um dos dados.

B.11 Um parente, residente em outro país, escreveu-me dizendo que casou e já tem três filhos. Qual é a probabilidade de que não sejam três filhos homens?

Exercícios complementares

C.1 Um sorteio será realizado entre as crianças de um orfanato. Sabendo que a probabilidade de ser sorteada uma criança com idade inferior a 7 anos é $\frac{n}{3}$, que a probabilidade de ser sorteada uma criança com idade de 7 a 10 anos é $\frac{n-1}{3}$ e que a probabilidade de ser sorteada uma criança com idade superior a 10 anos é $\frac{n-2}{3}$, mostre que nesse orfanato não há crianças com mais de 10 anos.

C.2 Uma urna contém apenas bolas brancas, azuis e vermelhas, sendo uma de cada cor. Retira-se uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola branca é igual à metade da probabilidade de sair uma azul e a probabilidade de sair uma vermelha é igual ao triplo da probabilidade de sair uma branca. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca?

C.3 Seja E um espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. O complementar de A, isto é, $\overline{A}$, é tal que $P(\overline{A}) = 2P(A)$. Determine $P(A)$.

C.4 Se A e B são eventos de um espaço amostral E tal que $P(A) = \frac{2}{5}$ e $P(B) = \frac{7}{10}$, então se pode afirmar que:
a) $A - B = A$
b) $A \cup B = E$
c) A e B podem ser complementares, isto é, $\overline{A} = B$.
d) $A \cap B \neq \varnothing$
e) $B - A = B$

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Um experimento aleatório é realizado. A probabilidade de ocorrer um evento A é $\frac{8}{21}$. A probabilidade de não ocorrer o evento A é:
a) $\frac{7}{21}$ b) $\frac{8}{21}$ c) 1 d) $\frac{13}{21}$ e) $\frac{15}{21}$

V.2 (Cescem) Um evento A de um espaço amostral é tal que $n(A) = n$ e $P(A) = \frac{n-4}{3}$.

O maior número possível de elementos de A é:
a) 4 b) 8 c) 9 d) 5 e) 7

V.3 (Faap-SP) Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja p uma propriedade que caracteriza alguns elementos de E. Podemos afirmar que os eventos

$$A = \{x \in E \mid x \text{ possui a propriedade } p\} \text{ e } B = \{x \in E \mid x \text{ não possui a propriedade } p\}$$

são tais que:
a) $P(A) > P(B)$
b) $P(A) < P(B)$
c) $P(A) + P(B) = 1$
d) $A - B = \varnothing$
e) $A \cup B = A$

Capítulo 34

Adição de probabilidades

Teorema

Seja E um espaço amostral finito e não-vazio. Para quaisquer eventos A e B de E, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração

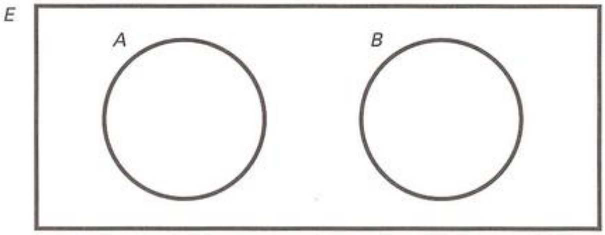
Pelo princípio aditivo de contagem, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(c.q.d.)

Nota: os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos** se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



Nesse caso, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exercícios resolvidos

R.1 Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral E. Determinar $P(A)$, sabendo que $P(B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{11}{30}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Resolução

Pelo teorema da adição de probabilidades, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \therefore \ \frac{11}{30} = P(A) + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ \therefore \ \frac{11}{30} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = P(A).$$

Logo, $P(A) = \frac{1}{3}$.

R.2 Sejam A e B dois eventos mutuamente exclusivos de um espaço amostral E. Determinar $P(A \cup B)$, sabendo que $P(A) = \frac{1}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{7}$.

Resolução

Como A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \therefore P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{17}{35}.$$

R.3 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou de 3?

Resolução

O espaço amostral do experimento é $E = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\} \therefore n(E) = 20$.

Consideremos dois eventos: um deles, caracterizado pela propriedade anterior ao conectivo **ou**, e o outro, caracterizado pela propriedade posterior ao conectivo **ou** do enunciado. Isto é:

$$A = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, ..., 20\} \therefore n(A) = 10;$$
$$B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, ..., 18\} \therefore n(B) = 6.$$

Queremos a probabilidade de ocorrer A ou B, ou seja, $P(A \cup B)$. Para isso, precisamos de $A \cap B$:

$$A \cap B = \{6, 12, 18\} \therefore n(A \cap B) = 3.$$

Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \therefore P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}.$$

Nota: sempre que a pergunta do problema for da forma "qual é a probabilidade de ocorrer A **ou** B?", a resolução pode ser feita através do teorema:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

R.4 Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

Resolução

O espaço amostral é $E = \{x \mid x \text{ é bola da urna}\} \ \therefore n(E) = 12$.

Consideremos dois eventos:

$$A = \{y \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\} \ \therefore n(A) = 5; B = \{z \in E \mid z \text{ é bola azul}\} \ \therefore n(B) = 3.$$

Observe que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

Logo, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.6, C.1, C.2.

Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.7, B.8, B.9, B.10, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Uma urna contém duas bolas brancas, três verdes e quatro azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da urna, qual é a probabilidade de se obter uma bola branca ou verde?

B.2 Uma urna contém exatamente vinte bolas numeradas de 1 a 20. No experimento "retirada de uma bola", considere os seguintes eventos:

$$A = \{\text{a bola retirada possui um número múltiplo de 3}\};$$
$$B = \{\text{a bola retirada possui um número múltiplo de 5}\}.$$

Então a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{9}{20}$ e) $\frac{11}{20}$

B.3 Num grupo de sessenta pessoas, dez são torcedoras do São Paulo, cinco são torcedoras do Palmeiras e as outras são torcedoras do Corinthians. Suponha que cada pessoa torça para um único clube. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, a probabilidade de ele ser torcedor do São Paulo ou do Palmeiras é:

a) 0,40
b) 0,25
c) 0,50
d) 0,30
e) Nenhuma das respostas anteriores.

B.4 Uma urna contém exatamente trinta etiquetas numeradas de 1 a 30. Retirando-se, ao acaso, uma etiqueta da urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 20 ou um número ímpar?

B.5 Uma caixa contém exatamente 1000 bolas numeradas de 1 a 1000. Qual é a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número de dois algarismos?

a) 45% b) 59% c) 50% d) 19% e) 54,5%

B.6 Em uma conferência estão reunidos: cinco mulheres e sete homens, matemáticos; quatro mulheres e oito homens, físicos; seis mulheres e quatro homens, químicos. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, para presidir a conferência. Qual a probabilidade de que essa pessoa seja mulher ou matemático(a)?

B.7 Uma pesquisa é realizada entre cinqüenta leitores de jornais. Conclui-se que 35 pessoas lêem o jornal *A*, 34 lêem o jornal *B* e três lêem um outro jornal. Escolhida ao acaso uma dessas cinqüenta pessoas, qual é a probabilidade de que ela seja leitora dos jornais *A* e *B*?

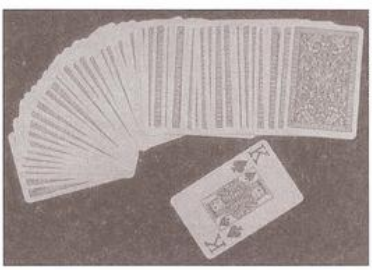
B.8 Uma pesquisa é realizada entre setenta pessoas consumidoras de leite. Concluiu-se que trinta pessoas consomem apenas leite tipo *A*, doze consomem apenas leite tipo *B* e dez consomem outro tipo de leite. Escolhida ao acaso uma dessas setenta pessoas, qual é a probabilidade de que ela seja consumidora dos tipos *A* e *B*?

B.9 Uma urna contém exatamente 1000 fichas numeradas de 1 a 1000. Retirando-se ao acaso uma ficha da urna, qual é a probabilidade de que seja par ou múltiplo de 3?

B.10 Um número é escolhido ao acaso entre os números inteiros de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que esse número seja primo ou quadrado perfeito?

Exercícios complementares

C.1 Um baralho é composto de 52 cartas distribuídas em quatro naipes: ouros (♦), copas (♥), espadas (♠) e paus (♣). Para cada naipe existem treze cartas: A (ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, 9, 10, J (valete), Q (dama) e K (rei). Sorteando-se, ao acaso, uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de se obter um rei ou uma carta de paus?



LUIZ ANTONIO

C.2 Num colégio, a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter 18 anos ou mais é 38% e a probabilidade de ter 18 anos ou menos é 79%. Qual é a probabilidade de esse aluno ter exatamente 18 anos?

C.3 Uma comissão de três pessoas será escolhida dentre quatro homens e três mulheres. Qual é a probabilidade de não se escolher uma comissão que contenha duas ou três mulheres?

C.4 Um número é escolhido ao acaso dentre os vinte inteiros de 1 a 20. Qual é a probabilidade de o número escolhido ser primo ou par?

C.5 A probabilidade de uma caixa de fósforos possuir quarenta palitos ou mais é 26% e a probabilidade de possuir 42 palitos ou menos é 80%. Qual é a probabilidade de a caixa possuir quarenta ou 41 ou 42 palitos?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescea) Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. No experimento "retirada de uma bola", considere os seguintes eventos:

$$A = \{\text{a bola retirada possui um número múltiplo de } 2\};$$
$$B = \{\text{a bola retirada possui um número múltiplo de } 5\}.$$

Então a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

V.2 (Cesgranrio) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara na moeda ou a face 6 no dado?

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{4}$

V.3 (Fuvest-SP) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é 95%. A probabilidade de ela ser de 110 milhões ou menos é 8%. Calcule a probabilidade de essa população ser de 110 milhões.

Capítulo 35

Probabilidade condicional

Conceituação

Uma urna contém exatamente vinte etiquetas numeradas de 1 a 20. Retira-se uma etiqueta da urna. Sabendo-se que o número da etiqueta é par, qual é a probabilidade de que esse número seja 2?

Como sabemos que o número da etiqueta retirada é par, temos como espaço amostral o seguinte conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \therefore n(A) = 10$.

O evento que queremos é $B = \{2\} \therefore n(B) = 1$. Logo, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(A)} = \dfrac{1}{10}$.

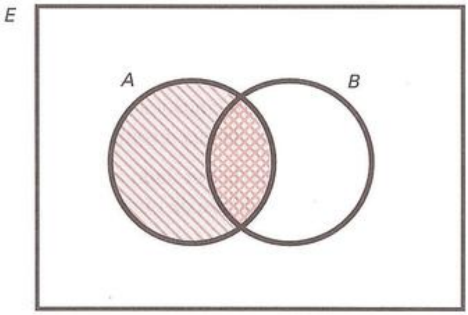
Note que o fato de sabermos que ocorreu o evento "número par" faz com que o espaço amostral fique reduzido a esse evento.

Definição

Chama-se "**probabilidade condicional** de um evento B" a probabilidade de esse evento ocorrer considerando-se que já ocorreu um evento A.

Indicamos essa probabilidade por $P(B/A)$ (lê-se "probabilidade de B, dado A").

Analisemos o seguinte problema genérico: o espaço amostral E de um experimento aleatório é finito e não-vazio. A e B são eventos de E, com $A \neq \varnothing$. Ao realizar-se o experimento, ocorre o evento A. Qual é a probabilidade de ter ocorrido também o evento B?



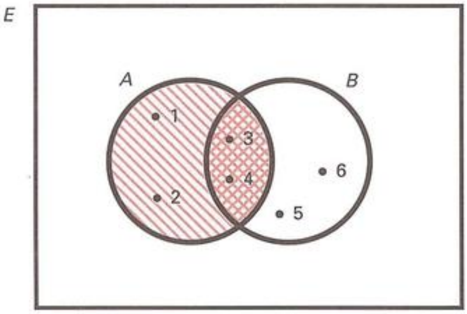
Devemos calcular $P(B/A)$. Como sabemos que ocorreu o evento A, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B, por sua vez, só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos que:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}.$$

Note que, se A e B forem mutuamente exclusivos, então $P(B/A) = 0$.

Exercícios resolvidos

R.1 No lançamento de um dado, considerar os seguintes eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Qual é a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo-se que ocorreu o evento A?



Resolução

Sabemos que ocorreu o evento A; logo, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

R.2 No lançamento de dois dados, sabe-se que se obteve nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos?

Resolução

Temos dois eventos a considerar:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}; B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Como sabemos que ocorreu o evento A, o evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B, isto é, o par (3, 3). Assim, temos $P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{5}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 No lançamento de dois dados, sabe-se que o produto dos números de pontos obtidos nas faces voltadas para cima é ímpar. Qual a probabilidade de que pelo menos um desses números seja 5?

B.2 Dois dados foram lançados. Sabendo que caíram, nas faces voltadas para cima, dois números pares, calcule a probabilidade de que a soma desses números seja 6.

B.3 No lançamento de um dado e uma moeda, sabe-se que a face voltada para cima no dado possui 5 pontos. Qual a probabilidade de obtermos cara na moeda?

B.4 Uma comissão é formada por cinco homens de até 30 anos, quatro homens com mais de 30 anos, oito mulheres de até 30 anos e cinco mulheres com mais de 30 anos. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa para presidir a comissão. Sabendo-se que a pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de que ela tenha mais de 30 anos?

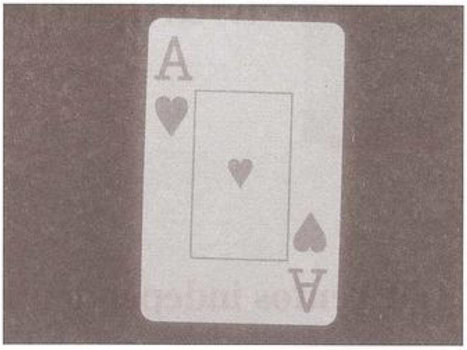
B.5 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, observa-se que o número é menor do que 8. Qual é a probabilidade de que esse número seja par?

Exercícios complementares

C.1 Uma pesquisa feita entre setenta pessoas revelou que: 35 já consumiram o produto A; cinqüenta já consumiram o produto B; e cinco ainda não consumiram nem A e nem B. Escolheu-se uma dessas setenta pessoas ao acaso, e ela já havia consumido o produto A. Qual é a probabilidade de que essa pessoa também tenha consumido o produto B?

C.2 Dentre cinqüenta homens e trinta mulheres, com apenas uma de nome Márcia, foi sorteada uma pessoa. Sabendo-se que a pessoa sorteada foi uma mulher, qual é a probabilidade de Márcia ter sido sorteada?

C.3 Um baralho de 52 cartas é constituído por quatro naipes – ouros, paus, espadas e copas, sendo treze cartas de cada naipe: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K. Escolhida uma carta desse baralho e sabendo que essa carta é um ás (A), qual é a probabilidade de que esse ás seja de copas?



LUIZ ANTONIO

C.4 Um apostador da sena apostou em seis números pares, dentre os números 01, 02, 03, ..., 50. No dia do sorteio, ele soube que seis números pares haviam sido sorteados. Qual é a probabilidade de que esse apostador tenha acertado os seis números?

Questões dos vestibulares

V.1 (U. F. S. Carlos-SP) Dois dados usuais e não-viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então, a probabilidade de que a soma deles seja 8 é:

a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{18}$

V.2 (Osec-SP) O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{5}$

V.3 (Cescem) De um total de cem alunos que se destinam aos cursos de matemática, física ou química, sabe-se que:

I. trinta se destinam a matemática e, destes, vinte são do sexo masculino;
II. o total de alunos do sexo masculino é cinqüenta, dos quais dez se destinam a química;
III. existem dez moças que se destinam ao curso de química.

Nessas condições, sorteando-se um aluno ao acaso do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de matemática vale:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Capítulo 36

Multiplicação de probabilidades

1. Eventos independentes

Definição

> Seja um espaço amostral E, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E. Dizemos que A e B são **eventos independentes** se, e somente se:
>
> $$P(B/A) = P(B) \text{ ou } P(A/B) = P(A).$$

Exemplos

a) Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:

a_1) obtermos cara no segundo lançamento;

a_2) obtermos cara no segundo lançamento, sabendo que obtivemos cara no primeiro lançamento.

Vejamos:

a_1) O espaço amostral é:

$$E = \{(c, c), (\overset{\textbf{Cara}}{c}, \overset{\textbf{Coroa}}{k}), (k, k), (k, c)\} \therefore n(E) = 4.$$

O evento que queremos é $A = \{(c, c), (k, c)\} \therefore n(A) = 2$.

Logo, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

a_2) Temos dois eventos a considerar:

cara no primeiro lançamento $(B) \Rightarrow B = \{(c, c), (c, k)\}$;
cara no segundo lançamento $(A) \Rightarrow A = \{(c, c), (k, c)\}$.

Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na intersecção de A e B: $P(A/B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{1}{2}$.

Observando as respostas dos itens (a_1) e (a_2), temos que $P(A/B) = P(A) = \dfrac{1}{2}$.

Por isso, dizemos que A e B são eventos independentes.

b) Uma urna contém exatamente sete bolas: quatro brancas e três pretas. Três bolas serão retiradas da urna ao acaso, uma de cada vez e com reposição de cada bola retirada. Vamos calcular:

b_1) a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca;

b_2) a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca;

b_3) a probabilidade de a terceira bola retirada ser branca.

Vejamos:

b_1) A urna contém quatro bolas brancas e três pretas; logo, a probabilidade de a primeira bola ser branca é $\frac{4}{7}$.

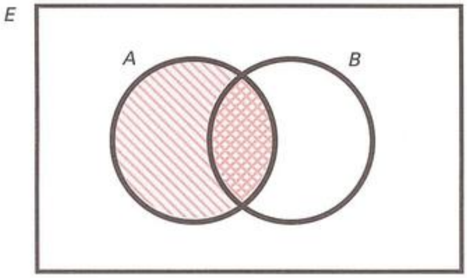
b_2) Como houve reposição da primeira bola, a urna continua com quatro bolas brancas e três pretas. Logo, a probabilidade de a segunda bola ser branca é também $\frac{4}{7}$.

b_3) A probabilidade de a terceira bola ser branca é também $\frac{4}{7}$, pois, havendo reposição das bolas anteriores, a urna continua com quatro bolas brancas e três pretas.

Observe, portanto, que o evento "retirar bola branca na n^{a} retirada" tem a mesma probabilidade em qualquer retirada. Isso mostra que esse evento independe de outro que ocorrer antes dele, isto é, independe de ter ocorrido bola branca ou preta em alguma retirada anterior. Note, porém, que, se não houvesse reposição da bola retirada, aí sim o evento "obter bola branca na segunda retirada" seria dependente do evento ocorrido na primeira retirada.

2. Produto de probabilidades

Seja E um espaço amostral finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E.



Vimos que $P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$.

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por $n(E)$, temos que:

$$P(B/A) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\dfrac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Nota: se A e B forem eventos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exercícios resolvidos

R.1 Uma urna contém precisamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e repõe-se a bola na urna. A seguir, retira-se novamente uma bola da urna e registra-se sua cor. Calcular a probabilidade de:

a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;

b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

A	A	A	A
	V	V	V

Convenção: A e V representam bola azul e bola vermelha, respectivamente.

a) Queremos que a primeira bola retirada seja azul e a segunda seja vermelha. A probabilidade de a primeira bola sair azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola sair vermelha é $\frac{3}{7}$. Assim, a probabilidade de obtermos a seqüência:

$$\underbrace{A \text{ e } V \text{ é } P = \frac{4}{7} \cdot}_{\substack{\textbf{Pelo teorema da} \\ \textbf{multiplicação de} \\ \textbf{probabilidades}}} \frac{3}{7} = \frac{12}{49}.$$

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V,\ P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}; \quad \underset{\oplus}{\underset{\uparrow}{\text{ou}}} \quad V \text{ e } A,\ P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}.$$

Assim, a probabilidade total é $P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$.

R.2 Uma urna contém exatamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e não se repõe a bola na urna. A seguir, retira-se outra bola da urna, registrando-se sua cor. Calcular a probabilidade de:

a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;

b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

A	A	A	A
	V	V	V

Convenção: A e V representam bola azul e bola vermelha, respectivamente.

a) A probabilidade de a primeira bola retirada ser azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola retirada ser vermelha, sabendo-se que a primeira bola foi azul, é $\frac{3}{6}$ (diminuímos uma unidade no denominador, pois não houve reposição da primeira bola).

Assim, a probabilidade de a seqüência:

$$\underbrace{A \text{ e } V \text{ ocorrer é } P = \frac{4}{7} \cdot}_{\substack{\textbf{Pelo teorema da} \\ \textbf{multiplicação de} \\ \textbf{probabilidades}}} \frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V,\ P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}; \quad \underset{\oplus}{\underset{\uparrow}{\text{ou}}} \quad V \text{ e } A,\ P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}.$$

Logo, a probabilidade total é $P = P_1 + P_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

R.3 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis e quatro vermelhas.

a) Retirando simultaneamente três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

b) Retirando sucessivamente, sem reposição, três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

a) O espaço amostral E é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna. Assim temos que:

$$n(E) = C_{9,3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

O evento A que nos interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna, sendo duas azuis e uma vermelha. Assim, temos que $n(A) = C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$.

Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\cancel{40}}{\cancel{84}} = \frac{10}{21}$.

b) Temos três seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$AAV,\ P_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63};\ \text{ou}$$

$$AVA,\ P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63};\ \text{ou}$$

$$VAA,\ P_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}.$$

Logo, a probabilidade total é $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{63}} = \frac{10}{21}$.

Comparando os itens (a) e (b) do exercício R.3, percebemos que a probabilidade de retirarmos **simultaneamente** as bolas da urna é igual à probabilidade de retirá-las **sucessivamente e sem reposição**. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

Propriedade

Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos. A probabilidade de se retirar **simultaneamente** esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de se retirá-los **sucessivamente e sem reposição.**

Sugerimos que todo problema onde for pedida a probabilidade de retiradas **simultâneas** seja transformado em retiradas **sucessivas e sem reposição.** (**Cuidado**! Nas retiradas sucessivas a ordem dos elementos retirados deve ser levada em consideração.)

Exercício resolvido

R.4 Uma urna contém exatamente onze bolas: seis azuis e cinco vermelhas. Retirando-se simultaneamente quatro bolas, qual é a probabilidade de saírem três bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

Em vez de retirarmos as bolas **simultaneamente**, resolveremos um problema equivalente, retirando as bolas **sucessivamente e sem reposição.**

Assim, as seqüências que nos interessam, com suas respectivas probabilidades, são:

$$AAAV,\ P_1 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{66};\ \text{ou}$$

$$AAVA,\ P_2 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66};\ \text{ou}$$

$$AVAA,\ P_3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66};\ \text{ou}$$

$$VAAA,\ P_4 = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}.$$

Assim, a probabilidade total é $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{\cancel{20}}{\cancel{66}} = \frac{10}{33}$.

Nota: poderíamos ter calculado apenas P_1 e multiplicá-lo por 4, pois todas as seqüências terão a mesma probabilidade.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, B.8, B.9, B.10, B.11, B.12, C.2, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Uma urna contém precisamente nove bolas: três brancas, duas pretas e quatro azuis. Retirando-se três bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:
a) a primeira bola branca, a segunda bola preta e a terceira bola azul;
b) três bolas de cores diferentes;
c) três bolas azuis.

B.2 Uma urna contém exatamente sete bolas: três brancas e quatro pretas. Retirando-se sucessivamente e sem reposição três bolas, qual a probabilidade de:
a) saírem as duas primeiras bolas pretas e a terceira branca?
b) saírem duas bolas pretas e uma branca?
c) sair pelo menos uma bola branca?

B.3 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco brancas e quatro pretas. Retirando-se simultaneamente três bolas, qual é a probabilidade de:
a) saírem duas bolas brancas e uma preta?
b) saírem três bolas pretas?
c) sair pelo menos uma bola branca?
d) saírem no máximo duas bolas brancas?

B.4 No lançamento de um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara na moeda e a face 5 no dado?

B.5 Uma moeda é lançada cinco vezes. Qual é a probabilidade de se obter:
a) cinco caras?
b) três caras e duas coroas?

B.6 Num teste de sete questões do tipo "classificar a sentença como verdadeira ou falsa", a probabilidade de um candidato, que responde todas ao acaso, acertar pelo menos seis questões é:

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{128}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{32}$ e) $\frac{1}{16}$

B.7 Uma prova é composta de cinqüenta testes de múltipla escolha, cada um com cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade de que um aluno, apenas "chutando", acerte todas as questões?

B.8 Uma urna contém precisamente dez bolas: quatro vermelhas, três azuis e três brancas. Qual a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha, e depois uma branca, sem reposição da primeira bola?

B.9 Escolhendo-se, ao acaso, dois lados de um hexágono regular, qual é a probabilidade de que eles sejam paralelos?

B.10 Escolhendo-se, ao acaso, dois lados de um pentágono convexo, qual é a probabilidade de que eles sejam consecutivos?

B.11 A probabilidade de que um atirador acerte o alvo em cada tiro é $\frac{2}{5}$. Em três tiros, qual é a probabilidade de que esse atirador:

a) acerte os três tiros?

b) erre os três tiros?

c) acerte somente o terceiro tiro?

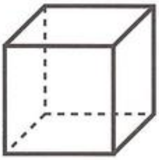
d) acerte apenas dois tiros?

B.12 Duas arestas são escolhidas, aleatoriamente, em um cubo. Qual é a probabilidade de que as arestas:

a) tenham um ponto comum?

b) não tenham nenhum ponto em comum?

c) sejam paralelas?



Exercícios complementares

C.1 A urna U_1 contém exatamente cinco bolas: três brancas e duas pretas. A urna U_2 contém exatamente seis bolas: quatro pretas e duas brancas. Uma pessoa, de olhos vendados, retira uma bola da urna U_1 e a coloca na urna U_2. A seguir, retira uma bola da urna U_2. Qual é a probabilidade de que a última bola retirada seja preta?

C.2 Os candidatos A, B e C disputam uma eleição. Uma pesquisa mostra que o candidato A tem 10% do total das intenções de voto, o candidato B tem 50% e o candidato C tem 40%. Sorteando-se três eleitores, dentre os que votarão num dos candidatos, qual é a probabilidade de pelo menos um deles ter intenção de votar no candidato B?

C.3 Um casal pretende ter três filhos. Qual é a probabilidade de:

a) os dois primeiros a nascer serem homens e o terceiro mulher?

b) o primeiro a nascer ser mulher e os outros dois homens?

c) o primeiro a nascer ser homem, o segundo mulher e o terceiro homem?

d) nascerem dois homens e uma mulher?

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Uma urna contém nove bolas, numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior que o da primeira é:

a) $\frac{72}{81}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{30}{81}$ e) $\frac{45}{81}$

V.2 (Cescem) Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%, a probabilidade de que esse animal somente venha a contrair a doença no final do terceiro mês é igual a:

a) 21% b) 49% c) 6,3% d) 14,7% e) $3(0,7)^2 \cdot 0,3\%$

V.3 (UFRS) Qual é a probabilidade de que, jogando-se um dado dez vezes, saia pelo menos uma vez o número 6?

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

b) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

c) $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

d) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

e) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Capítulo 37

Noções de estatística

1. O que é estatística?

Durante um telejornal, o repórter divulgou uma pesquisa segundo a qual apenas 5% dos brasileiros têm o hábito de ler jornal diariamente.

Você já pensou em como são feitas pesquisas como essa? Como é possível entrevistar toda a população brasileira para se saber a porcentagem de leitores de jornal?

Veremos, neste breve curso, que não é necessário entrevistar toda a população para se chegar a uma determinada conclusão sobre ela. Chegar a esse tipo de conclusão é objeto da **estatística**.

Como uma primeira idéia, podemos entender a estatística como sendo um **método** de estudo de comportamentos coletivos cujas conclusões são traduzidas em resultados numéricos.

2. Universo estatístico ou população estatística

Quando é feita uma coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se de **universo estatístico** ou **população estatística** o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados pertinentes ao assunto em questão.

Exemplos

a) O governo encomenda ao IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) uma pesquisa para conhecer o salário médio do brasileiro. O **universo estatístico** ou **população estatística** é, nesse caso, o conjunto de todos os assalariados brasileiros.

b) Um partido político quer conhecer a tendência do eleitorado quanto à preferência entre dois candidatos à presidência da República do Brasil. Para isso, encomenda uma pesquisa a uma empresa especializada. O **universo estatístico** ou **população estatística** é, nesse caso, o conjunto de todos os eleitores brasileiros.

3. Amostra

Quando o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os seus elementos, retira-se desse universo um subconjunto, chamado de **amostra**, e os dados são coletados nessa amostra.

Para que a amostra seja representativa, isto é, para que ela não apresente tendências diferentes das do universo estatístico, devemos adotar critérios para torná-la imparcial.

Exemplo

Para conhecer a estatura média da mulher brasileira, adotam-se os critérios a seguir na escolha da amostra:

- escolhem-se aleatoriamente apenas mulheres adultas;
- escolhem-se aleatoriamente mulheres em todas as regiões do Brasil;
- as quantidades de mulheres devem ser proporcionais às quantidades de mulheres das várias regiões;
- em cada região, escolhem-se mulheres de todas as classes sociais;
- as quantidades de mulheres em cada região devem ser proporcionais às quantidades de mulheres nas várias classes sociais.

Tais critérios procuram tornar a tendência da amostra o mais próxima possível da tendência do universo estatístico.

3.1. Amplitude de uma amostra

As estaturas, em metros, de vinte mulheres estão representadas na seguinte amostra:

1,59	1,60	1,65	1,72	1,58
1,50	1,48	1,62	1,65	1,65
1,70	1,58	1,45	1,63	1,65
1,68	1,50	1,43	1,49	1,56

Observe que a maior medida da amostra é 1,72 m e que a menor é 1,43 m. Dizemos que a **amplitude** dessa amostra é 1,72 m − 1,43 m = 0,29 m.

Definição

A **amplitude** de uma amostra de números é $b - a$ se, e somente se, b e a são, respectivamente, o maior e o menor número dessa amostra.

4. Rol

É toda seqüência (a_1; a_2; a_3; ...; a_n) de dados numéricos tal que:

- cada termo, a partir do segundo, é **maior ou igual** ao seu **antecessor**;
- ou cada termo, a partir do segundo, é **menor ou igual** ao seu **antecessor**.

Exemplo

Os cinco alunos de uma amostra apresentaram as seguintes notas na prova bimestral de matemática: 6; 4; 8; 7; 8. Apresentando esses dados em rol, temos: (4; 6; 7; 8; 8) ou (8; 8; 7; 6; 4).

5. Distribuição de freqüência

Uma amostra de potes de margarina apresentou as seguintes massas, em gramas: 480; 505; 490; 500; 510; 450; 500; 470; 520; 550; 460; 500; 530; 480. Podemos separar os elementos dessa amostra em róis disjuntos; por exemplo:

I. 450; 460; 470;
II. 480; 480; 490;
III. 500; 500; 500; 505; 510;
IV. 520; 530;
V. 550.

Qualquer intervalo real, aberto, semi-aberto ou fechado que contenha um rol da amostra é chamado de **classe**.

Com relação aos róis disjuntos das massas da amostra dos potes de margarina, podemos ter, por exemplo:

- o intervalo 449,5 —— 470,5 contém o rol (I);
- o intervalo 470,5 —— 490,5 contém o rol (II);
- o intervalo 490,5 —— 510,5 contém o rol (III);
- o intervalo 510,5 —— 530,5 contém o rol (IV);
- o intervalo 530,5 —— 550,5 contém o rol (V).

Convenção: o símbolo a —— b indica o intervalo fechado de extremos a e b, isto é: $[a, b]$.

5.1. Critérios para formação de classes

Para separar os elementos de uma amostra em classes, adotamos alguns critérios com o objetivo de não permitir que um elemento da amostra pertença a mais de uma classe ou que não pertença a nenhuma delas. Esses critérios podem ser:

I. se a e b são, respectivamente, o menor e o maior elemento da amostra, então o extremo inferior da primeira classe deve ser menor ou igual a a e o extremo superior da última classe deve ser maior ou igual a b;

II. o extremo inferior de cada classe, a partir da segunda, deve ser igual ao extremo superior da classe imediatamente anterior;

III. os extremos de cada classe não devem ser elementos da amostra, exceção feita ao extremo inferior da primeira classe e ao superior da última.

Para entender o porquê desse critério (III) vamos voltar ao exemplo da amostra dos potes de margarina, separando as massas segundo as classes:

450 —— 500; 500 —— 520; 520 —— 550.

Como 500 g é um elemento da amostra, nos deparamos com a seguinte dúvida: 500 g é elemento da classe 450 —— 500 ou da classe 500 —— 520? O mesmo ocorre com o elemento 520: pertence à classe 500 —— 520 ou à classe 520 —— 550?

Para evitar esse tipo de dúvida, é desejável que os extremos de cada classe não pertençam à amostra.

Note, no entanto, que, apesar de 450 g e 550 g serem elementos da amostra, não há dúvida quanto a que classe cada um deles pertence: 450 g pertence à classe 450 —— 500; e 550 g pertence à classe 520 —— 550.

Vamos adotar um critério geral para todas as classes, inclusive para a primeira e a última, não permitindo que algum extremo de classe pertença à amostra.

Nota: esses critérios **não** são obrigatórios, mas são convenientes, principalmente para a construção de histogramas (ver item 10 deste capítulo).

5.2. Freqüência de classe

A quantidade de elementos da amostra que pertencem a uma determinada classe é chamada de "**freqüência** dessa classe".

No exemplo introdutório, separamos as massas (em gramas) dos potes de margarina segundo as classes:

449,5 —— 470,5; 470,5 —— 490,5; 490,5 —— 510,5; 510,5 —— 530,5; 530,5 —— 550,5.

- A freqüência da classe 449,5 —— 470,5 é igual a 3, pois 3 elementos da amostra pertencem a essa classe.
- A freqüência da classe 470,5 —— 490,5 é igual a 3, pois 3 elementos da amostra pertencem a essa classe.

- Analogamente, a classe 490,5 —— 510,5, a classe 510,5 —— 530,5 e a classe 530,5 —— 550,5 têm freqüências, respectivamente, iguais a 5, 2 e 1.

Podemos apresentar as classes com suas respectivas freqüências através de uma tabela chamada de **tabela de distribuição de freqüência**:

Classe (massa em gramas)	Freqüência (número de potes)
449,5 —— 470,5	3
470,5 —— 490,5	3
490,5 —— 510,5	5
510,5 —— 530,5	2
530,5 —— 550,5	1

6. Amplitude de uma classe

Definição

Se a e b são extremos de uma classe, com $a < b$, chama-se **amplitude dessa classe** o número $b - a$.

Na tabela anterior:

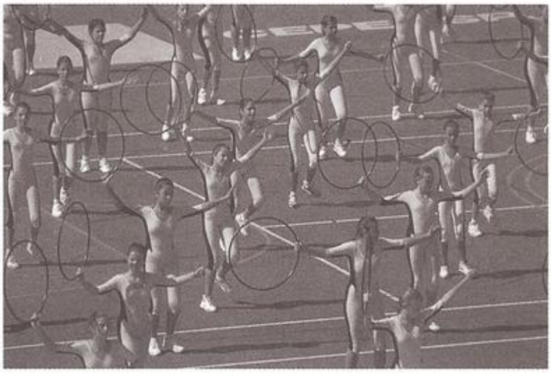
- a classe 449,5 —— 470,5 tem amplitude igual a $470{,}5 - 449{,}5 = 21$, em gramas;
- a classe 470,5 —— 490,5 tem amplitude igual a $490{,}5 - 470{,}5 = 20$, em gramas.

7. Classes unitárias

Podemos considerar uma classe como um único número real. Esse tipo de classe é denominado **classe unitária**.

Exemplo

Para participar das olimpíadas, um técnico fez teste com quarenta ginastas que concorriam a uma vaga à ginástica rítmica. Veja, a seguir, a tabela de distribuição de freqüência que mostra o desempenho das ginastas no teste.



DELFIM MARTINS/PULSAR

Classe (nota atribuída)	Freqüência (número de ginastas)
6,0	5
6,5	4
7,0	6
7,5	8
8,0	8
8,5	4
9,0	2
9,5	2
10,0	1

As notas atribuídas são **classes unitárias**, pois cada uma é um único número real.

8. Freqüência relativa de uma classe

Consideremos a tabela do exemplo anterior:

Classe (nota atribuída)	Freqüência (número de ginastas)
6,0	5
6,5	4
7,0	6
7,5	8
8,0	8
8,5	4
9,0	2
9,5	2
10,0	1

A soma de todas as freqüências, $5 + 4 + 6 + 8 + 8 + 4 + 2 + 2 + 1 = 40$, é a **freqüência total** (F_t) da distribuição. Dividindo a freqüência F de uma classe pela freqüência total F_t obtemos um número chamado de **freqüência relativa da classe**. É usual apresentar-se a freqüência relativa em porcentagem. Indicando a freqüência relativa de uma classe por $F\%$, tem-se que:

$$F\% = \frac{F}{F_t} \cdot 100\%.$$

Da tabela anterior temos, por exemplo, que:

- a classe 6,0 tem freqüência relativa igual a $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 0{,}125 \cdot 100\% = 12{,}5\%$;
- a classe 6,5 tem freqüência relativa igual a $\frac{4}{40} \cdot 100\% = 0{,}1 \cdot 100\% = 10\%$;
- a classe 7,0 tem freqüência relativa igual a $\frac{6}{40} \cdot 100\% = 0{,}15 \cdot 100\% = 15\%$.

Podemos então apresentar a tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa:

Classe (nota atribuída)	F	$F\%$
6,0	5	12,5%
6,5	4	10%
7,0	6	15%
7,5	8	20%
8,0	8	20%
8,5	4	10%
9,0	2	5%
9,5	2	5%
10,0	1	2,5%
	$F_t = \sum F = 40$	

Exercícios resolvidos

R.1 A seguinte tabela de distribuição de freqüência descreve o desempenho de cinqüenta alunos na última prova de matemática:

Classe (nota atribuída)	Freqüência (número de alunos)
3,5	1
4,5	5
5,0	9
6,0	11
7,5	8
8,0	6
8,5	4
9,0	3
9,5	2
10,0	1

Construir a tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa.

Resolução

A freqüência total da distribuição é $F_t = 1 + 5 + 9 + 11 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 50$.
Temos então que as freqüências relativas das classes são:

$$\frac{1}{50} \cdot 100\% = 0{,}02 \cdot 100\% = 2\%; \qquad \frac{9}{50} \cdot 100\% = 0{,}18 \cdot 100\% = 18\%;$$

$$\frac{5}{50} \cdot 100\% = 0{,}1 \cdot 100\% = 10\%; \qquad \frac{11}{50} \cdot 100\% = 0{,}22 \cdot 100\% = 22\%;$$

$$\frac{8}{50} \cdot 100\% = 0{,}16 \cdot 100\% = 16\%; \qquad \frac{3}{50} \cdot 100\% = 0{,}06 \cdot 100\% = 6\%;$$

$$\frac{6}{50} \cdot 100\% = 0{,}12 \cdot 100\% = 12\%; \qquad \frac{2}{50} \cdot 100\% = 0{,}04 \cdot 100\% = 4\%;$$

$$\frac{4}{50} \cdot 100\% = 0{,}08 \cdot 100\% = 8\%; \qquad \frac{1}{50} \cdot 100\% = 0{,}02 \cdot 100\% = 2\%.$$

Logo, a tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa é:

Classe	F	$F\%$
3,5	1	2%
4,5	5	10%
5,0	9	18%
6,0	11	22%
7,5	8	16%
8,0	6	12%
8,5	4	8%
9,0	3	6%
9,5	2	4%
10,0	1 $F_t = \Sigma F = 50$	2%

R.2 Numa amostra de latas de óleo comestível, foram constatados os seguintes volumes, em mililitros: 980; 990; 1 000; 970; 980; 1 000; 1 010; 950; 970; 940; 1 020; 1 010; 920; 990; 950; 900; 1 000; 950; 970; 1 010. Construir uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa, com seis classes.

Resolução

Devemos tomar o cuidado de não permitir que qualquer extremo de classe seja um elemento da amostra. Uma distribuição possível é:

Classe (volume em mililitros)	F	$F\%$
895 —— 925	2	10%
925 —— 945	1	5%
945 —— 965	3	15%
965 —— 985	5	25%
985 —— 1 005	5	25%
1 005 —— 1 025	4 $F_t = \Sigma F = 20$	20%

R.3 As massas, em gramas, de vinte pacotes de café são:

480	510	500	495	490
520	512	478	508	492
495	508	500	506	490
506	500	480	485	510

Separar essa amostra em cinco classes de mesma amplitude e construir a tabela de distribuição de freqüência.

Resolução

Observemos que 478 g e 520 g são, respectivamente, o menor e o maior elemento da amostra.

Adotamos o critério de separar a amostra em classes de modo que os extremos de cada uma delas não pertençam à amostra.

Assim, consideremos como extremo inferior da primeira classe um valor menor do que 478 (por exemplo, 477,5) e como extremo superior da última classe um valor maior que 520 (por exemplo, 520,5). A seguir, dividimos a diferença 520,5 − 477,5 pelo número de classes, $\frac{520{,}5 - 477{,}5}{5} = 8{,}6$, obtendo assim uma possível amplitude, em gramas, de cada classe.

A tabela de distribuição por freqüência (*F*) e por freqüência relativa (*F*%) é:

Classe (em gramas)	*F*	*F*%
477,5 —— 486,1	4	20%
486,1 —— 494,7	3	15%
494,7 —— 503,3	5	25%
503,3 —— 511,9	6	30%
511,9 —— 520,5	2 $F_t = \sum F = 20$	10%

Nota: se, para a amplitude 8,6 g das classes, algum extremo de classe coincidisse com algum elemento da amostra, então adotaríamos um outro valor conveniente (por exemplo, 8,7 g), como amplitude das classes.

9. Representações gráficas de uma distribuição de freqüência

Uma distribuição de freqüência pode ser representada graficamente. Tais gráficos dividem-se em duas categorias: os de informação e os de análise.

Os gráficos de informação têm como finalidade oferecer informações apenas quantitativas sobre a distribuição de freqüência. Os de análise se destinam a estudos mais profundos, exigindo portanto maior precisão e rigor.

Neste curso, vamos tratar apenas dos gráficos de informação. Alguns tipos desses gráficos são:

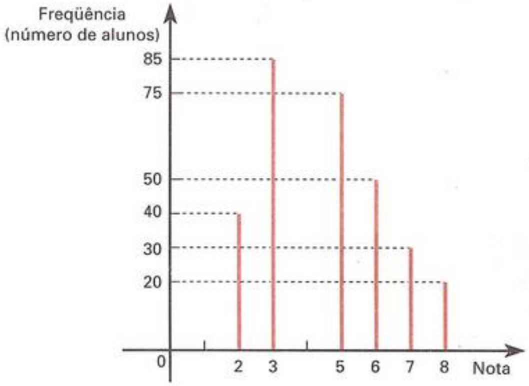
- gráfico de barras verticais;
- gráfico de barras horizontais;
- gráfico por setores;
- histograma.

Vamos agora construir o gráfico de barras verticais, o gráfico de barras horizontais e o gráfico por setores, através do seguinte exemplo: para se ter uma idéia do nível de ensino numa determinada região, escolheu-se uma amostra de trezentos alunos da primeira série colegial e aplicou-se uma prova. A tabela de distribuição de freqüência ao lado mostra o resultado dessa prova.

Classe (nota)	Freqüência (número de alunos)
2,0	40
3,0	85
5,0	75
6,0	50
7,0	30
8,0	20

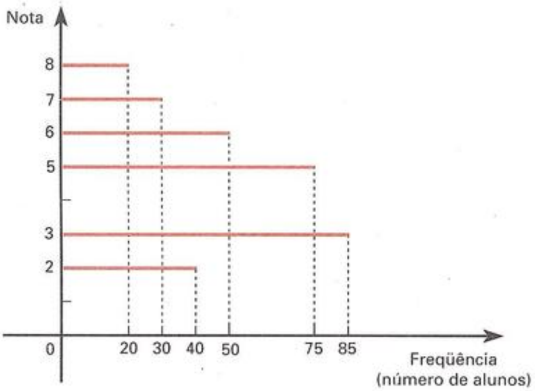
Assim, temos:

Gráfico de barras verticais



As freqüências são dispostas num eixo vertical.

Gráfico de barras horizontais



As freqüências são dispostas num eixo horizontal.

Gráfico por setores

Divide-se um círculo em setores, com ângulos proporcionais às freqüências das classes. Nesse caso, dividimos 360° em partes proporcionais às freqüências 20, 30, 40, 50, 75 e 85.

$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 20 = 24^\circ;$$

$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 30 = 36^\circ;$$

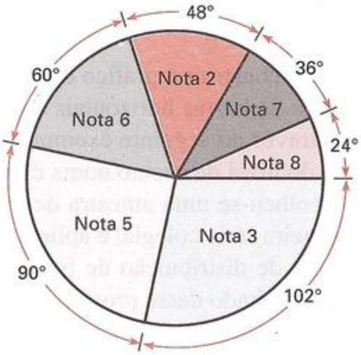
$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 40 = 48^\circ;$$

$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 50 = 60^\circ;$$

$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 75 = 90^\circ;$$

$$\frac{360^\circ}{20+30+40+50+75+85} \cdot 85 = 102^\circ.$$

Graficamente, temos:

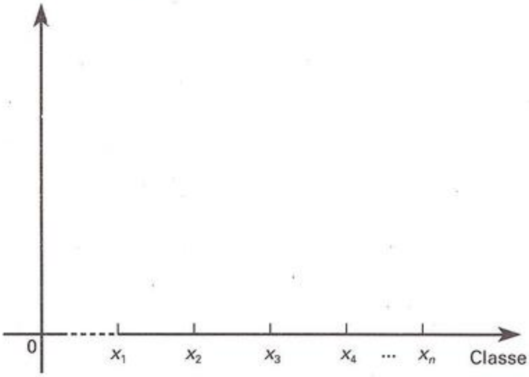


10. Histograma

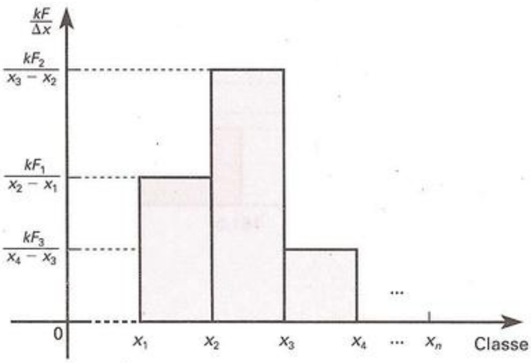
O **histograma** é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de freqüência em que as classes não são unitárias. Veja, a seguir, como esse gráfico é construído.

1º) Representam-se no eixo das abscissas as classes da distribuição:

Classe	Freqüência
x_1 —— x_2	F_1
x_2 —— x_3	F_2
x_3 —— x_4	F_3
⋮	⋮
x_{n-1} —— x_n	F_n



2º) Constroem-se retângulos cujas bases coincidem com as classes; a altura de cada retângulo deve ser igual a $\frac{kF}{\Delta x}$, onde F e Δx são respectivamente a freqüência e a amplitude da classe que coincide com a base do retângulo e k é uma constante positiva qualquer:



Observe que as áreas desses retângulos são proporcionais às freqüências das respectivas classes. Por exemplo:

- a área do retângulo cuja base é a classe x_1 —— x_2 é igual a $(x_2 - x_1)\frac{kF_1}{(x_2 - x_1)} = kF_1$;
- a área do retângulo cuja base é a classe x_2 —— x_3 é igual a $(x_3 - x_2)\frac{kF_2}{(x_3 - x_2)} = kF_2$;
- analogamente, as áreas dos retângulos seguintes são kF_3, kF_4, kF_5, ..., kF_{n-1}.

Como k pode ser uma constante positiva qualquer, faremos usualmente $k = 1$. Desse modo as áreas dos retângulos serão F_1, F_2, F_3, ..., F_n, isto é, serão as próprias freqüências das classes.

Nota: quando todas as classes tiverem a mesma amplitude Δx, pode-se fazer $k = \Delta x$ e, nesse caso, a altura de cada retângulo é a própria freqüência da respectiva classe.

Exemplo

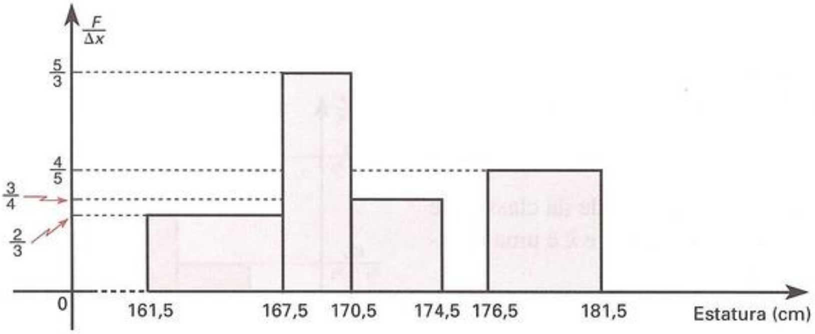
Os alunos de uma amostra apresentaram as seguintes estaturas, em centímetros:

168	170	165	177
169	180	162	171
178	173	164	172
181	166	168	170

Uma distribuição de freqüência é:

Classe (estatura em centímetros)	Freqüência
161,5 —— 167,5	4
167,5 —— 170,5	5
170,5 —— 174,5	3
174,5 —— 176,5	0
176,5 —— 181,5	4

O histograma que corresponde a essa distribuição é:



Observe que:

- os valores $\frac{F}{\Delta x}$ são calculados dividindo-se a freqüência F de cada classe pela amplitude dessa classe; por exemplo, a classe 161,5 —— 167,5 tem freqüência 4 e amplitude 6; logo, $\frac{F}{\Delta x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;
- a área de cada retângulo é numericamente igual à freqüência da respectiva classe; por exemplo, a área do retângulo que corresponde à classe 161,5 —— 167,5 é $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, que é exatamente a freqüência dessa classe;
- a classe 174,5 —— 176,5 corresponde a um "retângulo de altura zero"; logo, sua freqüência é zero.

Através desse exemplo você pode perceber por que na separação da amostra em classes não é conveniente que um extremo de classe seja elemento da amostra. Por exemplo, se 167,5 fosse elemento da amostra, não conseguiríamos determinar, apenas pelo histograma, a classe a que pertence, primeira ou segunda.

Exercícios resolvidos

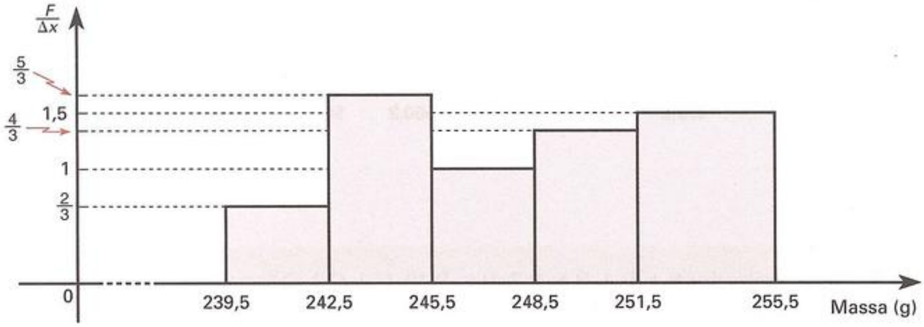
R.4 Uma amostra de pacotes de manteiga apresentou as seguintes massas, em gramas: 245; 248; 251; 252; 244; 243; 250; 247; 245; 240; 245; 250; 255; 253; 254; 248; 242; 253; 251; 252. Construir uma tabela de distribuição de freqüência e seu respectivo histograma.

Resolução

Separemos a amostra em cinco classes. É conveniente que os extremos das classes não sejam elementos da amostra. Uma distribuição possível é representada na tabela ao lado.

Classe (massa em gramas)	Freqüência (F)
239,5 —— 242,5	2
242,5 —— 245,5	5
245,5 —— 248,5	3
248,5 —— 251,5	4
251,5 —— 255,5	6 $F_t = 20$

Graficamente temos:



R.5 Os volumes, em mililitros, de dezoito frascos de refrigerante são:

495	490	500	503	485	510
480	520	515	490	500	495
508	498	485	506	510	483

Construir uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

Resolução

O menor e o maior elemento da amostra são, respectivamente, 480 e 520. Consideremos como extremo inferior da primeira classe um valor menor do que 480 (por exemplo, 479,5) e como extremo superior da última classe um valor maior que 520 (por exemplo, 520,5).

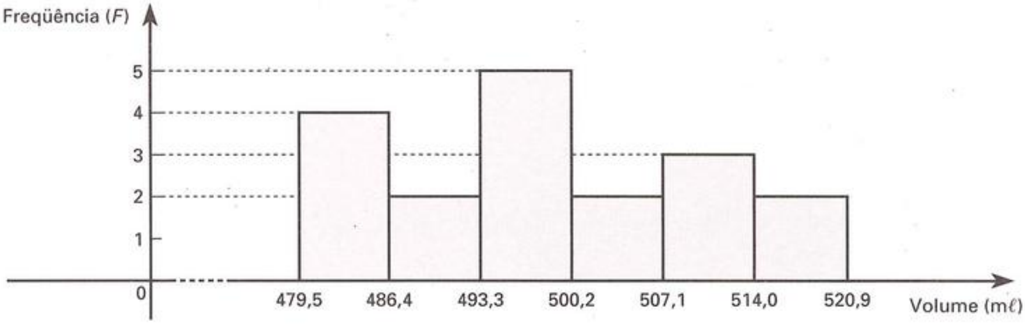
Assim, a amplitude de cada uma das seis classes será $\frac{520,5 - 479,5}{6} = 6{,}8333...$

É claro que esse número não é conveniente. Por comodidade, arredondamos a amplitude para 6,9. Esse arredondamento altera um dos extremos 479,5 ou 520,5, mas isso não tem importância, já que esses valores são, até certo ponto, arbitrários. Observe ao lado a tabela de distribuição de freqüência.

Classe (em mililitros)	Freqüência (F)
479,5 —— 486,4	4
486,4 —— 493,3	2
493,3 —— 500,2	5
500,2 —— 507,1	2
507,1 —— 514,0	3
514,0 —— 520,9	2

Para construir o histograma, marcamos no eixo das ordenadas os valores $\frac{kF}{\Delta x}$ para cada classe, onde k é uma constante real positiva qualquer. Como todas as classes têm a mesma amplitude $\Delta x = 6{,}9$, façamos, por comodidade, $k = 6{,}9$. Assim, teremos $\frac{kF}{\Delta x} = \frac{6{,}9F}{6{,}9} = F$. Ou seja, a altura de cada retângulo do histograma é numericamente igual à freqüência da classe correspondente.

Temos, então, o seguinte histograma:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.8, B.10, C.2, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.9, B.11, C.1, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Numa amostra de soldados do exército foram constatadas as seguintes estaturas, em metros: 1,80; 1,78; 1,69; 1,92; 1,93; 1,81; 1,90; 1,76; 1,74; 1,83; 1,88; 1,79; 1,85; 1,92; 1,86; 1,74. Construa uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa dessa amostra, com quatro classes.

B.2 Numa amostra de pacotes de farinha foram constatadas as seguintes massas em gramas: 980; 970; 1 000; 980; 960; 930; 940; 970; 950; 970; 960; 1 020; 1 030; 920; 940; 950; 980; 1 010; 930; 1 040. Construa uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa dessa amostra, com cinco classes.

B.3 Um dado foi lançado seiscentas vezes. A tabela de distribuição de freqüência é:

Classe (face)	Freqüência
1	90
2	90
3	102
4	108
5	120
6	90

Construa os seguintes gráficos dessa distribuição: de barras verticais, de barras horizontais e por setores.

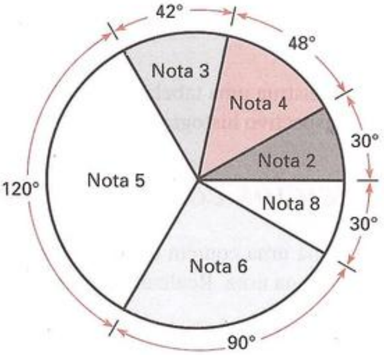
B.4 A tabela seguinte corresponde à distribuição de freqüência das camisas vendidas por uma confecção no mês de maio, segundo a numeração (1, 2, 3, 4 e 5) das camisas.

Classe (numeração)	Freqüência (número de unidades vendidas)
1	50
2	150
3	250
4	450
5	100

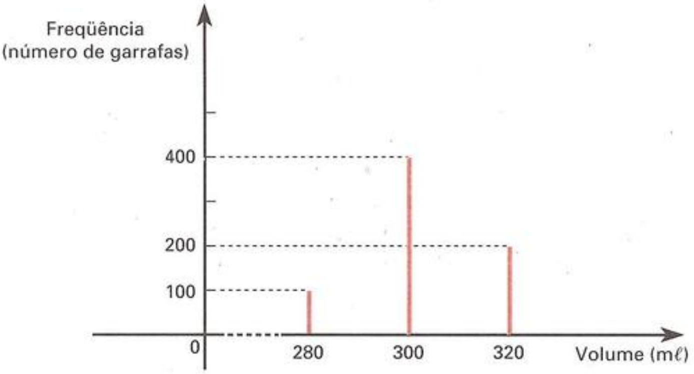
Construa os seguintes gráficos dessa distribuição: de barras verticais, de barras horizontais e por setores.

B.5 Numa amostra de latas de leite em pó foram constatadas as seguintes massas em gramas: 485; 470; 508; 510; 495; 490; 500; 505; 480; 495; 510; 500; 480; 550; 490. Construa uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa, com cinco classes.

B.6 O gráfico por setores representado ao lado mostra a distribuição de uma amostra de alunos e suas respectivas notas na prova de português.
Sabendo que a amostra é composta de sessenta alunos, responda:
a) quantos alunos tiveram nota 3?
b) quantos alunos tiveram nota 5?
c) qual a freqüência relativa da classe "nota 6"?



B.7 O gráfico mostra a distribuição de uma amostra de garrafas de refrigerantes e seus respectivos volumes em mililitros:



a) Quantas garrafas compõem essa amostra?

b) Qual a freqüência relativa da classe "300 mℓ"?

B.8 Foram testadas quinze lâmpadas. Os tempos de duração, em horas, foram: 300; 1050; 480; 600; 320; 390; 800; 750; 670; 280; 1100; 700; 400; 520; 900. Construa uma tabela de distribuição de freqüência com cinco classes e o respectivo histograma.

B.9 A tabela relaciona os diâmetros, em centímetros, das barras de ferro de uma amostra:

3,10	2,95	3,20	3,15
2,80	3,15	3,40	3,35
2,70	2,95	3,15	2,95
3,20	3,10	2,85	3,25

Construa uma tabela de distribuição de freqüência com cinco classes e o respectivo histograma.

B.10 Os tempos de duração, em dias, de vinte válvulas foram:

150	210	309	270	180
246	285	195	210	248
199	250	290	284	301
221	300	190	210	259

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com cinco classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

B.11 As áreas, em metros quadrados, dos trinta terrenos de um loteamento são:

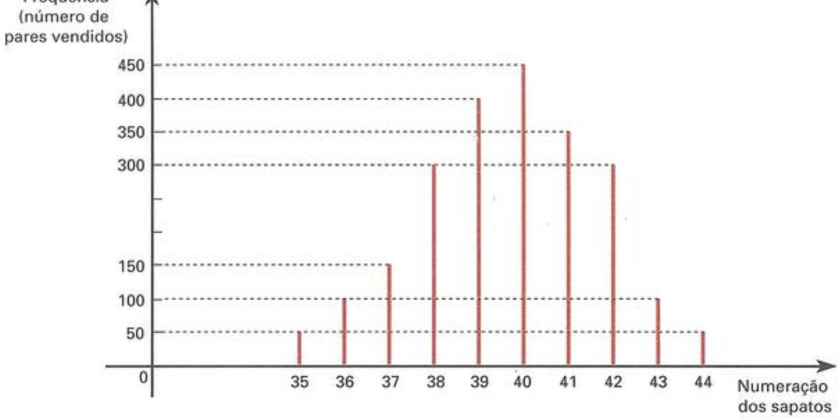
302	308	300	298	310	280
290	298	320	280	286	300
260	270	315	295	290	310
320	290	312	298	315	300
280	288	315	318	310	275

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

Exercícios complementares

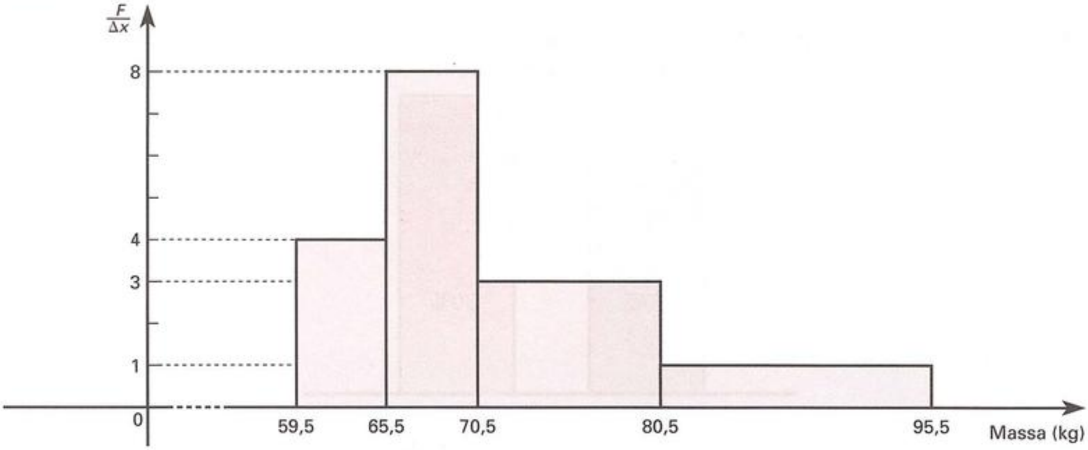
C.1 Uma urna contém quatro bolas numeradas de 1 a 4. Retira-se uma bola da urna e, a seguir, repõe-se essa bola na urna. Realizando cem vezes esse experimento, um matemático constatou que a freqüência da bola 1 foi o dobro da freqüência da bola 4, a freqüência da bola 2 foi $\frac{3}{2}$ da freqüência da bola 1 e a freqüência da bola 3 foi 10. Construa uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa desse experimento.

C.2 O gráfico corresponde à distribuição de freqüência dos pares de sapatos vendidos por uma fábrica no mês de abril, segundo as numerações dos calçados.



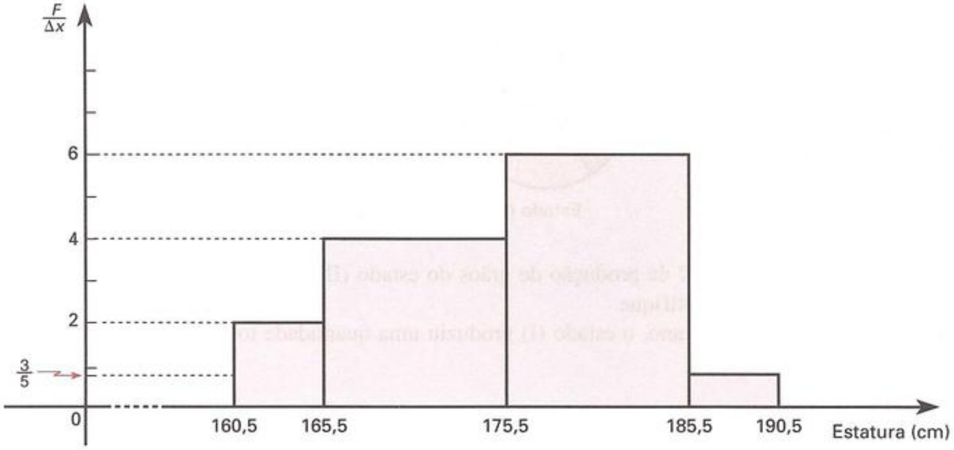
a) Quantos pares de calçados foram vendidos por essa empresa no mês de abril?
b) Qual a freqüência relativa da classe 40, isto é, da numeração 40?
c) Construa um gráfico por setores correspondente a essa distribuição.

C.3 O histograma abaixo descreve a distribuição das massas, em quilogramas, dos alunos do segundo ano colegial.



a) Qual é a freqüência da classe 65,5 —— 70,5?
b) Qual é a freqüência da classe 70,5 —— 80,5?
c) Quantos alunos fazem parte dessa amostra?

C.4 O histograma descreve a distribuição das estaturas, em centímetros, dos alunos do terceiro ano colegial.



a) Quantos alunos dessa amostra têm estatura maior do que 185,5 cm?
b) Quantos alunos dessa amostra têm menos de 165,5 cm de estatura?
c) Quantos alunos fazem parte dessa amostra?

C.5 As estaturas, em metros, de dezoito alunos são:

1,68	1,75	1,70	1,65	1,74	1,76
1,63	1,72	1,73	1,64	1,75	1,69
1,71	1,69	1,68	1,75	1,69	1,72

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

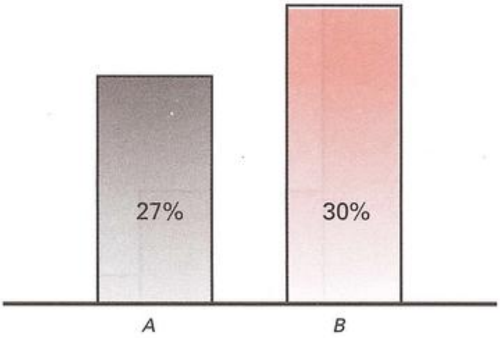
C.6 As áreas construídas, medidas em metros quadrados, de vinte residências de uma certa região são:

250	280	330	402	385
302	290	270	310	304
407	380	295	283	402
390	300	283	250	265

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

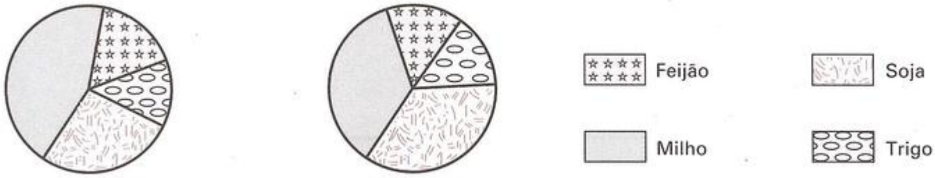
Questões dos vestibulares

V.1 (UFGO) Numa pesquisa eleitoral, o candidato A teria 27% dos votos e o candidato B, 30%. Esses dados estão representados incorretamente no gráfico seguinte, onde as bases dos retângulos têm medidas iguais.



Se nesse gráfico a altura do retângulo que corresponde ao candidato A é 3 cm, qual deve ser a altura do retângulo correspondente a B, de modo que as áreas dos retângulos sejam proporcionais às respectivas porcentagens?

V.2 (UFRJ) Dois estados do país, num certo ano, produzem os mesmos tipos de grão. Os gráficos a seguir ilustram a relação entre a produção de cada tipo de grão de um estado e a produção total desse mesmo estado.

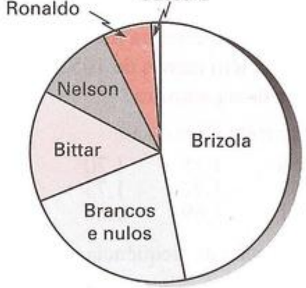


Estado (I) Estado (II)

a) Determine que porcentual da produção de grãos do estado (II), desse ano, representa as produções de soja e de trigo, juntas. Justifique.

b) Pode-se dizer que, nesse ano, o estado (I) produziu uma quantidade total de milho maior do que a do estado (II)? Por quê?

V.3 (Cesgranrio)



O gráfico representa o resultado da eleição para governador do Estado do Rio de Janeiro.

Brizola, 47%;	Nelson, 10%;
Brancos e nulos, 22%;	Ronaldo, 6%;
Bittar, 14%;	Jussara, 1%.

Sabendo que, no gráfico, a votação de cada candidato é proporcional à área do setor que o representa, podemos afirmar que o ângulo central do setor do candidato Bittar é de:

a) 14º b) 25º c) 50º24' d) 57º36' e) 60º12'

Capítulo 38

Medidas de posição e de dispersão

1. Introdução

Para avaliar o desempenho dos alunos da segunda série colegial, um professor estabeleceu o seguinte critério na escolha das questões para uma prova bimestral:

- considera-se desempenho bom o de um aluno que obtenha nota maior ou igual a 7;
- considera-se desempenho regular o de um aluno que obtenha nota maior ou igual a 5 e menor que 7;
- considera-se desempenho fraco o de um aluno que obtenha nota menor que 5.

A tabela seguinte mostra as notas dos vinte alunos de uma das salas que fizeram essa prova:

8,0	5,5	6,5	3,0	4,5	8,0	5,5	6,0	6,5	2,0
4,0	7,5	6,5	4,5	5,0	10,0	4,0	8,0	7,0	8,0

Analisando individualmente a nota de cada aluno, podemos classificar o desempenho como bom, regular ou fraco. Para uma análise do desempenho da classe como um todo (o que faremos no exercício R.6), necessitamos de alguns parâmetros: as **medidas de posição** e as **medidas de dispersão**, que servem para nos orientar quanto à tendência da amostra.

2. Medidas de posição

As medidas de posição nos mostram o posicionamento dos elementos da amostra quando esta é disposta em rol. Algumas medidas de posição são: a **média aritmética**, a **mediana** e a **moda.**

2.1. Média aritmética

Chama-se "**média aritmética** dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$" o número $\overline{x}$ tal que:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Exemplos

a) A tabela seguinte mostra as idades dos cinco jogadores da equipe de basquetebol do nosso colégio:

18; 16; 15; 17; 17.

A idade **média** desses jogadores é $\overline{x} = \dfrac{18 + 16 + 15 + 17 + 17}{5} = 16{,}6.$

b) No exemplo introdutório deste capítulo, vimos que as notas dos vinte alunos foram:

$$\begin{array}{cccccccccc} 8{,}0 & 5{,}5 & 6{,}5 & 3{,}0 & 4{,}5 & 8{,}0 & 5{,}5 & 6{,}0 & 6{,}5 & 2{,}0 \\ 4{,}0 & 7{,}5 & 6{,}5 & 4{,}5 & 5{,}0 & 10{,}0 & 4{,}0 & 8{,}0 & 7{,}0 & 8{,}0 \end{array}$$

A soma de todas essas notas é 120. Logo, a média aritmética dessas notas é $\overline{x} = \dfrac{120}{20} = 6{,}0$.

2.2. Média aritmética ponderada

O critério de avaliação de um colégio atribui peso 1 às notas do primeiro bimestre, peso 2 às do segundo bimestre e peso 3 às notas do terceiro e do quarto bimestre.

As notas de Paulo em matemática foram: 5,0 no primeiro bimestre; 8,0 no segundo; 5,0 no terceiro; e 6,0 no quarto. Qual foi sua média final?

	1º Bim.	**2º Bim.**	**3º Bim.**	**4º Bim.**
Matemática	5,0	8,0	5,0	6,0
Português	*	*	*	*
História	*	*	*	*
Geografia	*	*	*	*
Inglês	*	*	*	*

Os pesos indicam o número de vezes que cada nota deve ser considerada para o cálculo da média aritmética. Isto é, devemos calcular a média aritmética entre os seguintes números:

$$\underbrace{5{,}0}\quad \underbrace{8{,}0 \quad 8{,}0}\quad \underbrace{5{,}0 \quad 5{,}0 \quad 5{,}0}\quad \underbrace{6{,}0 \quad 6{,}0 \quad 6{,}0}$$

Assim, a média aritmética é:

$$\overline{x} = \frac{5{,}0 + 8{,}0 + 8{,}0 + 5{,}0 + 5{,}0 + 5{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0}{9} \quad \therefore \overline{x} = \frac{54{,}0}{9} = 6{,}0.$$

Portanto a média final de Paulo foi 6,0.

De modo geral, definimos:

Sejam n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, aos quais são atribuídos fatores de ponderação (pesos) $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, respectivamente. Chama-se "**média aritmética ponderada** dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$" o número $\overline{x}$ tal que:

$$\overline{x} = \frac{x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + \dots + x_nP_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n}$$

Exercícios resolvidos

R.1 Numa empresa, dez operários têm salário de R$ 2.000,00 mensais; doze têm salário de R$ 1.500,00 mensais; e oito operários têm salário de R$ 1.400,00 mensais. Qual é o salário médio desses operários?

Resolução

O salário mensal médio dos operários é a **média aritmética ponderada** entre os valores R$ 2.000,00, R$ 1.500,00 e R$ 1.400,00 com fatores de ponderação (pesos) respectivamente iguais a 10, 12 e 8. Isto é:

$$\overline{x} = \frac{10 \cdot 2.000 + 12 \cdot 1.500 + 8 \cdot 1.400}{10 + 12 + 8} \text{ reais} \therefore \overline{x} = \text{R\$ } 1.640{,}00.$$

Logo, o salário mensal médio dos operários é R$ 1.640,00.

R.2 A tabela seguinte mostra a distribuição de freqüência das estaturas, em centímetros, de uma amostra de estudantes do primeiro grau.

Classe (estaturas em centímetros)	Freqüência (número de alunos)
150,5 —— 156,5	4
156,5 —— 160,5	5
160,5 —— 168,5	8
168,5 —— 178,5	3

Qual é a estatura média dos estudantes dessa amostra?

Resolução

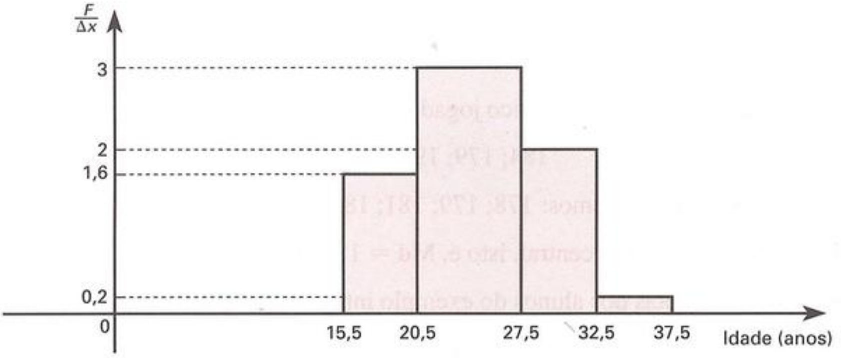
Quando as classes não são unitárias, como nesse caso, para calcular a média tomamos o **ponto médio** x_M de cada classe e calculamos a **média aritmética ponderada** entre os valores x_M, atribuindo a cada um o peso igual à freqüência da respectiva classe. Isto é:

Classe	Ponto médio (x_M)	Freqüência
150,5 —— 156,5	$\frac{150{,}5 + 156{,}5}{2} = 153{,}5$	4
156,5 —— 160,5	$\frac{156{,}5 + 160{,}5}{2} = 158{,}5$	5
160,5 —— 168,5	$\frac{160{,}5 + 168{,}5}{2} = 164{,}5$	8
168,5 —— 178,5	$\frac{168{,}5 + 178{,}5}{2} = 173{,}5$	3

Calculando a média aritmética ponderada dos números 153,5, 158,5, 164,5 e 173,5, com pesos respectivamente iguais a 4, 5, 8 e 3, temos $\overline{x} = \frac{153{,}5 \cdot 4 + 158{,}5 \cdot 5 + 164{,}5 \cdot 8 + 173{,}5 \cdot 3}{4 + 5 + 8 + 3} = 162{,}15$.

Logo, a estatura média dos estudantes é 162,15 cm.

R.3 O histograma seguinte mostra a distribuição das idades de uma amostra de estudantes de um curso noturno:



Qual é a idade média desses estudantes?

Resolução
Inicialmente, determinamos o ponto médio e a freqüência de cada classe:

Classe	Ponto médio	Amplitude da classe (Δx)	Freqüência (F)
15,5 —— 20,5	$\frac{15{,}5 + 20{,}5}{2} = 18$	$20{,}5 - 15{,}5 = 5$	$1{,}6 \cdot 5 = 8$
20,5 —— 27,5	$\frac{20{,}5 + 27{,}5}{2} = 24$	$27{,}5 - 20{,}5 = 7$	$3 \cdot 7 = 21$
27,5 —— 32,5	$\frac{27{,}5 + 32{,}5}{2} = 30$	$32{,}5 - 27{,}5 = 5$	$2 \cdot 5 = 10$
32,5 —— 37,5	$\frac{32{,}5 + 37{,}5}{2} = 35$	$37{,}5 - 32{,}5 = 5$	$0{,}2 \cdot 5 = 1$

Nota: para obter a freqüência de cada classe, igualamos $\frac{F}{\Delta x}$ com a altura do respectivo retângulo do gráfico; por exemplo, a freqüência da classe 15,5 —— 20,5 é obtida por $\frac{F}{5} = 1{,}6 \Rightarrow F = 1{,}6 \cdot 5 = 8$.

Finalmente, calculamos a **média aritmética ponderada** dos números 18, 24, 30 e 35 com pesos respectivamente iguais a 8, 21, 10 e 1. Isto é: $\overline{x} = \frac{18 \cdot 8 + 24 \cdot 21 + 30 \cdot 10 + 35 \cdot 1}{8 + 21 + 10 + 1} = 24{,}575$.

Assim, a idade média dos estudantes é 24,575 anos.

2.3. Mediana (Md)

Consideremos n números dispostos em rol: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

- Sendo n ímpar, chama-se **mediana (Md)** o termo central desse rol, isto é, o termo x_i com:

$$i = \frac{n+1}{2}.$$

- Sendo n par, chama-se **mediana (Md)** a média aritmética entre os termos centrais desse rol, isto é, a média aritmética entre os termos x_i e x_{i+1} com:

$$i = \frac{n}{2}.$$

Exemplos

a) As estaturas, em centímetros, dos cinco jogadores da equipe de basquetebol do nosso colégio são:

184; 179; 190; 181; 178.

Dispondo essas estaturas em rol, temos: 178; 179; 181; 184; 190.

A mediana desse rol é o seu termo central, isto é, Md = 181 cm.

b) Dispondo em rol as notas dos alunos do exemplo introdutório deste capítulo, temos:

$$2{,}0\ \ 3{,}0\ \ 4{,}0\ \ 4{,}0\ \ 4{,}5\ \ 4{,}5\ \ 5{,}0\ \ 5{,}5\ \ \underbrace{5{,}5\ \ 6{,}0}_{\textbf{Termos centrais}}\ \ 6{,}5\ \ 6{,}5\ \ 6{,}5\ \ 7{,}0\ \ 7{,}5\ \ 8{,}0\ \ 8{,}0\ \ 8{,}0\ \ 8{,}0\ \ 10{,}0$$

Como o número de elementos do rol é par, a mediana é a média aritmética entre os termos centrais, isto é, $\text{Md} = \dfrac{5{,}5 + 6{,}0}{2} = 5{,}75$.

2.4. Moda (Mo)

Chama-se "**moda** de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" um número que ocorre com maior freqüência.

Note que a amostra $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pode não ter moda ou ter mais de uma moda.

Exemplos

a) As idades dos jogadores do time de futebol do colégio são: 15; 17; 15; 18; 17; 16; 18; 17; 14; 17; 15. Observe que a idade mais freqüente é 17; por isso dizemos que a moda dessa amostra é 17 anos. Isto é, Mo = 17 anos.

b) As idades dos jogadores do time masculino de basquetebol do colégio são: 15; 16; 14; 17; 18. Observe que todos os elementos dessa amostra têm a mesma freqüência, por isso dizemos que essa amostra não tem moda.

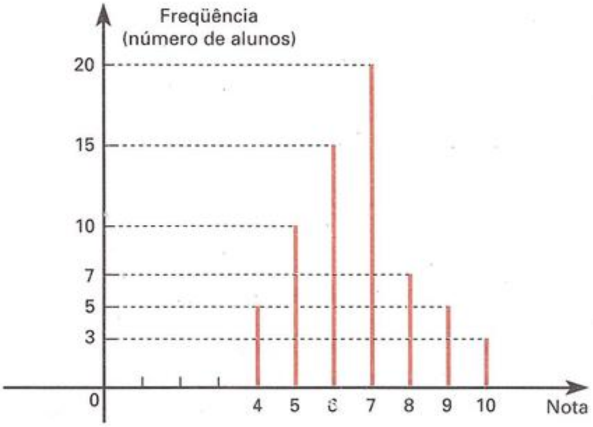
c) Escolhida uma amostra de notas das provas de matemática do segundo colegial, obtiveram-se:

5,5; 7,0; 6,5; 4,5; 7,0; 8,5; 6,5; 9,0; 7,0; 6,5; 5,5.

Observe que os elementos 7,0 e 6,5 têm freqüência 3; e que todos os outros elementos da amostra têm freqüência menor que 3. Por isso dizemos que a amostra é **bimodal**, isto é, possui duas modas: Mo = **7,0** e M'o = **6,5**.

Exercício resolvido

R.4 O gráfico ao lado mostra a distribuição de freqüência das notas obtidas pelos alunos da segunda série colegial numa prova de educação física.
Determinar:
a) a nota média desses alunos;
b) a mediana dessa distribuição;
c) a moda dessa distribuição.



Resolução
Note que a distribuição apresenta:

5 notas iguais a 4; 10 notas iguais a 5; 15 notas iguais a 6; 20 notas iguais a 7;
7 notas iguais a 8; 5 notas iguais a 9; 3 notas iguais a 10.

a) A nota média é:

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 20 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{5 + 10 + 15 + 20 + 7 + 5 + 3} \therefore \overline{x} = \frac{431}{65} \simeq 6{,}6.$$

b) Escrevendo as notas em rol, temos:

$$\underbrace{4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,}_{\textbf{5 notas}}\ \underbrace{5,\ 5,\ \ldots,\ 5,}_{\textbf{10 notas}}\ \underbrace{6,\ 6,\ \ldots,\ 6,}_{\textbf{15 notas}}\ \underbrace{7,\ 7,\ \ldots,\ 7,}_{\textbf{20 notas}}\ \underbrace{8,\ 8,\ \ldots,\ 8,}_{\textbf{7 notas}}\ \underbrace{9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,}_{\textbf{5 notas}}\ \underbrace{10,\ 10,\ 10.}_{\textbf{3 notas}}$$

Como o rol apresenta um número ímpar de elementos (65 elementos), a mediana é o termo médio do rol, isto é, o termo que ocupa a 33ª posição. Tal termo é a nota 7.

c) A nota mais freqüente é 7; por isso dizemos que a moda dessa distribuição é a nota 7.

3. Medidas de dispersão

Às vésperas de uma partida decisiva, o técnico de uma equipe de basquetebol prepara a escalação da equipe e depara-se com a seguinte dúvida: escalar o jogador A ou o jogador B, sendo que ambos estão em boas condições físicas. Para decidir, estuda os últimos cinco jogos de que participou o jogador A e os últimos cinco jogos de que participou o jogador B e percebe que A e B têm a mesma média de pontos por jogo. A decisão do técnico pode ser tomada apenas com essa informação?

Veremos que tal informação não é suficiente para essa tomada de decisão, pois duas amostras de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ podem ter a mesma **média aritmética** e, no entanto, apresentar características muito diferentes.

Vamos agora estudar algumas medidas obtidas de uma amostra de números que caracterizam um afastamento ou uma aproximação dos dados em torno da média. Tais medidas são chamadas de **medidas de dispersão**.

3.1. Desvio relativo

Chama-se "**desvio relativo** de um elemento x_i de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" o número $D_r(x_i)$ tal que:

$$D_r(x_i) = x_i - \overline{x},$$

onde $\overline{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Exemplo

As idades das jogadoras do time de basquetebol do colégio são: 15; 16; 14; 17; 18. Dessa amostra, temos que:

- a média aritmética (em anos) é $\overline{x} = \dfrac{15 + 16 + 14 + 17 + 18}{5} = 16;$
- o desvio relativo (em anos) do elemento 15 da amostra é $D_r(15) = 15 - 16 = -1;$
- o desvio relativo (em anos) do elemento 18 da amostra é $D_r(18) = 18 - 16 = 2;$
- o desvio relativo (em anos) do elemento 16 da amostra é $D_r(16) = 16 - 16 = 0.$

Note que, se o desvio relativo de um elemento x_i é:

I. positivo, então x_i está acima da média;
II. negativo, então x_i está abaixo da média;
III. zero, então x_i é igual à própria média.

3.2. Desvio absoluto

Chama-se "**desvio absoluto** de um elemento x_i de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$" o número $D_a(x_i)$ tal que:

$$D_a(x_i) = |x_i - \overline{x}|.$$

Exemplo

As idades das jogadoras do time de basquetebol são: 15; 16; 14; 17; 18. Nessa amostra, vemos que:

$$\overline{x} = 16 \text{ anos.}$$

Assim, temos que:

- o desvio absoluto (em anos) do elemento 15 da amostra é $D_a(15) = |15 - 16| = |-1| = 1$;
- o desvio absoluto (em anos) do elemento 18 da amostra é $D_a(18) = |18 - 16| = |2| = 2$;
- o desvio absoluto (em anos) do elemento 16 da amostra é $D_a(16) = |16 - 16| = |0| = 0$.

3.3. Desvio médio absoluto

Chama-se "**desvio médio absoluto** (D_{ma}) de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$" a média aritmética entre os desvios absolutos de todos os seus elementos. Isto é:

$$D_{ma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}.$$

Exemplo

As idades das jogadoras do time de basquetebol do colégio são: 15; 16; 14; 17; 18. Dessa amostra, temos:

$$\overline{x} = 16 \text{ anos.}$$

Pela fórmula do desvio médio absoluto, calculamos:

$$D_{ma} = \frac{|15 - 16| + |16 - 16| + |14 - 16| + |17 - 16| + |18 - 16|}{5}$$

$$\therefore\ D_{ma} = \frac{1 + 0 + 2 + 1 + 2}{5} = 1{,}2.$$

Logo, o desvio médio absoluto é 1,2 ano.

Nota: o desvio médio absoluto é uma medida associada à amostra como um todo; quando no exemplo anterior dizemos que $D_{ma} = 1{,}2$ ano, estamos afirmando que, **em média**, os elementos da amostra se afastam 1,2 ano da média aritmética, para cima ou para baixo.

3.4. Desvio padrão

Uma das medidas mais usadas para aferir a dispersão dos elementos de uma amostra de números em relação à média aritmética é o desvio padrão, simbolizado pela letra grega σ (sigma) e definido da seguinte maneira:

Chama-se "**desvio padrão** de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" o número σ dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}},$$

onde $\overline{x}$ é a média aritmética entre os números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Exemplo

As idades das jogadoras do time de basquetebol do colégio são: 15; 16; 14; 17; 18. Dessa amostra, temos:

$$\overline{x} = 16 \text{ anos e}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(15-16)^2 + (16-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2 + (18-16)^2}{5}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2 + (1)^2 + (2)^2}{5}} = \sqrt{2} \therefore \sigma \simeq 1{,}41 \text{ ano.}$$

Nota: o desvio padrão, assim como o desvio médio absoluto, é uma medida associada à amostra como um todo, e não a cada elemento individualmente. O desvio padrão, assim como o desvio médio absoluto, mede o quanto os elementos estão próximos ou afastados da média.

3.5. Variância

Chama-se "**variância** de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" o quadrado do desvio padrão, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}.$$

Exemplo

Na amostra 184, 179, 190, 181, 178 das massas, em gramas, de cinco barras de chocolate, temos que:

$$\overline{x} = \frac{184 + 179 + 190 + 181 + 178}{5} = 182{,}4 \therefore \overline{x} = 182{,}4 \text{ g e}$$

$$\sigma^2 = \frac{(184-182{,}4)^2 + (179-182{,}4)^2 + (190-182{,}4)^2 + (181-182{,}4)^2 + (178-182{,}4)^2}{5}$$

$$\therefore\ \sigma^2 = \frac{(1{,}6)^2 + (-3{,}4)^2 + (7{,}6)^2 + (-1{,}4)^2 + (-4{,}4)^2}{5}$$

$$\therefore\ \sigma^2 = \frac{2{,}56 + 11{,}56 + 57{,}76 + 1{,}96 + 19{,}36}{5} = 18{,}64 \therefore\ \sigma^2 = 18{,}64\ \text{g}^2.$$

Nota: a desvantagem em se usar a variância como medida de dispersão é que, se os elementos da amostra se apresentam numa unidade u (grama, g, por exemplo), a variância se apresenta na unidade u^2, o que pode causar dificuldade de interpretação. No exemplo anterior, como interpretar g^2? Para contornar essa dificuldade, é mais conveniente, nesse caso, usarmos o desvio padrão, cuja unidade de medida é a mesma dos elementos da amostra.

Exercícios resolvidos

R.5 Às vésperas de um jogo decisivo, o técnico de uma equipe de basquetebol deve optar pela escalação de um dentre dois jogadores, *A* e *B*. As duas tabelas seguintes mostram o desempenho de cada jogador nos últimos cinco jogos dos quais participou:

Jogador *A*	
Jogo	Número de pontos
1	20
2	22
3	18
4	20
5	20

Jogador *B*	
Jogo	Número de pontos
1	30
2	14
3	20
4	12
5	24

a) Calcular a média de cada um por jogo.

b) Calcular o desvio padrão de cada um nesses cinco jogos.

c) Você, como técnico desse time, se tivesse que escalar um desses jogadores, num jogo onde a simples vitória lhe daria o título de campeão, qual deles escalaria?

Resolução

a) Jogador *A*: $\overline{x} = \dfrac{20 + 22 + 18 + 20 + 20}{5} = 20.$

Jogador *B*: $\overline{x} = \dfrac{30 + 14 + 20 + 12 + 24}{5} = 20.$

b) Jogador *A*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(20-20)^2 + (22-20)^2 + (18-20)^2 + (20-20)^2 + (20-20)^2}{5}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{1{,}6} \simeq 1{,}2.$$

Jogador *B*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30-20)^2 + (14-20)^2 + (20-20)^2 + (12-20)^2 + (24-20)^2}{5}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{43{,}2} \simeq 6{,}5.$$

c) Você decide! Observe, porém, que, apesar de os jogadores possuírem a mesma média de pontos por jogo, o desvio padrão do jogador *A* é menor do que o do jogador *B*. Isso quer dizer que, em muito mais jogos, o jogador *A* esteve mais próximo da média do que o jogador *B*, isto é, *A* foi mais regular do que *B*.

R.6 Consideremos o exemplo introdutório deste capítulo, isto é, as notas dos vinte alunos de uma das salas da segunda série colegial, conforme tabela ao lado.
Calcular:

a) a nota média desses alunos;
b) o desvio relativo de cada nota;
c) o desvio absoluto de cada nota;
d) o desvio médio absoluto dessa amostra de notas;
e) o desvio padrão dessa amostra de notas;
f) a variância dessa amostra de notas.

Classe (nota)	Freqüência (número de alunos)
2,0	1
3,0	1
4,0	2
4,5	2
5,0	1
5,5	2
6,0	1
6,5	3
7,0	1
7,5	1
8,0	4
10,0	1

Resolução

a) A média $\overline{x}$ das notas desses alunos é:

$$\overline{x} = \frac{2{,}0 + 3{,}0 + 2 \cdot 4{,}0 + 2 \cdot 4{,}5 + 5{,}0 + 2 \cdot 5{,}5 + 6{,}0 + 3 \cdot 6{,}5 + 7{,}0 + 7{,}5 + 4 \cdot 8{,}0 + 10{,}0}{20}$$

$\therefore\ \overline{x} = 6{,}0.$

b) Os desvios relativos são:

$$\begin{aligned} &D_r(2{,}0) = 2{,}0 - 6{,}0 = -4{,}0; && D_r(6{,}0) = 6{,}0 - 6{,}0 = 0{,}0;\\ &D_r(3{,}0) = 3{,}0 - 6{,}0 = -3{,}0; && D_r(6{,}5) = 6{,}5 - 6{,}0 = 0{,}5;\\ &D_r(4{,}0) = 4{,}0 - 6{,}0 = -2{,}0; && D_r(7{,}0) = 7{,}0 - 6{,}0 = 1{,}0;\\ &D_r(4{,}5) = 4{,}5 - 6{,}0 = -1{,}5; && D_r(7{,}5) = 7{,}5 - 6{,}0 = 1{,}5;\\ &D_r(5{,}0) = 5{,}0 - 6{,}0 = -1{,}0; && D_r(8{,}0) = 8{,}0 - 6{,}0 = 2{,}0;\\ &D_r(5{,}5) = 5{,}5 - 6{,}0 = -0{,}5; && D_r(10{,}0) = 10{,}0 - 6{,}0 = 4{,}0. \end{aligned}$$

c) O desvio absoluto de cada nota é igual ao módulo do respectivo desvio relativo:

$$\begin{aligned} &D_a(2{,}0) = |-4{,}0| = 4{,}0; && D_a(6{,}0) = |0{,}0| = 0{,}0;\\ &D_a(3{,}0) = |-3{,}0| = 3{,}0; && D_a(6{,}5) = |0{,}5| = 0{,}5;\\ &D_a(4{,}0) = |-2{,}0| = 2{,}0; && D_a(7{,}0) = |1{,}0| = 1{,}0;\\ &D_a(4{,}5) = |-1{,}5| = 1{,}5; && D_a(7{,}5) = |1{,}5| = 1{,}5;\\ &D_a(5{,}0) = |-1{,}0| = 1{,}0; && D_a(8{,}0) = |2{,}0| = 2{,}0;\\ &D_a(5{,}5) = |-0{,}5| = 0{,}5; && D_a(10{,}0) = |4{,}0| = 4{,}0. \end{aligned}$$

d) O desvio médio absoluto da amostra é a **média aritmética ponderada** entre os valores $D_a(x_i)$ com os respectivos pesos iguais às freqüências das notas x_i:

$$D_{ma} = \frac{D_a(2{,}0) + D_a(3{,}0) + 2D_a(4{,}0) + 2D_a(4{,}5) + D_a(5) + 2D_a(5{,}5) + \ldots + D_a(10)}{1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 4 + 1}$$

$$\therefore\ D_{ma} = \frac{4{,}0 + 3{,}0 + 2 \cdot 2{,}0 + 2 \cdot 1{,}5 + 1{,}0 + 2 \cdot 0{,}5 + 0{,}0 + 3 \cdot 0{,}5 + 1{,}0 + 1{,}5 + 4 \cdot 2{,}0 + 4{,}0}{20}$$

$$\therefore D_{ma} = \frac{32}{20} = 1{,}6.$$

e) O desvio padrão da amostra $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$, onde cada x_i é uma das vinte notas da amostra, é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x})^2}{n}}.$$

Assim, temos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(4{,}0)^2 + (3{,}0)^2 + 2\,(2{,}0)^2 + 2\,(1{,}5)^2 + (1{,}0)^2 + 2\,(0{,}5)^2 + (0{,}0)^2 + 3\,(0{,}5)^2 + (1{,}0)^2 + (1{,}5)^2 + 4\,(2{,}0)^2 + (4{,}0)^2}{20}}$$

$\therefore \sigma = \sqrt{3{,}75} \simeq 1{,}9.$

f) A variância é o quadrado do desvio padrão: $\sigma^2 = 3{,}75$.

R.7 A tabela ao lado mostra a distribuição de freqüência dos diâmetros, em milímetros, de uma amostra de barras de ferro.

Classe (diâmetro em milímetros)	Freqüência (número de barras)
8,55 —— 9,45	6
9,45 —— 10,55	10
10,55 —— 12,45	4

a) Calcular o diâmetro médio dessas barras.

b) Calcular o desvio médio absoluto dessas medidas.

c) Calcular o desvio padrão dessas medidas.

Resolução

Quando as classes não são unitárias, como nesse caso, calculamos a média aritmética, o desvio médio absoluto e o desvio padrão em função dos pontos médios x_M de cada classe:

Classe	Ponto médio da classe	Freqüência
8,55 —— 9,45	$\frac{8{,}55 + 9{,}45}{2} = 9$	6
9,45 —— 10,55	$\frac{9{,}45 + 10{,}55}{2} = 10$	10
10,55 —— 12,45	$\frac{10{,}55 + 12{,}45}{2} = 11{,}5$	4

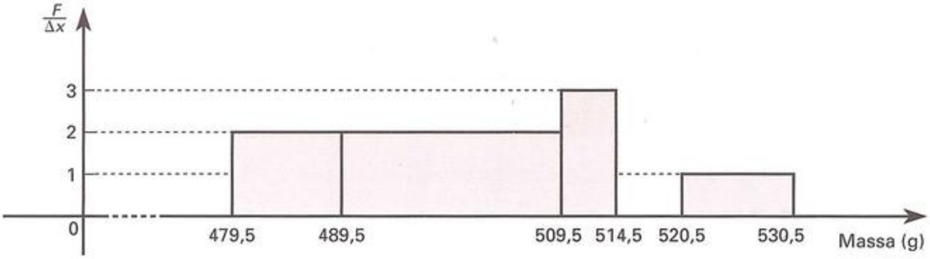
Assim, temos:

a) $\overline{x} = \dfrac{9 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 11{,}5 \cdot 4}{6 + 10 + 4} = 10 \therefore \overline{x} = 10$ mm;

b) $D_{ma} = \dfrac{6|9 - 10| + 10|10 - 10| + 4|11{,}5 - 10|}{6 + 10 + 4} = 0{,}6 \therefore D_{ma} = 0{,}6$ mm;

c) $\sigma = \sqrt{\dfrac{6\,(9 - 10)^2 + 10\,(10 - 10)^2 + 4\,(11{,}5 - 10)^2}{6 + 10 + 4}} = \sqrt{0{,}75} \simeq 0{,}8 \therefore \sigma \simeq 0{,}8$ mm.

R.8 O histograma mostra a distribuição das massas, em gramas, de uma amostra de pacotes de café:



a) Calcular a massa média desses pacotes.

b) Calcular o desvio médio absoluto das massas desses pacotes.

c) Calcular o desvio padrão das massas desses pacotes.

Resolução

Inicialmente, determinamos o ponto médio e a freqüência de cada classe.

Classe	Ponto médio	Amplitude da classe	Freqüência
479,5 —— 489,5	$\dfrac{479{,}5 + 489{,}5}{2} = 484{,}5$	$489{,}5 - 479{,}5 = 10$	$2 \cdot 10 = 20$
489,5 —— 509,5	$\dfrac{489{,}5 + 509{,}5}{2} = 499{,}5$	$509{,}5 - 489{,}5 = 20$	$2 \cdot 20 = 40$
509,5 —— 514,5	$\dfrac{509{,}5 + 514{,}5}{2} = 512{,}0$	$514{,}5 - 509{,}5 = 5$	$3 \cdot 5 = 15$
514,5 —— 520,5	$\dfrac{514{,}5 + 520{,}5}{2} = 517{,}5$	$520{,}5 - 514{,}5 = 6$	$0 \cdot 6 = 0$
520,5 —— 530,5	$\dfrac{520{,}5 + 530{,}5}{2} = 525{,}5$	$530{,}5 - 520{,}5 = 10$	$1 \cdot 10 = 10$

Temos, então:

a) $$\overline{x} = \frac{484{,}5 \cdot 20 + 499{,}5 \cdot 40 + 512{,}0 \cdot 15 + 517{,}5 \cdot 0 + 525{,}5 \cdot 10}{20 + 40 + 15 + 10} \simeq 501{,}2$$

$\therefore \overline{x} \simeq 501{,}2$ g;

b) $$D_{ma} = \frac{20|484{,}5 - 501{,}2| + 40|499{,}5 - 501{,}2| + 15|512{,}0 - 501{,}2| + 0|517{,}5 - 501{,}2| + 10|525{,}5 - 501{,}2|}{20 + 40 + 15 + 10}$$

$\therefore D_{ma} \simeq 9{,}49$ g;

c) $$\sigma = \sqrt{\frac{20\,(484{,}5 - 501{,}2)^2 + 40\,(499{,}5 - 501{,}2)^2 + 15\,(512{,}0 - 501{,}2)^2 + 0\,(517{,}5 - 501{,}2)^2 + 10\,(525{,}5 - 501{,}2)^2}{20 + 40 + 15 + 10}}$$

$\therefore \sigma \simeq \sqrt{157} \simeq 12{,}5$ g.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.6, B.8, B.9, B.13, B.16, B.17.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.7, B.10, B.11, B.12, B.14, B.15, B.18, C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6.

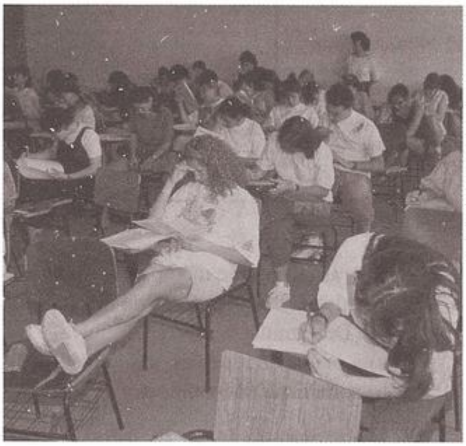
Exercícios básicos

B.1 Determine a média aritmética entre os seguintes números: 2, 4, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 5, 5, 5 e 8.

B.2 Entre sessenta números, vinte são iguais a 5, dez são iguais a 6, quinze são iguais a 8, dez são iguais a 12, e cinco são iguais a 16. Determine a média aritmética desses números.

B.3 Um exame vestibular atribui os pesos 3, 2, 3, 2, 2, 1 e 1, respectivamente, às disciplinas história, geografia, português, inglês, matemática, física e química. A tabela seguinte mostra as notas obtidas por Leonor em cada matéria:

Disciplina	Nota
História	6,0
Geografia	7,5
Português	6,5
Inglês	7,0
Matemática	7,5
Física	8,5
Química	8,0



GLADSTONE CAMPOS/ABRIL IMAGENS

Qual foi a média final de Leonor nesse exame?

B.4 Quatro funcionários *A*, *B*, *C* e *D* de uma empresa têm respectivamente 8, 6, 10 e 16 anos de trabalho nessa empresa. O funcionário *A* recebeu um prêmio de R$ 500,00 por ano de casa; *B* recebeu um prêmio de R$ 600,00 por ano de casa; e *C* e *D* receberam, cada um, R$ 800,00 de prêmio por ano de casa. Qual foi o prêmio médio recebido por ano de casa por esses funcionários?

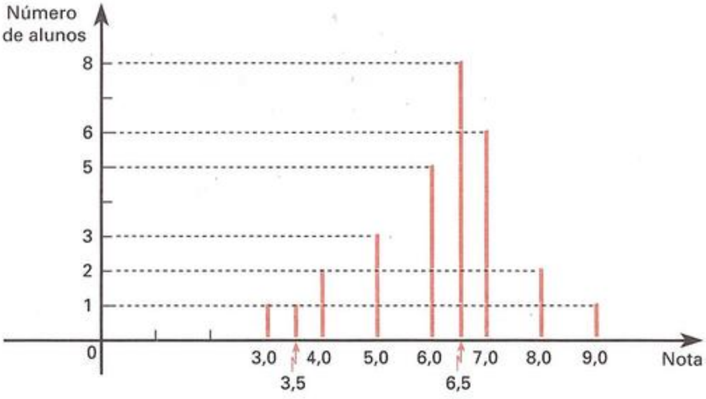
B.5 As salas *A*, *B* e *C* da segunda série colegial tiveram respectivamente as seguintes médias na prova de matemática: 6,5; 6,0; e 7,0. Sabendo que a sala *A* é formada por 28 alunos, *B* é formada por 25 alunos e *C*, por 22 alunos, calcule a nota média de todos os 75 alunos.

B.6 A tabela mostra a distribuição de freqüência da carga, em toneladas, dos caminhões que passaram por uma estrada num certo período.

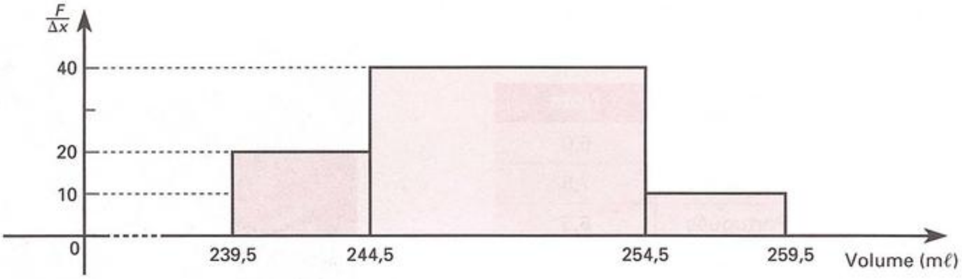
Carga (em toneladas)	Número de caminhões
9,5 —— 14,5	18
14,5 —— 19,5	33
19,5 —— 25,5	9

Calcule a carga média desses caminhões.

B.7 O gráfico mostra a distribuição de freqüência das notas obtidas por uma turma da segunda série colegial na prova de geografia. Qual foi a nota média dessa turma?



B.8 O histograma mostra a distribuição dos volumes, em mililitros, de uma amostra de garrafas de refrigerante.



Calcule o volume médio dessas garrafas.

B.9 As idades dos jogadores da seleção brasileira titular de futebol são: 19, 21, 18, 23, 25, 21, 28, 24, 21, 26 e 29. Determine:

a) a média de idade desses jogadores;

b) a mediana dessa amostra de idades;

c) a moda dessa amostra de idades.

B.10 Numa amostra de dez mulheres da Região Sul do Brasil, foram constatadas as seguintes estaturas, em centímetros: 168, 162, 172, 170, 168, 172, 173, 164, 168, 172. Determine:

a) a estatura média dessas brasileiras;

b) a mediana dessa amostra de estaturas;

c) a moda dessa amostra de estaturas.

B.11 As massas, em quilogramas, dos oito lutadores de boxe que participarão de um torneio são: 81,5; 79,5; 80,0; 83,5; 84,0; 79,0; 78,0; 83,0. Determine:

a) a massa média desses lutadores;

b) a mediana dessa amostra de massas;

c) a moda dessa amostra de massas.

B.12 No problema B.7, determine a mediana e a moda da amostra de notas.

B.13 O número de pontos, por partida, de um jogador de basquetebol nos últimos quatro jogos é descrito pela tabela:

Jogo	Número de pontos
1	24
2	20
3	28
4	28

a) Calcule a média de pontos, por jogo, desse jogador.

b) Calcule o desvio absoluto médio dessa amostra de pontos.

c) Calcule o desvio padrão dessa amostra de pontos.

d) Calcule a variância dessa amostra de pontos.

B.14 A tabela mostra o tempo em cada uma de quatro voltas dadas por um piloto de Fórmula 1 num circuito.

Volta	Tempo (em minutos)
1	2,224
2	2,223
3	2,226
4	2,227

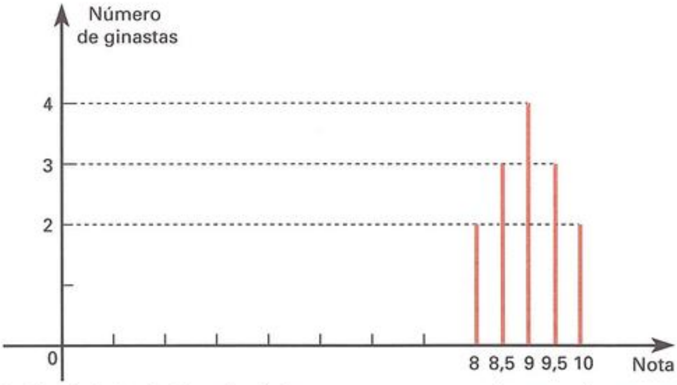
a) Calcule o tempo médio por volta.

b) Calcule o desvio absoluto médio dessa amostra de tempos.

c) Calcule o desvio padrão dessa amostra de tempos.

d) Calcule a variância dessa amostra de tempos.

B.15 O gráfico mostra as notas obtidas por uma equipe de ginastas numa competição.



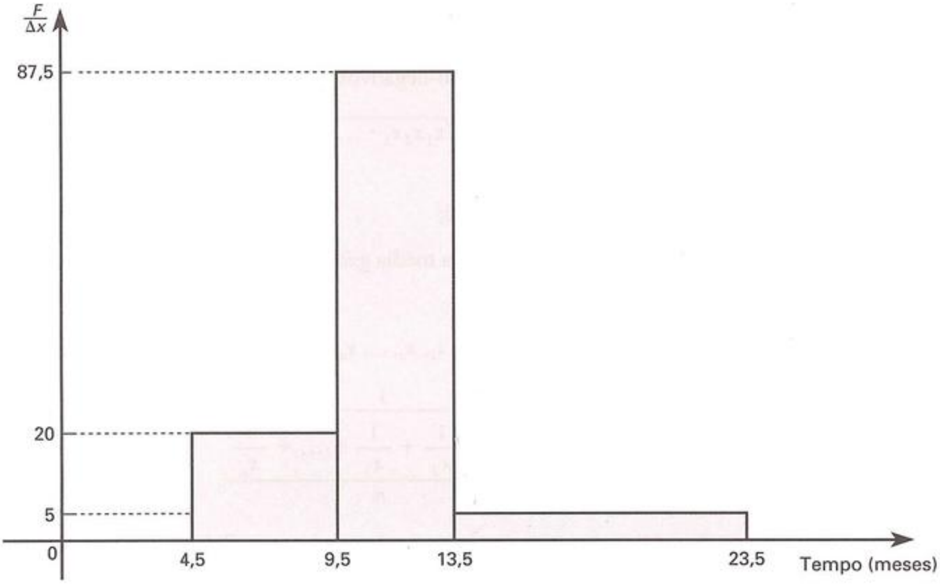
a) Calcule a nota média dessa equipe.
b) Calcule o desvio absoluto médio dessa amostra de notas.
c) Calcule o desvio padrão dessa amostra de notas.
d) Calcule a variância dessa amostra de notas.

B.16 A distribuição de freqüência das estaturas, em centímetros, de uma amostra de estudantes é dada por:

Classe (estatura em centímetros)	Freqüência (número de estudantes)
159,5 —— 164,5	5
164,5 —— 169,5	10
169,5 —— 174,5	5

a) Calcule a estatura média desses estudantes.
b) Calcule o desvio médio absoluto dessa distribuição.
c) Calcule o desvio padrão dessa distribuição.
d) Calcule a variância dessa distribuição.

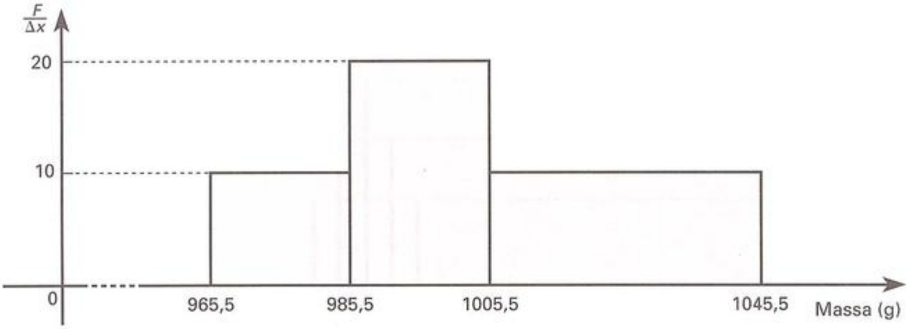
B.17 O histograma mostra o tempo de duração, em meses, de uma amostra de lâmpadas.



$$\frac{F}{\Delta x} = \frac{\text{Número de lâmpadas da classe}}{\text{Amplitude da classe}}$$

a) Calcule o tempo médio de duração dessas lâmpadas.
b) Calcule o desvio médio absoluto dessa amostra de tempos.
c) Calcule o desvio padrão dessa amostra de tempos.
d) Calcule a variância dessa amostra de tempos.

B.18 O histograma mostra a distribuição das massas, em gramas, de uma amostra de pacotes de arroz.



a) Calcule a massa média dessa distribuição.
b) Calcule o desvio médio absoluto dessa distribuição.
c) Calcule o desvio padrão dessa distribuição.
d) Calcule a variância dessa distribuição.

Exercícios complementares

C.1 Seja a amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, cuja média aritmética é $\overline{x}$. Calcule a soma dos desvios relativos de todos os elementos da amostra, isto é: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$.

C.2 Chama-se "**média geométrica** de n números não-negativos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$" o número G dado por:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Calcule a média geométrica de:
a) 9 e 4;
b) 4, 2 e 6;
c) 4, 2, 4 e 8.

C.3 Sendo a e b números não-negativos, prove que a média geométrica de a e b é menor ou igual à média aritmética. **Sugestão:** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

C.4 Chama-se "**média harmônica** de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, todos diferentes de zero", o número H tal que:

$$H = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + ... + \dfrac{1}{x_n}}{n}}.$$

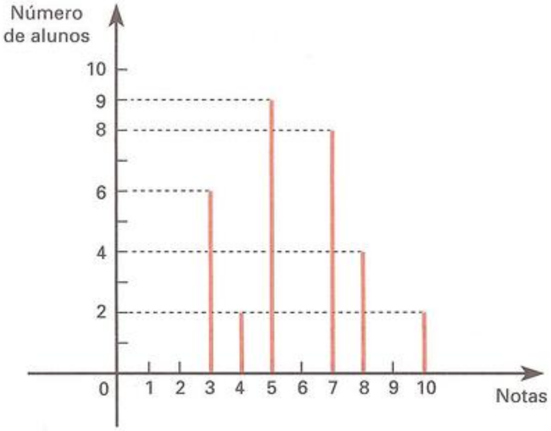
Isto é, H é o inverso da média aritmética dos inversos dos n números. Calcule a média harmônica de:
a) 3 e 5;
b) 2, 4 e 3;
c) 1, 5, 6 e 2.

C.5 Sendo a e b números positivos, prove que a média harmônica de a e b é menor ou igual à média geométrica. **Sugestão:** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

C.6 Um homem viaja da cidade A para a cidade B à velocidade média de 60 km/h. Na viagem de volta, de B para A, pelo mesmo caminho, o homem viaja à velocidade média de 100 km/h. Determine a velocidade média de toda a viagem, de ida e volta. **Sugestão:** tal velocidade média é igual à média harmônica dos números 60 e 100; pense no porquê.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRJ) O gráfico mostra a distribuição de uma prova de matemática.



a) Quantos alunos fizeram a prova?

b) Sendo $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ as notas obtidas pelos n alunos nessa prova (n é o número de alunos que fizeram a prova), determine o número $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$, denominado média aritmética das notas dessa prova.

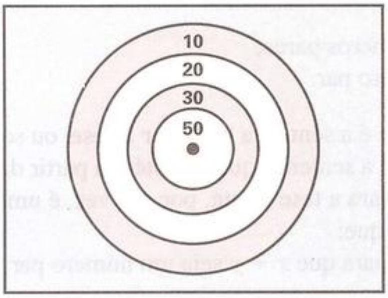
V.2 (Fuvest-SP, modificado) A distribuição dos salários de uma empresa é dada na seguinte tabela:

Salário em R$	Número de funcionários
500,00	10
1.000,00	5
1.500,00	1
2.000,00	10
5.000,00	4
10.500,00	1
Total	31

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?

b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salário de R$ 2.000,00 cada. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior do que a anterior?

V.3 (Fuvest-SP) Dois atiradores x e y obtiveram numa série de vinte tiros, num alvo da forma indicada na figura, os seguintes resultados:



Atirador	Resultado				
	50	30	20	10	0
x	4	6	5	4	1
y	6	3	5	3	3

a) Qual é a média de pontos por tiro de cada um dos atiradores?

b) Compare os desvios padrão de cada uma das séries de tiros e decida qual é o atirador com desempenho mais regular.

Capítulo 39

Teorema – técnicas de demonstração

1. Introdução

Faremos neste capítulo um estudo de algumas técnicas de demonstração de teoremas. É necessário esse estudo para que você entenda as demonstrações que serão feitas na próxima unidade: a geometria.

2. Teorema – conceituação

> **Teorema** é toda proposição que pode ser demonstrada a partir de outra(s) proposição(ões) previamente estabelecida(s).

Exemplos

a) Se x e y são números pares, então $x + y$ é um número par.

b) Se x e y são números racionais, então xy é um número racional.

c) Um triângulo inscrito em uma circunferência é retângulo se, e somente se, um de seus lados passa pelo centro da circunferência.

Fundamentalmente, um teorema pode ser apresentado sob uma das seguintes formas:

I. $p \Rightarrow q$ (lê-se "p implica q" ou "se p, então q");

II. $p \Leftrightarrow q$ (lê-se "p equivale a q" ou "p se, e somente se, q").

3. Teoremas da forma $p \Rightarrow q$

Em teoremas da forma $p \Rightarrow q$, a proposição p é chamada de **hipótese** e q é chamada de **tese do teorema**.

Exemplo

No teorema "se x e y são números pares, então $x + y$ é um número par", temos:

- hipótese $\{x$ e y são números pares;
- tese $\{x + y$ é um número par.

O prefixo *hipo* significa "anterior". Assim, a **hipótese** é a sentença **anterior à tese**, ou seja, é a afirmação sobre a qual construímos a tese. Portanto, a tese é a sentença que se obtém a partir da hipótese.

Dizemos que a hipótese é uma **condição suficiente** para a tese e esta, por sua vez, é uma **condição necessária** para a hipótese. No exemplo anterior, temos que:

- a **condição** "x e y são números pares" é **suficiente** para que $x + y$ seja um número par;
- a **condição** "$x + y$ é um número par" é **necessária** para que x e y sejam números pares.

Exercício resolvido

R.1 Dado o teorema "se um quadrilátero *ABCD* é um retângulo, então suas diagonais são congruentes", determinar:

a) sua hipótese e sua tese;

b) uma condição suficiente para que as diagonais de um quadrilátero sejam congruentes;

c) uma condição necessária para que um quadrilátero seja um retângulo.

Resolução

a) Hipótese {um quadrilátero *ABCD* é um retângulo.
Tese {as diagonais do quadrilátero *ABCD* são congruentes.

b) A hipótese é **condição suficiente** para a tese. Assim, uma condição suficiente para que as diagonais de um quadrilátero sejam congruentes é que esse quadrilátero seja um retângulo.

c) A tese é uma **condição necessária** para a hipótese. Assim, uma condição necessária para que um quadrilátero seja um retângulo é que suas diagonais sejam congruentes.

3.1. Demonstração de teoremas da forma $p \Rightarrow q$

Demonstração direta

Para fazer a demonstração direta de um teorema da forma $p \Rightarrow q$, admitimos como verdadeira a hipótese e, a partir dessa suposição, provamos que é verdadeira a tese.

Exercício resolvido

R.2 Provar que, "se x e y são números pares, então $x + y$ é um número par".

Resolução

Hipótese {x e y são números pares.
Tese {$x + y$ é um número par.

Admitimos como verdadeira a hipótese, ou seja, que x e y são números pares:

$$x = 2n \text{ e } y = 2m, \text{ com } \{n, m\} \subset \mathbb{Z}.$$

A partir dessa suposição, vamos provar que $x + y$ é um número par. De fato, temos:

$$x + y = 2n + 2m = 2(n + m).$$

Como $\{n, m\} \subset \mathbb{Z}$, temos que $n + m \in \mathbb{Z}$. Assim, $2(n + m)$ é número par. Logo, $x + y$ é um número par.
(c.q.d.)

Resumindo: na demonstração direta de um teorema da forma $p \Rightarrow q$, partimos da hipótese e chegamos à tese.

Demonstração indireta

Às vezes, a demonstração direta de um teorema da forma $p \Rightarrow q$ pode ser longa ou complicada; por isso se usa um outro recurso, a demonstração indireta. Esse tipo de demonstração consiste em anexar à hipótese, p, a negação da tese, $\sim q$, e provar que p e $\sim q$ conduzem a uma contradição (um absurdo). Conclui-se então que a negação da tese, $\sim q$, é falsa e, portanto, que a tese, q, é verdadeira.

Exercício resolvido

R.3 Provar que, "se *ABC* é um triângulo retângulo em *A*, então a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é menor do que 90°".

Resolução

Hipótese {*ABC* é um triângulo retângulo em *A*.

Tese {med $(A\hat{B}C) < 90°$.

Faremos uma **demonstração indireta**. Para isso, vamos anexar à hipótese a negação da tese e provar que isso conduz a uma contradição (um absurdo).

$$\text{Admitimos então que} \begin{cases} ABC \text{ é um triângulo} \\ \text{med } (B\hat{A}C) = 90° \\ \text{med } (A\hat{B}C) \geqslant 90° \quad \textbf{(negação da tese)}. \end{cases}$$

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, temos que:

$$\text{med } (B\hat{A}C) + \text{med } (B\hat{C}A) + \text{med } (A\hat{B}C) = 180°$$
$$\therefore 90° + \text{med } (B\hat{C}A) + \text{med } (A\hat{B}C) = 180° \therefore \text{med } (A\hat{B}C) = 90° - \text{med } (B\hat{C}A).$$

Como med $(A\hat{B}C) \geqslant 90°$ (negação da tese), temos que:

$$90° - \text{med } (B\hat{C}A) \geqslant 90° \quad \therefore -\text{med } (B\hat{C}A) \geqslant 0° \quad \therefore \text{med } (B\hat{C}A) \leqslant 0°. \quad \textbf{(Absurdo!)}$$

Um ângulo de um triângulo **não** pode ter medida negativa ou nula. A negação da tese nos levou a uma contradição.

Logo, a tese med $(A\hat{B}C) < 90°$ é verdadeira.

(c.q.d.)

4. Teoremas da forma $p \Leftrightarrow q$

Os teoremas da forma $p \Leftrightarrow q$ devem ser entendidos como $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, em que:

- a implicação $p \Rightarrow q$ é chamada de "**recíproca** da implicação $q \Rightarrow p$";
- e a implicação $q \Rightarrow p$ é chamada de "**recíproca** da implicação $p \Rightarrow q$".

Exemplo

O teorema "Um triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência, é retângulo em *A* se, e somente se, o lado $\overline{BC}$ passa pelo centro dessa circunferência" pode ser enunciado do seguinte modo:

"Se um triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência, é retângulo em *A*, então o lado $\overline{BC}$ passa pelo centro dessa circunferência, **e** se um triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência, tem o lado $\overline{BC}$ passando pelo centro dessa circunferência, então esse triângulo é retângulo em *A*".

Em teoremas da forma $p \Leftrightarrow q$, dizemos: ***p* é condição necessária e suficiente para *q*** e ***q* é condição necessária e suficiente para *p***. Assim, o teorema do exemplo anterior pode ser enunciado do seguinte modo:

"Uma condição necessária e suficiente para que um triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência, seja retângulo em *A* é que o lado $\overline{BC}$ passe pelo centro dessa circunferência".

4.1. Demonstração de teoremas da forma $p \Leftrightarrow q$

Fazemos a demonstração de um teorema da forma $p \Leftrightarrow q$ em duas partes:

- primeira parte: demonstramos que $p \Rightarrow q$;
- segunda parte: demonstramos que $q \Rightarrow p$.

Exercícios resolvidos

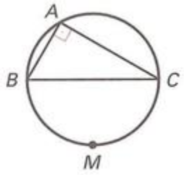
R.4 Provar que "um triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência, é retângulo em *A* se, e somente se, o lado $\overline{BC}$ passa pelo centro da circunferência".

Resolução

Primeira parte

Hipótese { ABC é um triângulo retângulo em A, inscrito em uma circunferência.

Tese { O lado $\overline{BC}$ passa pelo centro da circunferência.

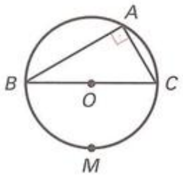


De fato, a medida do ângulo inscrito $B\hat{A}C$ é igual à metade da medida do arco $\widehat{BMC}$ compreendido por ele. Como med $(B\hat{A}C) = 90°$, temos que med $(\widehat{BMC}) = 180°$. Logo, $\widehat{BMC}$ é uma semicircunferência e, portanto, $\overline{BC}$ passa pelo centro da circunferência.

Segunda parte

Hipótese { Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência e seu lado $\overline{BC}$ passa pelo centro dessa circunferência.

Tese { O triângulo ABC é retângulo em $\hat{A}$.



De fato, como $\overline{BC}$ passa pelo centro O da circunferência, temos que o arco $\widehat{BMC}$ mede 180°. Como a medida de um ângulo inscrito mede metade da medida do arco compreendido por ele, temos que:

$$\text{med }(B\hat{A}C) = \frac{\text{med }(\widehat{BMC})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Logo, o triângulo ABC é retângulo em A.

(c.q.d.)

R.5 Qual é a recíproca da implicação "se um triângulo tem dois lados congruentes, então tem dois ângulos internos congruentes"?

Resolução

"Se um triângulo tem dois ângulos internos congruentes, então tem dois lados congruentes."

R.6 Sendo x e y números reais quaisquer, prova-se que a implicação $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ é verdadeira. Mostrar que a recíproca dessa implicação, isto é, $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$, é falsa.

Resolução

Para provarmos que uma proposição é falsa, basta mostrar um exemplo. Fazendo $x = 3$ e $y = -3$, temos:

$$3^2 = (-3)^2 \Rightarrow 3 = -3. \quad \textbf{(F)}$$

Logo, essa proposição é falsa.

5. Teoremas que envolvem existência e unicidade

Teoremas que envolvem existência e unicidade devem ser provados em duas partes:

- primeira parte: prova-se a existência;
- segunda parte: prova-se a unicidade.

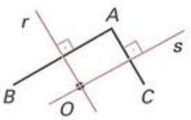
Exercício resolvido

R.7 Provar que, "se três pontos A, B e C não são colineares, então existe e é única a circunferência que passa por eles".

Resolução

Hipótese {Três pontos A, B e C não são colineares.
Tese {Existe e é única a circunferência que passa por A, B e C.

Primeira parte: existência



Consideremos no plano ABC as mediatrizes r e s dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que $r \cap s = \{O\}$, sendo O um ponto. Note que podemos afirmar que r e s têm um único ponto comum, pois $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, por hipótese, não são colineares.

- Como O pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, temos $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (lê-se "$\overline{OA}$ é congruente a $\overline{OB}$").
- Como O pertence à mediatriz de $\overline{AC}$, temos $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

Temos, então, que $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$, ou seja, o ponto O equidista de A, B e C. Logo, existe uma circunferência λ de centro O que passa por A, B e C.

Segunda parte: unicidade
Suponhamos que existam duas circunferências λ e λ' com centros O e O', ambas passando pelos pontos A, B e C. Temos que:

- $\overline{O'A} \cong \overline{O'B}$; logo, O pertence à mediatriz r de $\overline{AB}$;
- $\overline{O'A} \cong \overline{O'C}$; logo, O pertence à mediatriz s de $\overline{AC}$;
- r é distinta de s.

Portanto $r \cap s = \{O\}$ **(I)**

Temos ainda que:

- $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; logo, O' pertence à mediatriz r de $\overline{AB}$;
- $\overline{OA} \cong \overline{OC}$; logo, O' pertence à mediatriz s de $\overline{AC}$.

Como r e s são distintas, concluímos que $r \cap s = \{O'\}$. **(II)**

Por (I) e (II), temos que o ponto O coincide com o ponto O'. Assim, as circunferências λ e λ' têm o mesmo centro O e o mesmo raio OA. Logo, as circunferências λ e λ' coincidem.
Portanto, a circunferência que passa por A, B e C é única.

(c.q.d.)

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.7, B.9, B.10, B.12.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.6, B.8, B.11, B.13, C.1, C.2, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Dado o teorema "se x e y são números ímpares, então $x + y$ é um número par", determine:

a) sua hipótese e sua tese;
b) uma condição suficiente para que $x + y$ seja um número par;
c) uma condição necessária para que x e y sejam números ímpares.

B.2 Prove que, "se x e y são números ímpares, então $x + y$ é um número par". **Sugestão:** todo número par pode ser escrito sob a forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$, e todo número ímpar pode ser escrito sob a forma $2m + 1$, com $m \in \mathbb{Z}$.

B.3 Considere a proposição "se $x + y$ é um número par, então x e y são números ímpares".

a) Prove que essa proposição é falsa. **Sugestão:** basta mostrar um exemplo.

b) Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

I. A condição $x + y$ é um número par é **suficiente** para que x e y sejam números ímpares.

II. A condição x e y são números ímpares é **necessária** para que $x + y$ seja um número par.

B.4 Dado o teorema "se x e y são números racionais, então xy é um número racional", determine:

a) sua hipótese e sua tese;

b) uma condição suficiente para que xy seja um número racional;

c) uma condição necessária para que x e y sejam números racionais.

B.5 Prove que, "se x e y são números racionais, então xy é um número racional". **Sugestão:** todo número racional pode ser escrito sob a forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

B.6 Considere a proposição "se xy é um número racional, então x e y são números racionais".

a) Prove que essa proposição é falsa. **Sugestão:** basta mostrar um exemplo.

b) Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

I. A condição "xy é um número racional" é suficiente para que x e y sejam números racionais.

II. A condição "x e y são números racionais" é necessária para que xy seja um número racional.

B.7 Usando a técnica da demonstração indireta, prove que, "se um triângulo ABC é tal que med $(B\hat{A}C) > 90°$, então med $(A\hat{B}C) < 90°$".

B.8 Usando a técnica da demonstração indireta, prove que, "se a é um número racional ($a \in \mathbb{Q}$) e b é um número irracional ($b \in \mathbb{Q}'$), então $a + b$ é um número irracional ($a + b \in \mathbb{Q}'$)".

B.9 Dado o teorema "um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, um de seus ângulos internos é reto", classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) A condição "um paralelogramo é um retângulo" é necessária e suficiente para que um de seus ângulos internos seja reto.

b) A condição "um dos ângulos internos de um paralelogramo é reto" é necessária e suficiente para que esse paralelogramo seja um retângulo.

c) O teorema dado é equivalente a: "se um paralelogramo é um retângulo, então um de seus ângulos internos é reto".

d) O teorema dado é equivalente a: "uma condição necessária e suficiente para que um paralelogramo seja um retângulo é que um de seus ângulos internos seja reto".

e) O teorema dado é equivalente a: "uma condição necessária e suficiente para que um dos ângulos internos de um paralelogramo seja reto é que esse paralelogramo seja um retângulo".

B.10 Prove que "um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, um de seus ângulos internos é reto".

B.11 Dado o teorema "a seqüência (a, b, c) é uma progressão aritmética se, e somente se, $b = \frac{a + c}{2}$", classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) A condição "(a, b, c) é uma progressão aritmética" é necessária e suficiente para que $b = \frac{a + c}{2}$.

b) A condição $b = \frac{a + c}{2}$ é necessária e suficiente para que (a, b, c) seja uma progressão aritmética.

c) O teorema dado é equivalente a: "se a seqüência (a, b, c) é uma progressão aritmética, então $b = \frac{a + c}{2}$".

d) O teorema dado é equivalente a: "se $b = \frac{a + c}{2}$, então a seqüência (a, b, c) é uma progressão aritmética".

e) O teorema dado é equivalente a: "uma condição necessária e suficiente para que a seqüência (a, b, c) seja uma progressão aritmética é que $b = \frac{a + c}{2}$.

B.12 Prove que, "se ABC é um triângulo, então existe e é único o ponto interior ao triângulo equidistante dos três lados". **Sugestão:** construa as bissetrizes internas de dois ângulos internos do triângulo e lembre-se de que, "se um ponto pertence à bissetriz de um ângulo, então ele equidista dos lados desse ângulo".

B.13 Prove que, "se $ABCD$ é um quadrado, então existe e é única a circunferência que passa pelos quatro vértices desse quadrado".

Exercícios complementares

C.1 Prove que, "se P é um ponto interior de um triângulo equilátero ABC, então a soma das distâncias de P aos três lados do triângulo é igual à altura desse triângulo". **Sugestão:** construa os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$; as distâncias de P aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são as alturas dos triângulos ABP, ACP e BCP; a soma das áreas dos triângulos ABP, ACP e BCP é igual à área do triângulo ABC.

C.2 Usando a técnica da demonstração indireta, prove que, "se r é uma reta e λ é uma circunferência, então $r \cap \lambda$ é um conjunto de, no máximo, dois pontos distintos". **Sugestão:** suponha que $r \cap \lambda$ seja um conjunto com três pontos distintos.

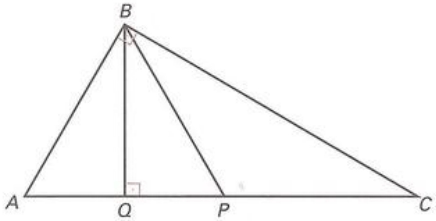
C.3 Prove que "as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si se, e somente se, os lados desse paralelogramo são congruentes entre si". **Sugestão:** trace as diagonais do paralelogramo; as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios; as diagonais determinam, juntamente com os lados, triângulos congruentes.

C.4 Prove que, "se $ABCD$ é um quadrado, então existe e é único o ponto interior ao quadrado e equidistante dos quatro lados".

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP, modificado) Prove que, "se a medida de um ângulo interno de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois outros ângulos internos, então esse triângulo é retângulo".

V.2 (Vunesp) Prove que, "se em um triângulo retângulo ABC o ponto médio da hipotenusa $\overline{AC}$ é P e o pé da perpendicular baixada de B sobre $\overline{AC}$ é Q, então $\dfrac{QP}{BP} = \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 - \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$".



V.3 (Vunesp) Provar que, "se a e b são números naturais tais que $a = 1 + b^2$ e b é ímpar, então a é par".

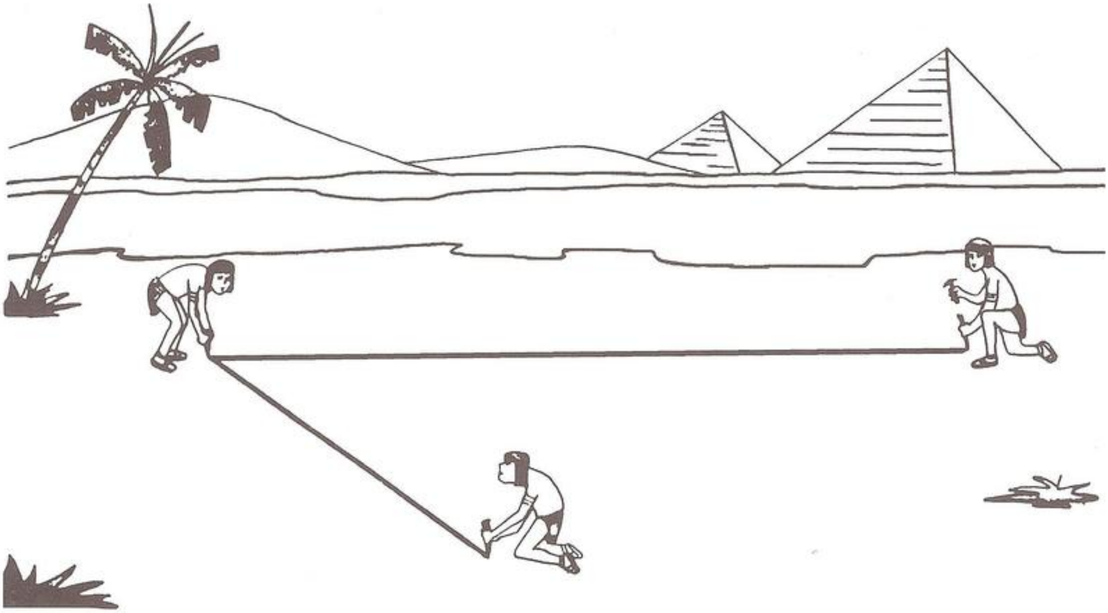
V.4 (Fuvest-SP) Provar que, "se $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$".

Capítulo 40

Geometria espacial de posição – os primeiros postulados

1. Introdução

A necessidade de medir distâncias, delimitar fronteiras, calcular volumes, etc. levou o homem a estudar as relações entre as formas e entre as formas e os números. Essas relações constituem a geometria.



Depois das enchentes anuais do Rio Nilo, os antigos egípcios tinham de remarcar os campos de plantio situados no vale. Essa foi uma das práticas que originaram as primeiras idéias sobre a geometria.

O termo **geometria** (*geo*, "terra"; *metria*, "medição") significa "medição da terra". Com o passar do tempo a geometria evoluiu, abordando outros assuntos além de medições, como veremos a seguir.

Há mais de dois milênios o pensador grego Euclides de Alexandria organizou a geometria em uma obra de treze volumes: *Os elementos*. Neste curso vamos estudar os conceitos básicos da geometria euclidiana.

Euclides de Alexandria (século III a.C.). Sua obra continua sendo estudada em todo o mundo.

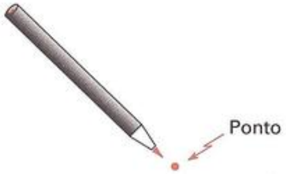
2. Conceitos primitivos

Euclides apresentou a geometria de uma forma axiomática, admitindo como primitivos os conceitos de:

- ponto;
- reta;
- plano.

Conceitos primitivos são aqueles que se admitem sem definição. Cada um desses três conceitos primitivos pode ser representado por **modelos**. Por exemplo:

- um ponto, representado por uma marca feita com a ponta do lápis sobre um papel:

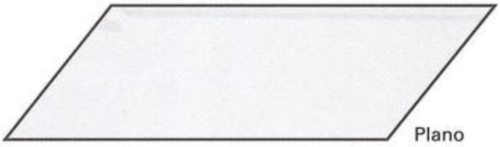


Os pontos são indicados por letras latinas maiúsculas: *A*, *B*, *C*, *D*, ...

- uma reta, por uma "linha" construída com o auxílio de uma régua:

As retas são indicadas por letras latinas minúsculas: *a*, *b*, *c*, ...

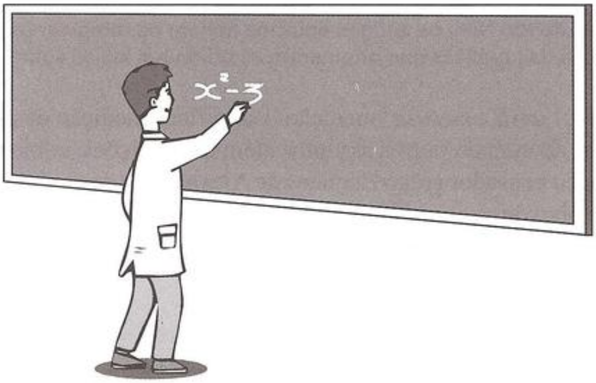
- um plano, pela figura:



Os planos são indicados por letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...

Notas

1. Para ter uma idéia de um plano, observe a lousa de sua sala de aula. Ela é uma superfície plana.



2. O plano é infinito em todas as suas direções. Assim, a superfície da lousa representa apenas uma parte de um plano.

3. Postulados

Toda teoria axiomática admite, além de conceitos primitivos, certas proposições aceitas sem demonstração. Essas proposições são chamadas de **postulados**. Os primeiros postulados da geometria são:

P.1 Existem infinitos pontos.

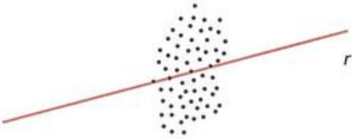
- O conjunto E de todos os pontos é chamado de **espaço**.

$$E = \{X \mid X \text{ é ponto}\}.$$

- Dizemos que dois pontos A e B coincidem se, e somente se, A e B forem o mesmo ponto. Caso contrário, dizemos que A e B são pontos distintos. Indicamos esses fatos, respectivamente, por:

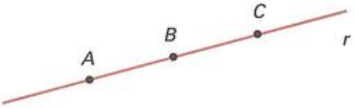
$A \equiv B$ (lê-se "A coincide com B"); $A \not\equiv B$ (lê-se "A é distinto de B").

P.2 Existe reta. Uma reta é um conjunto r de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a r.



- Pontos que pertencem a uma mesma reta são chamados de **pontos colineares** ou **pontos alinhados**.

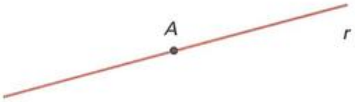
Exemplo



A, B e C são pontos colineares.

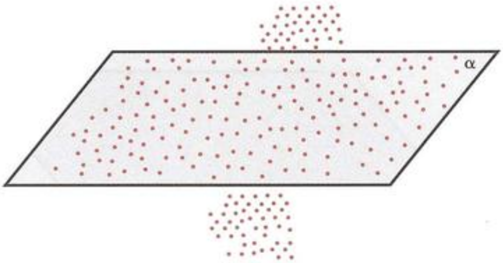
- Dizemos que uma reta r **passa** por um ponto A se, e somente se, $A \in r$.

Exemplo



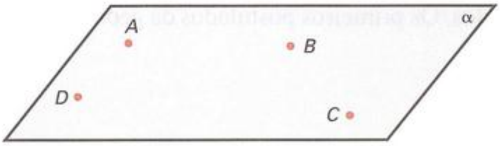
A reta r passa pelo ponto A.

P.3 Existe plano. Um plano é um conjunto α de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a α.



- Pontos que pertencem a um mesmo plano são chamados de **pontos coplanares.**

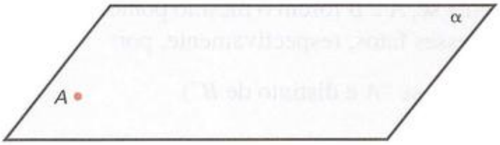
Exemplo



A, *B*, *C* e *D* são pontos coplanares.

- Dizemos que um plano α **passa** por um ponto *A* se, e somente se, $A \in \alpha$.

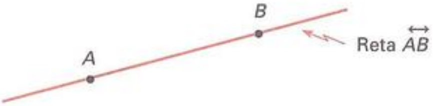
Exemplo



O plano α passa pelo ponto *A*.

P.4 Dados dois pontos distintos *A* e *B*, existe e é única a reta que passa por *A* e *B*.

Podemos representar a reta determinada pelos pontos *A* e *B* pelo símbolo $\overleftrightarrow{AB}$.



Convenção

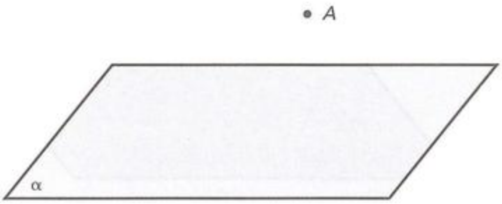
A **existência** e a **unicidade** ficarão garantidas, daqui por diante, quando usarmos a expressão "determina(m)". Por exemplo, o enunciado do postulado P.4 pode ser: "Dois pontos distintos **determinam** uma reta". Na palavra "determinam", ficam implícitas a existência e a unicidade da reta.

Exercícios resolvidos

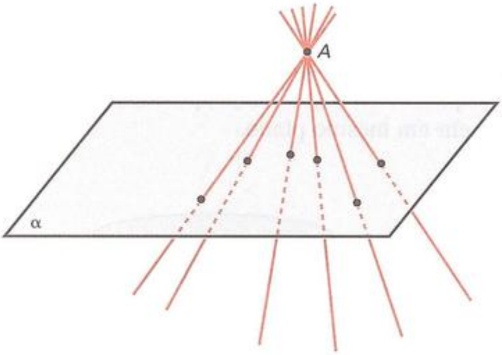
R.1 Justificar a seguinte afirmação: "por um ponto passam infinitas retas".

Resolução

Seja α um plano. De acordo com o postulado P.3, existem infinitos pontos que não pertencem a α. Seja *A* um desses pontos.



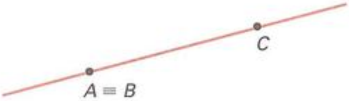
Ainda pelo postulado P.3, temos que α é um conjunto de infinitos pontos. Cada um desses infinitos pontos e o ponto *A* determinam uma reta (de acordo com o postulado P.4). Logo, existem infinitas retas que passam por *A*.



R.2 Justificar a seguinte afirmação: "três pontos não-colineares são necessariamente distintos entre si".

Resolução

Sejam *A*, *B* e *C* três pontos não-colineares. Se dois deles coincidissem, por exemplo $A \equiv B$, existiria uma reta passando pelos três simultaneamente:

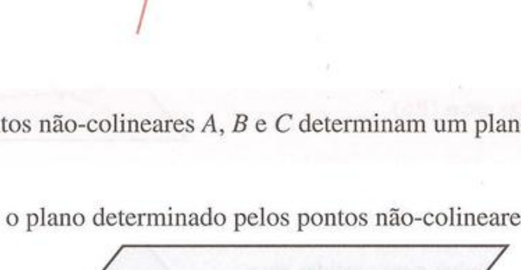


Isso contraria a hipótese de os três não serem colineares.

R.3 Justificar a seguinte afirmação: "dado um plano α, existe uma reta que não está contida em α".

Resolução

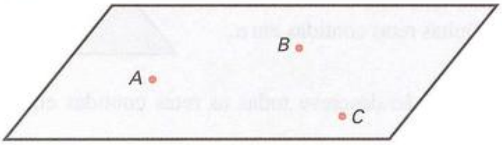
Pelo postulado P.3, temos que o plano α é um conjunto de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a α. Tomemos um ponto A, $A \in \alpha$, e um ponto B, $B \notin \alpha$. Portanto a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida em α.



$\overleftrightarrow{AB} \not\subset \alpha$

P.5 Três pontos não-colineares *A*, *B* e *C* determinam um plano.

Podemos representar o plano determinado pelos pontos não-colineares *A*, *B* e *C* por pl(*A*, *B*, *C*).

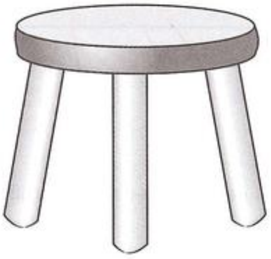


pl(*A*, *B*, *C*)

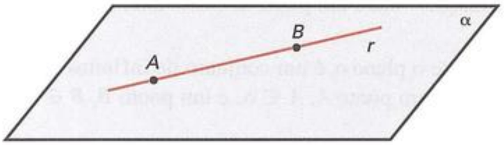
Lembre-se de que a expressão "determinam" garante a existência e a unicidade do plano. O enunciado do postulado P.5 poderia ser:

"Dados três pontos não-colineares A, B e C, existe e é único o plano que passa pelos três simultaneamente".

Provavelmente, Euclides enunciou seus postulados a partir de observações do mundo físico. Para enunciar o postulado P.5, ele pode ter se inspirado no fato de um banquinho de três pés permanecer sempre estável (isto é, não balançar), mesmo que esteja apoiado sobre um piso irregular. Isso porque os três pés estão apoiados **sempre** em um mesmo plano.



P.6 Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então r está contida em α.



Dizemos que um plano α **passa** por uma reta r se, e somente se, $r \subset \alpha$. Assim, o enunciado do postulado P.6 poderia ser:

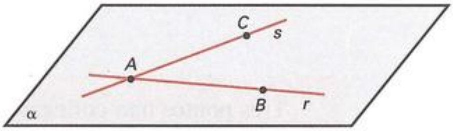
"Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então o plano α passa pela reta r".

Exercício resolvido

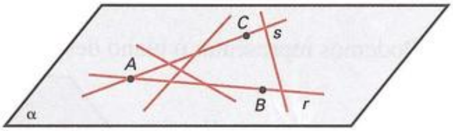
R.4 Justificar a seguinte afirmação: "um plano contém infinitas retas".

Resolução

Seja α o plano determinado por três pontos não-colineares A, B e C (P.5). Os pontos A e B determinam uma reta r e os pontos A e C determinam uma reta s (P.4). As retas r e s estão contidas em α (P.6).



Pelo postulado P.2, as retas r e s são conjuntos de infinitos pontos. Cada um dos infinitos pontos de r com um ponto qualquer de s determina uma reta contida em α (P.4 e P.6). Assim, existem infinitas retas contidas em α.



Nota: a construção que fizemos não descreve todas as retas contidas em α, porém mostra que existem infinitas retas contidas em α.

4. Figuras geométricas

Definição

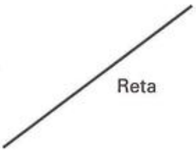
> Chama-se **figura geométrica** todo conjunto não-vazio de pontos.

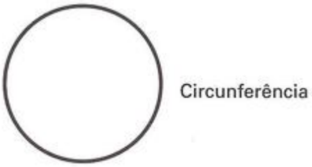
As figuras geométricas podem ser **planas** ou **reversas**:

- a figura geométrica é **plana** quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano;
- a figura geométrica é **reversa** quando seus pontos não são coplanares.

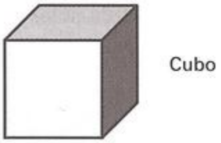
Exemplos

São figuras geométricas planas:





São figuras geométricas reversas:



Definição

> Duas figuras geométricas F_1 e F_2 são **coincidentes** se, e somente se, todo ponto de F_1 pertence a F_2 e todo ponto de F_2 pertence a F_1.

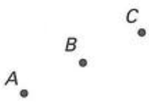
Indicamos que F_1 e F_2 coincidem por $F_1 \equiv F_2$ (lê-se "F_1 coincide com F_2").

Se F_1 e F_2 não coincidem, então dizemos que F_1 e F_2 são figuras distintas. Indicamos esse fato por:

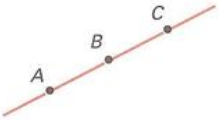
$$F_1 \not\equiv F_2 \text{ (lê-se "}F_1\text{ é distinta de }F_2\text{")}.$$

Exemplos

a) Considere três pontos colineares A, B e C:

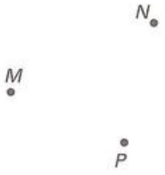


A reta $\overleftrightarrow{AB}$ coincide com a reta $\overleftrightarrow{BC}$, ou seja:

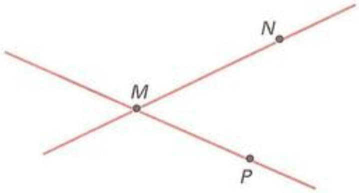


$$\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{BC}$$

b) Considere três pontos não-colineares M, N e P:

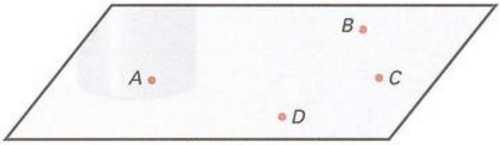


A reta $\overleftrightarrow{MN}$ é distinta da reta $\overleftrightarrow{MP}$, ou seja:



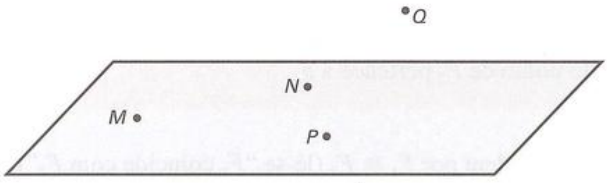
$$\overleftrightarrow{MN} \neq \overleftrightarrow{MP}$$

c) Considere quatro pontos coplanares A, B, C e D de modo que não haja três deles colineares:

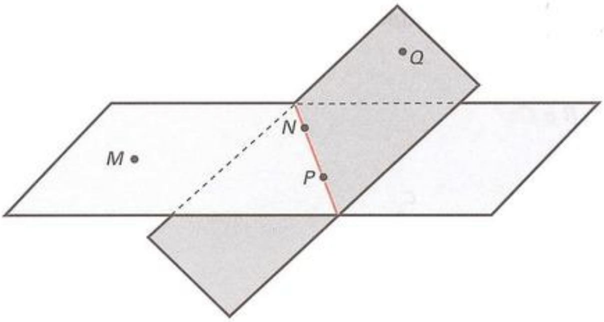


$$\text{pl}(A, B, C) \equiv \text{pl}(B, C, D)$$

d) Considere quatro pontos **não-coplanares** M, N, P e Q:

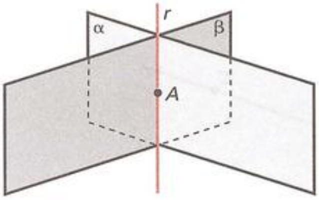


Os planos pl(M, N, P) e pl(Q, N, P) são distintos, ou seja:



$$\text{pl}(M, N, P) \neq \text{pl}(Q, N, P)$$

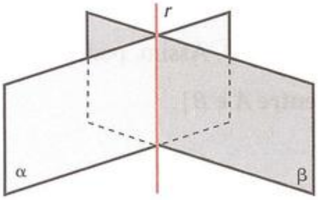
P.7 Se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \neq \beta \\ A \in \alpha \text{ e } A \in \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$$

Definição

Dois planos são **secantes** se, e somente se, têm uma única reta em comum.



$\alpha \cap \beta = r \Leftrightarrow \alpha$ e β são secantes

Exercício resolvido

R.5 Sejam dois planos distintos α e β e dois pontos distintos A e B. Justificar a seguinte afirmação: "se $\{A, B\} \subset \alpha$ e $\{A, B\} \subset \beta$, então $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$".

Resolução

Se $A \in \alpha$ e $A \in \beta$, então $A \in \alpha \cap \beta$. Se $B \in \alpha$ e $B \in \beta$, então $B \in \alpha \cap \beta$.

Pelo postulado P.7, a intersecção de dois planos distintos que têm um ponto comum é uma reta. Seja r a reta tal que $\alpha \cap \beta = r$. Temos $A \in (\alpha \cap \beta)$ e $B \in (\alpha \cap \beta) \Rightarrow A \in r$ e $B \in r$.

Como A e B são pontos distintos, temos, pelo postulado P.4, que existe e é única a reta que passa por A e B. Assim, $r = \overleftrightarrow{AB}$. Logo, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$.

5. Segmento de reta

Para poder definir segmento de reta, vamos enunciar alguns postulados que tratam do conceito primitivo "estar entre".

P.8 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A, B e C são distintos entre si.

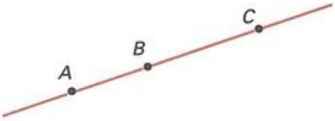
P.9 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A, B e C são colineares.

P.10 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A não está entre B e C, e C não está entre A e B.

P.11 Entre dois pontos distintos quaisquer A e C, sempre existe um ponto B.

Exemplo

Na figura, o ponto B está entre os pontos A e C.

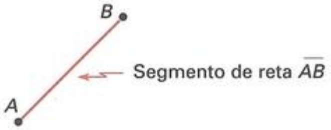


Definição

Dados dois pontos distintos A e B, chama-se "**segmento de reta** de extremos A e B" a reunião do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto dos pontos **entre** A e B.

Indicamos o segmento de reta de extremos A e B pelo símbolo $\overline{AB}$. Assim, podemos escrever:

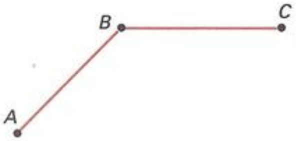
$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ é ponto } \textbf{entre } A \text{ e } B\}.$$



Notas

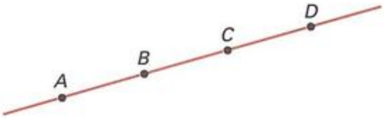
1. Podemos definir segmento de reta $\overline{AB}$ mesmo que A coincida com B. Nesse caso definimos $\overline{AA} = \{A\}$.

2. Segmentos de reta que possuem apenas um extremo em comum são chamados de **segmentos consecutivos**.



$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos consecutivos.

3. Segmentos de reta contidos em uma mesma reta são chamados de **segmentos colineares**.



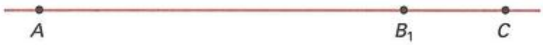
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos colineares.

Exercício resolvido

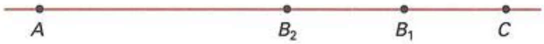
R.6 Justificar a afirmação "entre dois pontos distintos existem infinitos pontos".

Resolução

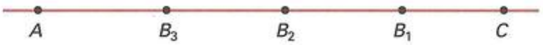
Pelo postulado P.11, temos que entre dois pontos distintos A e C existe um ponto B_1.



Como A e B_1 são distintos (P.8), então entre A e B_1 existe um ponto B_2.



Como A e B_2 são distintos (P.8), então entre A e B_2 existe um ponto B_3.



E assim por diante, teremos infinitos pontos entre A e C.

6. Resumo dos postulados e teoremas

Devido à grande quantidade de postulados e teoremas existentes na geometria, fazemos ao final de cada capítulo um resumo enumerando os postulados e teoremas. Sugerimos que você, durante o decorrer do curso, faça sua própria lista de postulados e teoremas (isso o ajudará a consultá-los de um modo simples).

Postulados

P.1 Existem infinitos pontos.

P.2 Existe reta. Uma reta é um conjunto r de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a r.

P.3 Existe plano. Um plano é um conjunto α de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a α.

P.4 Dados dois pontos distintos A e B, existe e é única a reta que passa por A e B.

P.5 Três pontos não-colineares A, B e C determinam um plano.

P.6 Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então r está contida em α.

P.7 Se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta.

P.8 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A, B e C são distintos entre si.

P.9 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A, B e C são colineares.

P.10 Se o ponto B está entre os pontos A e C, então A não está entre B e C, e C não está entre A e B.

P.11 Entre dois pontos distintos quaisquer A e C, sempre existe um ponto B.

Teoremas

T.1 Por um ponto passam infinitas retas.

T.2 Dado um plano α, existe uma reta que não está contida em α.

T.3 Um plano contém infinitas retas.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.6, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.7, B.8, B.9, B.10, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) Ponto, reta e plano são conceitos primitivos, ou seja, conceitos que não se definem.
b) Uma reta é um conjunto de infinitos pontos.
c) Um plano é limitado pelo seu contorno.
d) Uma reta não possui origem nem extremidade.
e) Postulado é uma proposição que pode ser demonstrada.
f) Dada uma reta, existem infinitos pontos que não pertencem a ela.
g) Um plano contém infinitas retas.
h) Dado um plano α, existe uma única reta não contida em α.
i) Dado um plano α, existe uma reta não contida em α.
j) Por um ponto passam infinitas retas.
k) Dois pontos são sempre colineares.
l) Três pontos são sempre colineares.
m) Três pontos não-colineares determinam um plano.
n) Três pontos distintos determinam um plano.
o) Três pontos são sempre coplanares.
p) Quatro pontos são sempre coplanares.
q) Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então $r \subset \alpha$.
r) Uma figura geométrica pode ser um conjunto com infinitos pontos.
s) Toda figura geométrica é plana.
t) Se dois planos α e β são coincidentes e uma reta r está contida em α, então r está contida em β.
u) Uma reta e um plano podem ter apenas dois pontos em comum.
v) Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então possuem uma única reta em comum.
w) Dois planos que possuem uma única reta em comum são secantes.
x) Dois planos que possuem uma reta em comum são secantes.
y) Se A e B são pontos distintos, então o segmento $\overline{AB}$ é um conjunto finito de pontos.

B.2 Justifique a seguinte afirmação: "se uma reta r e um plano α são tais que $r \not\subset \alpha$ e $r \cap \alpha \neq \varnothing$, então r e α têm um único ponto comum".

B.3 Justifique a seguinte afirmação: "se dois planos distintos α e β têm três pontos A, B e C em comum, então A, B e C são pontos colineares".

B.4 Justifique a seguinte afirmação: "se duas retas r e s têm em comum dois pontos distintos, então r coincide com s".

B.5 Chama-se "**reta suporte** de um segmento $\overline{AB}$" a reta que contém esse segmento. Se dois segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ têm a mesma reta suporte, então esses segmentos:

a) têm necessariamente pontos comuns.
b) necessariamente não têm pontos comuns.
c) são ambos nulos.
d) são consecutivos.
e) são colineares.

B.6 Os pontos A, B, C e D são tais que C está entre A e B e B está entre C e D. Nessas condições podemos afirmar que:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não têm pontos comuns.
b) $\overline{CB} \subset \overline{AD}$.
c) A está entre C e D.
d) C e B podem coincidir.
e) $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \varnothing$.

B.7 Um segmento de reta $\overline{AB}$ tem em comum com um plano α apenas o ponto A. Os pontos D e C, pertencentes a α, são tais que D está entre A e C. Podemos afirmar que:

a) A, B e D são colineares.
b) a reta $\overleftrightarrow{CD}$ tem um único ponto em comum com α.
c) A, B, C e D são coplanares.
d) as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ não têm ponto em comum.
e) D está entre A e B.

B.8 Classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) Se existe um ponto A comum a dois planos α e β e existe um ponto B tal que $B \in \alpha$ e $B \notin \beta$, então a intersecção de α e β é uma reta.
b) Se dois planos α e β têm um ponto comum, então α e β são secantes.
c) A intersecção de dois planos pode ser um segmento de reta.
d) Se duas retas r e s têm um único ponto comum e r está contida em um plano α, então s e α têm um único ponto comum.
e) Existem infinitos planos que passam por um mesmo ponto.
f) Se um ponto B está entre dois pontos A e C, então A, B e C são colineares.
g) Se três pontos distintos são colineares, então um deles está entre os outros dois.
h) Se r e s são retas distintas, então $r \cap s = \varnothing$.
i) Se r e s são retas tais que $r \cap s = \varnothing$, então r e s são retas distintas.

B.9 Prove que "três pontos distintos entre si podem não ser colineares".

B.10 Prove que "quatro pontos distintos entre si podem não ser coplanares".

Exercícios complementares

C.1 Uma reta pode coincidir com um plano? Por quê?

C.2 Prove que, "se r e s são retas com um único ponto comum e α e β são planos distintos tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então α e β são secantes".

C.3 São dadas três retas r, s e t, distintas entre si, e três pontos A, B e C, distintos entre si, tais que $r \cap s = \{A\}$, $r \cap t = \{B\}$ e $s \cap t = \{C\}$. Prove que r, s e t são coplanares.

C.4 Sejam seis pontos distintos entre si, de modo que não existam, dentre eles, três colineares. Quantas retas ficam determinadas por esses pontos?

C.5 Sejam cinco pontos distintos entre si de modo que não existam, dentre eles, quatro coplanares. Quantos planos ficam determinados por esses pontos?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) Quatro pontos distintos e não-coplanares determinam exatamente:

a) um plano.
b) dois planos.
c) três planos.
d) quatro planos.
e) cinco planos.

V.2 (Cescem) Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam secantes é:

a) que sejam distintos.
b) que tenham um ponto comum.
c) que tenham uma reta comum.
d) que não sejam coincidentes.
e) que sejam distintos com um ponto comum.

V.3 (UFBA) Sendo P, Q e M pontos distintos entre si, r e s retas e α um plano, se $P \in r$, $Q \in r$ e $r \subset \alpha$, então:

a) $r \cap \alpha = \varnothing$.
b) $r \cap \alpha = \{P, Q\}$.
c) $\exists\, M, M \in r$ tal que $M \notin \alpha$.
d) $\exists\, M, M \in \alpha$ tal que $M \notin r$.
e) $\forall\, s, s \subset \alpha, s \cap r = \varnothing$.

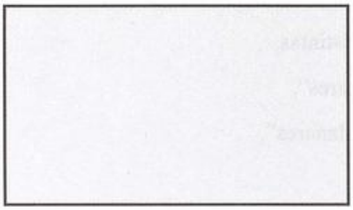
Capítulo 41

Conjunto convexo

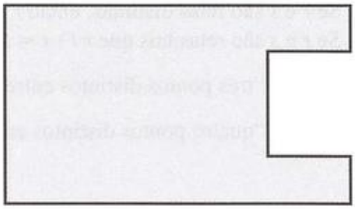
1. Conceituação

Um conceito fundamental na geometria é o de **conjunto convexo**. Antes de definir esse conceito, vamos dar uma noção intuitiva.

Vejamos, por exemplo, as plantas de dois salões, em que os contornos representam suas paredes:



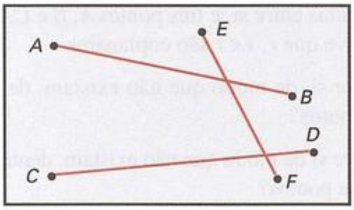
(I)



(II)

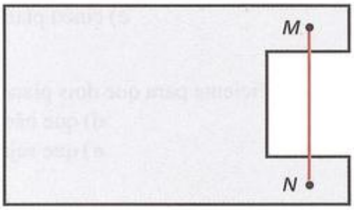
Em qual desses salões é possível caminhar em linha reta, ligando dois pontos quaisquer do piso?

Note que no salão (I) isso é sempre possível:



(I)

Mas no salão (II) nem sempre é possível (por exemplo, não podemos caminhar em linha reta do ponto *M* ao *N*, pois temos paredes entre eles):



(II)

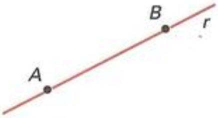
Por isso dizemos que o piso do salão (I) **é** um conjunto convexo de pontos e que o piso de (II) **não é** convexo.

Definição

Um conjunto U de pontos é convexo se, e somente se, dois pontos **quaisquer** de U são extremidades de um segmento de reta **contido** em U.

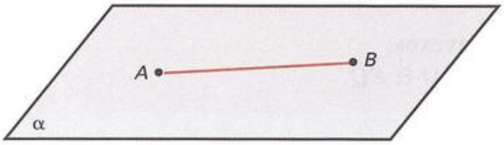
Exemplos

a) Uma reta r é um conjunto convexo, pois dois pontos quaisquer de r são extremidades de um segmento de reta contido em r.



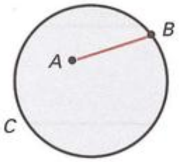
$\overline{AB} \subset r$

b) Um plano α é um conjunto convexo, porque dois pontos quaisquer de α são extremidades de um segmento de reta contido em α.



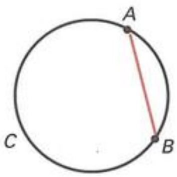
$\overline{AB} \subset \alpha$

c) Um círculo C é um conjunto convexo, porque dois pontos quaisquer do círculo são extremidades de um segmento contido no círculo.



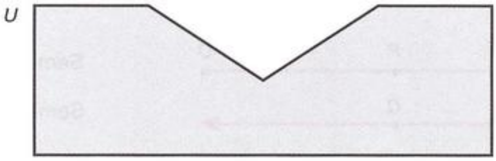
$\overline{AB} \subset C$

d) Lembrando que a circunferência é a **linha** de contorno do círculo, temos que uma circunferência C não é um conjunto convexo, pois, unindo-se dois pontos distintos A e B de C, o segmento $\overline{AB}$ não está contido em C.

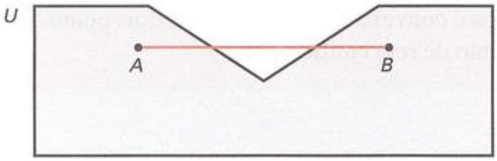


$\overline{AB} \not\subset C$

e) A região U sombreada da figura não é convexa.



Isso porque existem pelo menos dois pontos de U que não são extremidades de segmentos contidos em U (por exemplo, os pontos A e B).



$\overline{AB} \not\subset U$

f) O espaço é um conjunto convexo.

g) Convencionamos que o conjunto vazio é convexo.

2. Postulados de separação

P.12 Para todo ponto O pertencente a uma reta r, existem dois subconjuntos r' e r'' de r tais que:

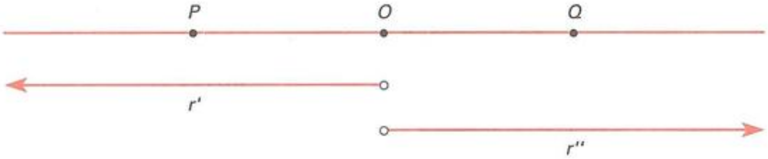
I. $r' \cap r'' = \varnothing$;

II. $r' \cup r'' \cup \{O\} = r$;

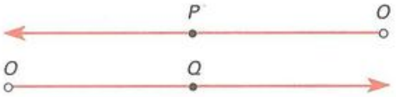
III. r' e r'' são conjuntos convexos;

IV. se $P \in r'$ e $Q \in r''$, então $O \in \overline{PQ}$.

Em outras palavras, um ponto O de uma reta r separa a reta em dois conjuntos **convexos** e **disjuntos** r' e r'' de modo que O está entre um ponto qualquer de r' e um ponto qualquer de r''.



- Os conjuntos r' e r'' são chamados de "**semi-retas abertas** de origem O passando por P e Q, respectivamente". Indicamos essas semi-retas abertas por $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OQ}}$, respectivamente.

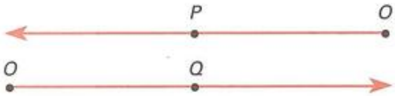


Semi-reta aberta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$

Semi-reta aberta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OQ}}$

Nota: a origem de uma semi-reta aberta **não** pertence a ela.

- Os conjuntos $\{O\} \cup r'$ e $\{O\} \cup r''$ são chamados de **semi-retas fechadas** ou simplesmente de "**semi-retas** de origem O passando por P e Q, respectivamente". Indicamos essas semi-retas por $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, respectivamente.

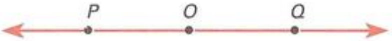


Semi-reta $\overrightarrow{OP}$

Semi-reta $\overrightarrow{OQ}$

Nota: a origem de uma semi-reta fechada **pertence** a ela.

- Duas semi-retas distintas, de mesma origem, contidas em uma mesma reta são chamadas de "**semi-retas opostas** em relação à origem".



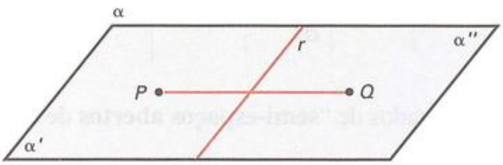
$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ são semi-retas opostas em relação a O.

P.13

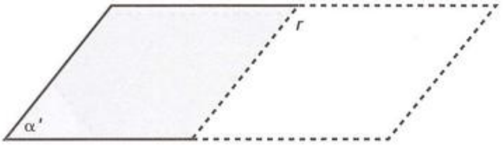
Para toda reta r, contida em um plano α, existem dois subconjuntos α' e α'' de α tais que:

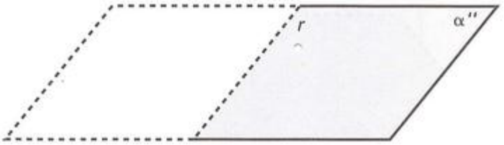
I. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;
II. $\alpha' \cup \alpha'' \cup r = \alpha$;
III. α' e α'' são conjuntos convexos;
IV. se $P \in \alpha'$ e $Q \in \alpha''$, então $r \cap \overline{PQ} \neq \varnothing$.

Em outras palavras, uma reta r contida em um plano α separa o plano em dois conjuntos **convexos** e **disjuntos** α' e α'' de modo que qualquer segmento de reta, com um extremo em α' e o outro em α'', intercepta r.



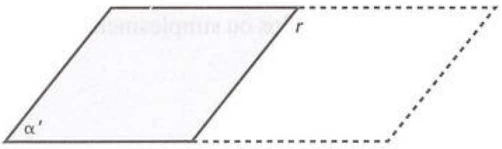
- Os conjuntos α' e α'' são chamados de "**semiplanos abertos** de origem r".

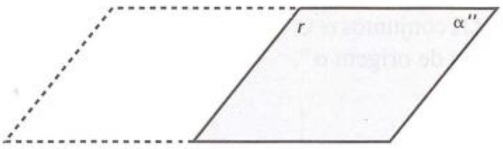




Nota: um semiplano aberto **não** contém a reta origem.

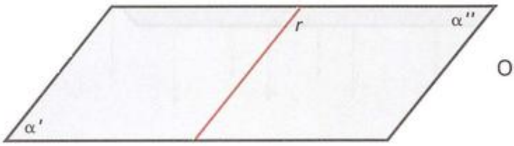
- Cada um dos conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ é chamado de **semiplano fechado** ou simplesmente de "**semiplano** de origem r".





Nota: um semiplano fechado **contém** a reta origem.

- Dois semiplanos distintos, de mesma origem, contidos em um mesmo plano são chamados de "**semiplanos opostos** em relação à reta origem".

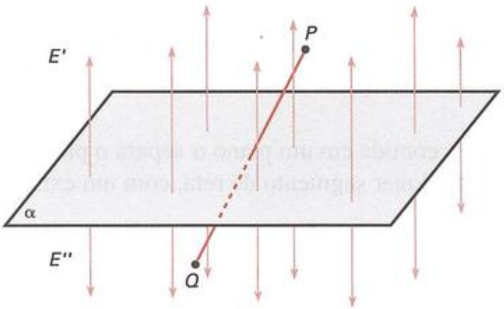


Os semiplanos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são opostos em relação a r.

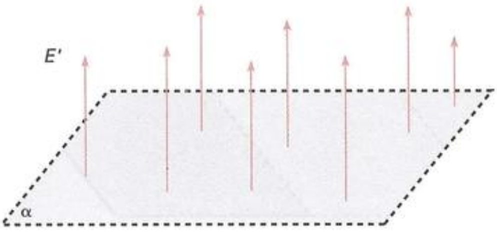
P.14 Para todo plano α, existem dois subconjuntos E' e E'' do espaço E tais que:

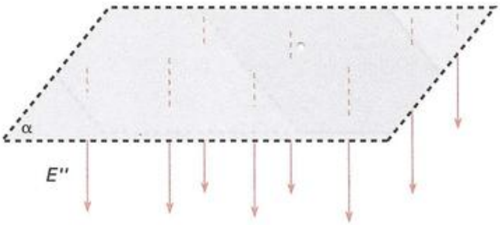
I. $E' \cap E'' = \varnothing$;
II. $E' \cup E'' \cup \alpha = E$;
III. E' e E'' são conjuntos convexos;
IV. se $P \in E'$ e $Q \in E''$, então $\alpha \cap \overline{PQ} \neq \varnothing$.

Em outras palavras, um plano α separa o espaço E em dois conjuntos **convexos** e **disjuntos** E' e E'' de modo que qualquer segmento de reta, com um extremo em E' e o outro em E'', intercepta α.



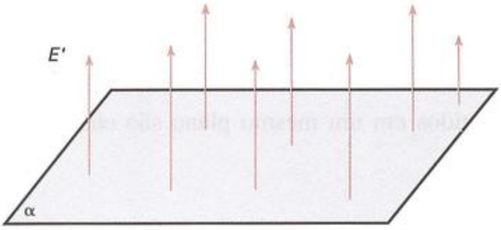
- Os conjuntos E' e E'' são chamados de "**semi-espaços abertos** de origem α".

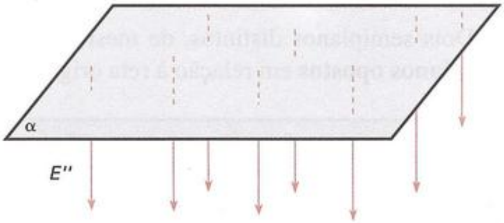




Nota: um semi-espaço aberto **não** contém o plano origem.

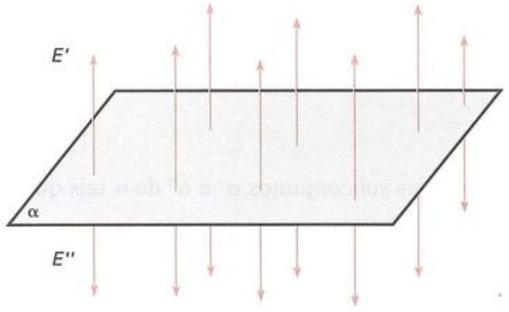
- Os conjuntos $\alpha \cup E'$ e $\alpha \cup E''$ são chamados de **semi-espaços fechados** ou simplesmente de "**semi-espaços** de origem α".





Nota: um semi-espaço fechado **contém** o plano origem.

- Dois semi-espaços distintos de mesma origem são chamados de "**semi-espaços opostos** em relação ao plano origem".

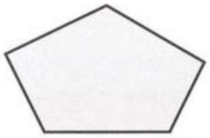


Os semi-espaços $\alpha \cup E'$ e $\alpha \cup E''$ são opostos em relação ao plano α.

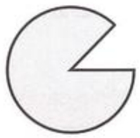
Exercícios resolvidos

R.1 Sejam as regiões planas sombreadas nas figuras.

a)



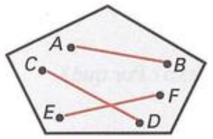
b)



Considerar cada uma delas como um conjunto de pontos e classificá-las como convexas ou não.

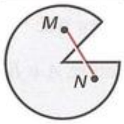
Resolução

a)



É um conjunto convexo, pois quaisquer dois de seus pontos são extremidades de um segmento de reta contido no conjunto.

b)

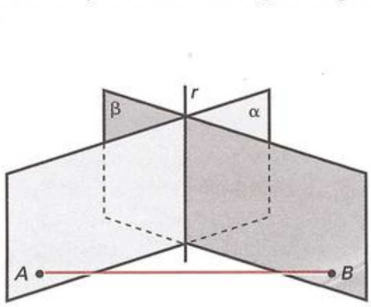


Não é um conjunto convexo, pois existem pelo menos dois de seus pontos (*M* e *N*, por exemplo) que não são extremidades de um segmento de reta contido no conjunto.

R.2 Seja H a reunião de dois planos secantes α e β, isto é, $H = \alpha \cup \beta$. Classificar H como convexo ou não.

Resolução

A intersecção de dois planos secantes α e β é uma reta r. Sejam os pontos A e B tais que $A \in \alpha$, $A \notin r$, $B \in \beta$ e $B \notin r$ (conforme figura).



O segmento que liga A e B não está contido no conjunto $H = \alpha \cup B$. Logo H não é convexo.

3. Resumo dos postulados

P.12 Para todo ponto O, pertencente a uma reta r, existem subconjuntos r' e r'' de r tais que:

I. $r' \cap r'' = \varnothing$;
II. $r' \cup r'' \cup \{O\} = r$;
III. r' e r'' são conjuntos convexos;
IV. se $P \in r'$ e $Q \in r''$, então $O \in \overline{PQ}$.

P.13 Para toda reta r, contida em um plano α, existem dois subconjuntos α' e α'' de α tais que:

I. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;
II. $\alpha' \cup \alpha'' \cup r = \alpha$;
III. α' e α'' são conjuntos convexos;
IV. se $P \in \alpha'$ e $Q \in \alpha''$, então $r \cap \overline{PQ} \neq \varnothing$.

P.14 Para todo plano α existem dois subconjuntos E' e E'' do espaço E tais que:

I. $E' \cap E'' = \varnothing$;
II. $E' \cup E'' \cup \alpha = E$;
III. E' e E'' são conjuntos convexos;
IV. se $P \in E'$ e $Q \in E''$, então $\alpha \cap \overline{PQ} \neq \varnothing$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, C.1, C.3, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, B.8, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Um conjunto formado apenas por dois pontos distintos é convexo? Por quê?

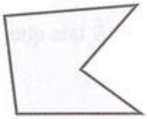
B.2 Um conjunto formado por um único ponto é convexo? Por quê?

B.3 Sendo $\overline{AB}$ um segmento de reta, o conjunto $\overline{AB} - \{A\}$ é convexo? Por quê?

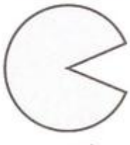
B.4 Sendo $\overline{AB}$ um segmento de reta com $A \neq B$ e sendo P um ponto entre A e B, o conjunto $\overline{AB} - \{P\}$ é um conjunto convexo? Por quê?

B.5 Qual das regiões sombreadas representa um conjunto convexo?

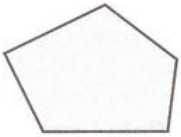
a)



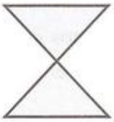
b)



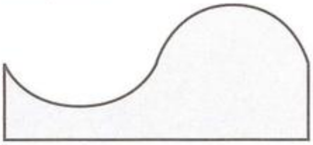
c)



d)



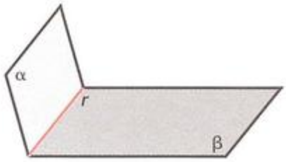
e)



B.6 A reunião de dois conjuntos convexos é, necessariamente, um conjunto convexo? Dê um exemplo.

B.7 A intersecção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo? Por quê?

B.8 Sejam dois semiplanos distintos α e β de mesma origem r e não-opostos em relação a r, conforme figura.



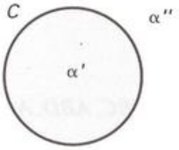
Sejam E' e E'' os conjuntos dos pontos do espaço E tais que:

I. $E' \cap E'' = \varnothing$;
II. $E' \cup E'' \cup \alpha \cup \beta = E$.

Os conjuntos E' e E'' são convexos? Por quê?

Exercícios complementares

C.1 Uma circunferência C separa um plano α em dois conjuntos α' e α'' tais que:



I. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;
II. $\alpha' \cup \alpha'' \cup C = \alpha$;
III. α' é convexo e α'' não é convexo.

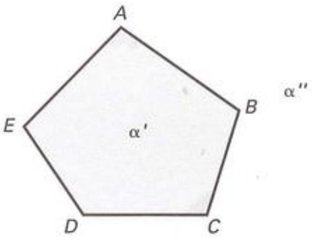
O conjunto α' é chamado de "interior da circunferência C"; e o conjunto α'' é chamado de "exterior da circunferência C".

a) O conjunto $\alpha' \cup \alpha''$ é convexo? Por quê?
b) A circunferência C é convexa? Por quê?
c) O conjunto $\alpha' \cup C$ é convexo? Por quê?
d) O conjunto $\alpha'' \cup C$ é convexo? Por quê?
e) Sendo P um ponto tal que $P \in C$, o conjunto $(\alpha' \cup C) - \{P\}$ é convexo? Por quê?
f) O ponto Q é interior à circunferência, ou seja, $Q \in \alpha'$, o conjunto $(\alpha' \cup C) - \{Q\}$ é convexo? Por quê?

C.2 Seja P um polígono que separa um plano α em dois conjuntos α' e α'' tais que:

I. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;
II. $\alpha' \cup \alpha'' \cup P = \alpha$;
III. α' é convexo e α'' não é convexo.

Por exemplo:



O conjunto α' é o interior do polígono e o conjunto α'' é o exterior.

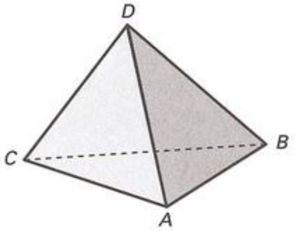
Chama-se **região poligonal convexa** a reunião do polígono P com o seu interior. Os vértices e os lados do polígono são chamados também de "vértices" e "lados" da região poligonal convexa.

a) Retirando-se de uma região poligonal convexa um de seus vértices, o conjunto dos pontos remanescentes é convexo? Por quê?
b) Retirando-se de uma região poligonal convexa um ponto de seu interior, o conjunto dos pontos remanescentes é convexo? Por quê?

c) Retirando-se de uma região poligonal convexa um de seus lados, o conjunto dos pontos remanescentes é convexo? Por quê?

d) Retirando-se de uma região poligonal convexa um ponto que pertença a um lado e que não seja vértice, o conjunto dos pontos remanescentes é convexo? Por quê?

C.3 Considere quatro pontos não-coplanares A, B, C e D. Seja V a reunião das regiões poligonais ABC, ABD, ACD e BCD:

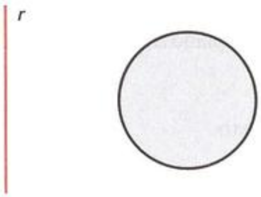


A região V separa o espaço E em dois conjuntos E' e E'' tais que:

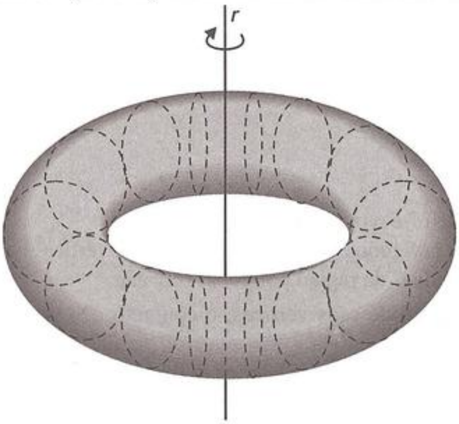
I. $E' \cap E'' = \varnothing$;
II. $E' \cup E'' \cup V = E$;
III. E' é convexo e E'' não é convexo;
IV. E' é o interior de V e E'' é o exterior;
V. os pontos A, B, C e D são os vértices de V e as regiões poligonais ABC, ABD, ACD e BCD são as faces de V.

a) O conjunto V é convexo?
b) O conjunto $V \cup E'$ é convexo?
c) O conjunto $(V \cup E') - \{A\}$ é convexo?
d) Sendo P um ponto do interior de V, o conjunto $(V \cup E') - \{P\}$ é convexo?
e) O conjunto $E' \cup E''$ é convexo?
f) O conjunto $(V \cup E') - \overline{AB}$ é convexo?

C.4 Um círculo é a reunião de uma circunferência com o seu interior. Considere em um mesmo plano um círculo e uma reta que não têm ponto comum:

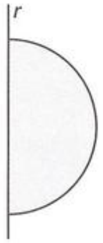


Uma rotação completa do círculo em torno da reta gera uma figura espacial chamada de **toro**:

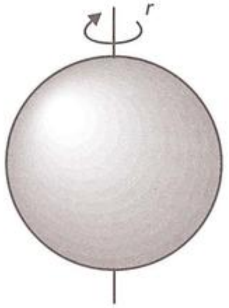


O toro é um conjunto convexo? Por quê?

C.5 Considere um semicírculo e a reta r que contém o seu diâmetro.

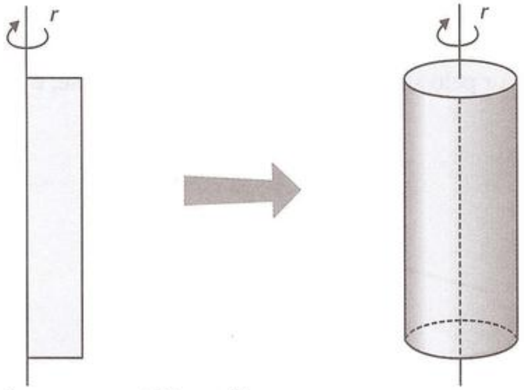


Uma rotação completa do semicírculo em torno da reta r é uma figura espacial chamada de **esfera**:



A esfera é um conjunto convexo? Por quê?

C.6 Uma rotação completa de uma região poligonal retangular em torno de uma reta r que contém um de seus lados é uma figura espacial chamada de **cilindro**:



O cilindro é um conjunto convexo? Por quê?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cice-RJ) Se dois conjuntos A e B de pontos são convexos, então podemos afirmar que:

a) $A - B$ é convexo.

b) $A \cup B$ é convexo.

c) $A \cap B$ é convexo.

d) $\complement_{(A \cup B)}^{A}$

e) $(A \cup B) - (A \cap B)$ é convexo.

V.2 (Cescem) Considerando as proposições:

I. todo círculo é um conjunto convexo;
II. toda circunferência é um conjunto convexo;
III. toda reta é um conjunto convexo;
IV. todo subconjunto de um conjunto convexo é convexo.

temos que:

a) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

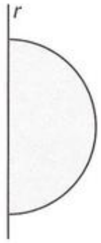
b) todas são verdadeiras.

c) apenas (II) é falsa.

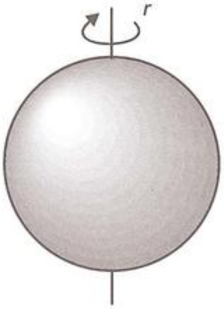
d) todas são falsas.

e) apenas (III) é verdadeira.

C.5 Considere um semicírculo e a reta r que contém o seu diâmetro.

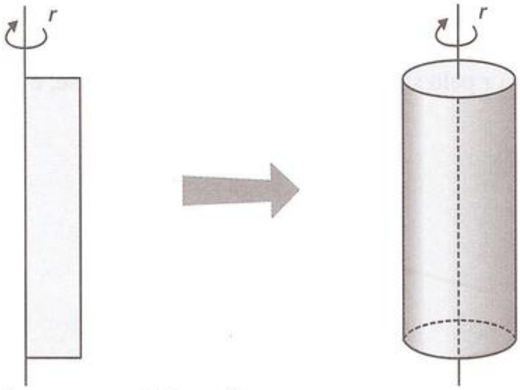


Uma rotação completa do semicírculo em torno da reta r é uma figura espacial chamada de **esfera**:



A esfera é um conjunto convexo? Por quê?

C.6 Uma rotação completa de uma região poligonal retangular em torno de uma reta r que contém um de seus lados é uma figura espacial chamada de **cilindro**:



O cilindro é um conjunto convexo? Por quê?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cice-RJ) Se dois conjuntos A e B de pontos são convexos, então podemos afirmar que:

a) $A - B$ é convexo.
b) $A \cup B$ é convexo.
c) $A \cap B$ é convexo.
d) $\complement_{(A \cup B)}^{A}$
e) $(A \cup B) - (A \cap B)$ é convexo.

V.2 (Cescem) Considerando as proposições:

I. todo círculo é um conjunto convexo;
II. toda circunferência é um conjunto convexo;
III. toda reta é um conjunto convexo;
IV. todo subconjunto de um conjunto convexo é convexo.

temos que:

a) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
b) todas são verdadeiras.
c) apenas (II) é falsa.
d) todas são falsas.
e) apenas (III) é verdadeira.

Capítulo 42

Retas

1. Posições relativas de duas retas

1.1. Retas paralelas

Definição

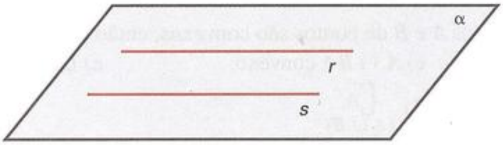
Duas retas r e s são paralelas se, e somente se:
I. $r \equiv s$ (retas paralelas coincidentes) ou
II. r e s são coplanares e não têm ponto em comum (retas paralelas distintas).

Indicamos que r é paralela a s pelo símbolo $r \parallel s$. Temos que $r \parallel s$ se, e somente se:

I. $r \equiv s$

ou

II. r e s estão contidas num mesmo plano e $r \cap s = \varnothing$.

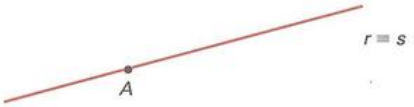


Nota: dizemos que dois segmentos de reta são paralelos se, e somente se, estão contidos em retas paralelas.

P.15 **Postulado das paralelas**

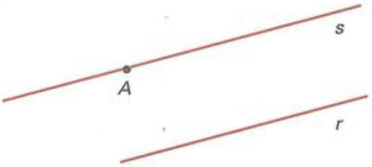
Dados uma reta r e um ponto A, existe uma única reta s que passa por A e é paralela a r.

I. $A \in r$



ou

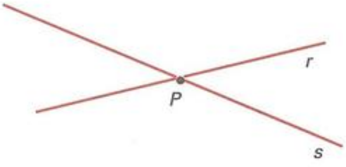
II. $A \notin r$.



1.2. Retas concorrentes

Definição

Duas retas *r* e *s* são concorrentes se, e somente se, têm um único ponto comum.



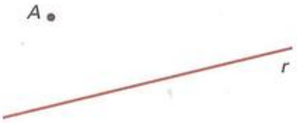
$r \cap s = \{P\}$

Exercício resolvido

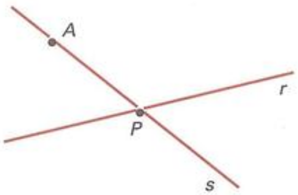
R.1 Demonstrar que "existem retas concorrentes".

Resolução

Dada uma reta *r*, existe um ponto *A* que não pertence a *r* (P.2).



O ponto *A* e um ponto *P*, $P \in r$, determinam uma reta *s* (P.4).



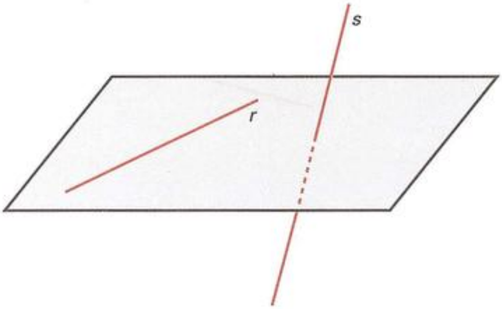
As retas *r* e *s* têm apenas o ponto *P* em comum, porque, se tivessem um outro ponto comum, então seriam retas coincidentes (P.4), o que contraria o fato de *A* não pertencer a *r*. Logo, *r* e *s* são concorrentes.

1.3. Retas reversas

Definição

Duas retas r e s são reversas se, e somente se, não são coplanares.

Em outras palavras, duas retas r e s são reversas se, e somente se, **não existe** um plano α que contenha as duas simultaneamente.

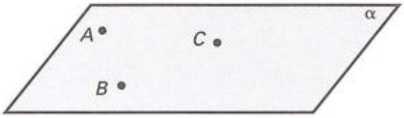


Exercício resolvido

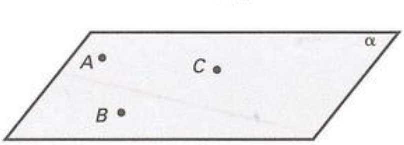
R.2 Demonstrar que "existem retas reversas".

Resolução

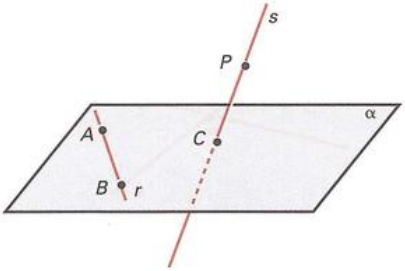
Três pontos não-colineares A, B e C determinam um plano α (P.5).



Existe um ponto P que não pertence a α (P.3).

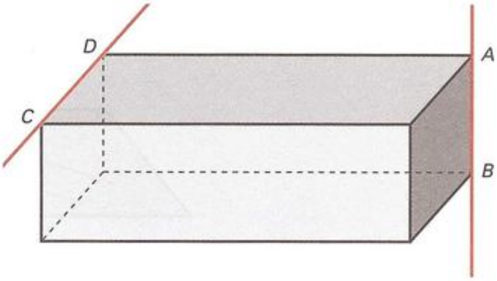


Os pontos A e B determinam uma reta r, e os pontos P e C determinam uma reta s (P.4).



Suponhamos que existisse um plano β contendo r e s simultaneamente. Teríamos, então, que $\{A, B, C, P\} \subset \beta$. Porém, de acordo com o postulado P.5, existe um único plano passando pelos pontos não-colineares A, B e C. Logo, β coincidiria com α, o que contraria o fato de P não pertencer a α. Assim sendo, não existe um plano que passa por r e s simultaneamente.

Para visualizar retas reversas, observe a caixa de sapatos ao lado. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas. A caixa de sapatos é um ótimo modelo para visualizarmos retas e planos no espaço.

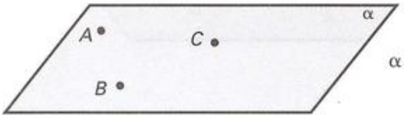


2. Determinação de um plano

Um plano pode ser determinado através de quatro casos fundamentais:

Primeiro caso

Três pontos não-colineares determinam um plano.

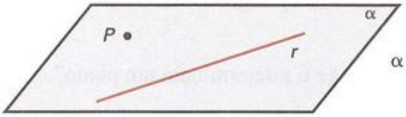


$\alpha \equiv \text{pl}\,(A, B, C)$

Lembre-se de que este primeiro caso é exatamente o postulado P.5.

Segundo caso

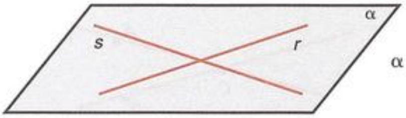
Uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, determinam um plano.



$\alpha \equiv \text{pl}\,(r, P)$

Terceiro caso

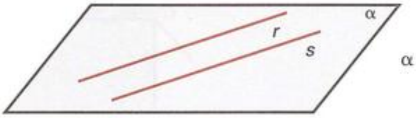
Duas retas concorrentes r e s determinam um plano.



$\alpha \equiv \text{pl}\,(r, s)$

Quarto caso

Duas retas paralelas **distintas** r e s determinam um plano.



$\alpha \equiv \text{pl}(r, s)$

Exercícios resolvidos

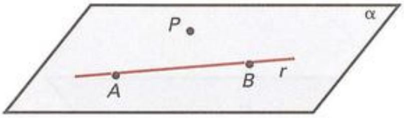
R.3 Demonstrar que "uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, determinam um plano".

Resolução

Lembremos que na palavra "determinam" estão implícitas a existência e a unicidade do plano. Portanto, devemos dividir a demonstração em duas partes: existência e unicidade.

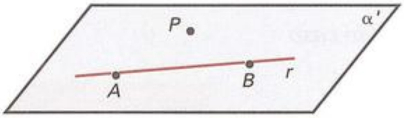
Primeira parte: existência

Sejam A e B dois pontos distintos de r. Como $P \notin r$, temos que A, B e P não são colineares e, portanto, esses três pontos determinam um plano α (P.5).
Pelo postulado P.6, temos ainda que $r \subset \alpha$.
Logo, existe um plano α que passa por r e por P.



Segunda parte: unicidade

Suponhamos que exista um outro plano α' que contenha r e P simultaneamente.



Temos então que A, B e P pertencem a α' e a α simultaneamente. Como A, B e P são pontos não-colineares, existe um único plano que passa por eles (P.5); logo, $\alpha \equiv \alpha'$.

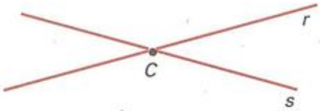
(c.q.d.)

R.4 Demonstrar que "duas retas concorrentes r e s determinam um plano".

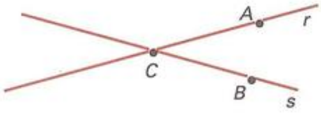
Resolução

Primeira parte: existência

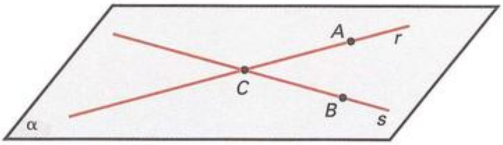
As retas r e s têm em comum um único ponto C:



Sejam os pontos A, $A \in r$, e B, $B \in s$, tais que $A \neq C$ e $B \neq C$:

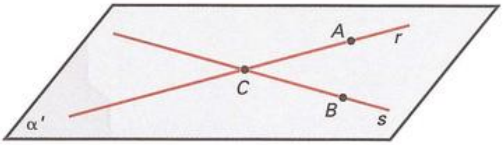


A, B e C não são colineares; logo, pelo postulado P.5, A, B e C determinam um plano α. Pelo postulado P.6, temos ainda que $r \subset \alpha$ (pois $\{A, C\} \subset r$ e $\{A, C\} \subset \alpha$) e $s \subset \alpha$ (pois $\{B, C\} \subset s$ e $\{B, C\} \subset \alpha$). Logo, existe um plano α que contém r e s.



Segunda parte: unicidade

Suponhamos que exista um outro plano α' que passe por r e s. Como $\{A, C\} \subset r$ e $\{B, C\} \subset s$, temos que α' passa pelos pontos A, B e C.



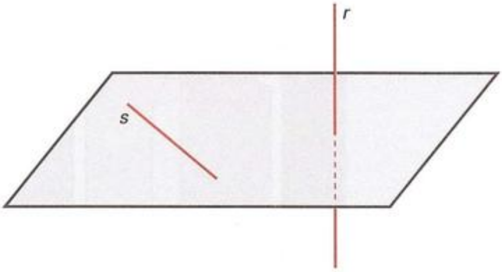
A, B e C são pontos não-colineares; logo, existe um único plano que passa por eles (P.5); portanto $\alpha \equiv \alpha'$.

(c.q.d.)

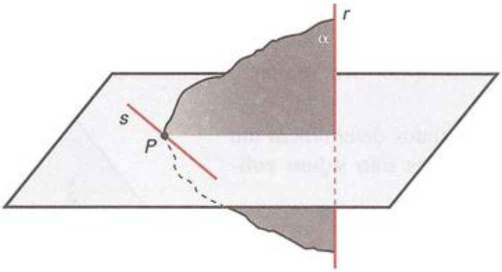
R.5 Justificar a seguinte afirmação: "por uma reta passam infinitos planos".

Resolução

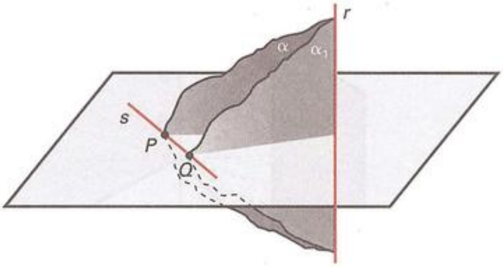
Sejam r e s duas retas reversas:



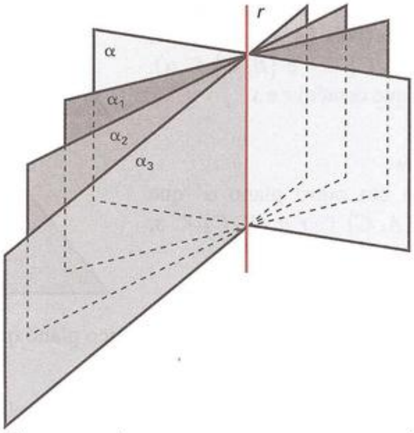
A reta r e um ponto P, $P \in s$, determinam um plano α:



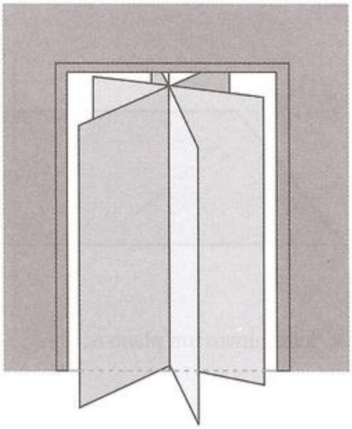
Note que $s \not\subset \alpha$, pois, sendo r e s reversas, não existe um plano que contenha ambas simultaneamente. Tomemos um ponto Q, $Q \in s$ e $Q \not\equiv P$. A reta r e o ponto Q determinam um novo plano α_1 ($\alpha_1 \not\equiv \alpha$):



Desse modo, podemos construir infinitos planos que passem por *r*:



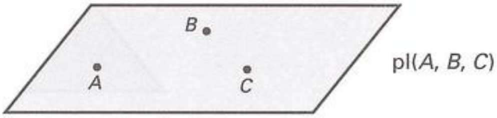
Para visualizar concretamente a figura anterior, pense em uma porta rotatória, daquelas usadas em bancos:



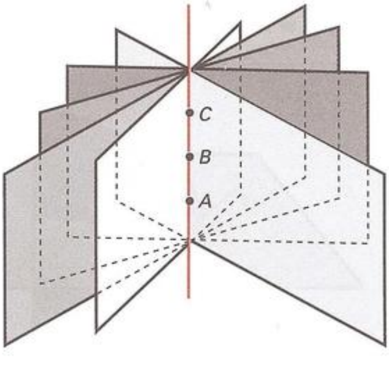
R.6 Justificar a seguinte afirmação: "nem sempre três pontos distintos determinam um plano".

Resolução

Para que três pontos distintos determinem um plano é necessário que eles **não sejam colineares.**

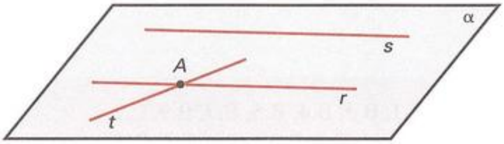


Se os pontos são colineares, então existem infinitos planos que passam por eles (exercício R.5).



R.7 Justificar a seguinte afirmação: "se r, s e t são retas coplanares tais que r e t são concorrentes e $r \parallel s$, então s e t são concorrentes".

Resolução



Se r e t são concorrentes, então existe um único ponto A comum a ambas.

Suponhamos que $t \parallel s$. Por hipótese temos que r, s e t são coplanares e $r \not\equiv t$ (pois r e t são concorrentes). Concluímos então que pelo ponto A passam duas retas distintas (r e t) paralelas a s, o que é um **absurdo** porque contraria o postulado P.15. Logo, t e s não podem ser paralelas. Sendo t e s retas coplanares e não-paralelas, resta apenas uma possibilidade: t e s são concorrentes.

(c.q.d.)

R.8 Demonstrar que "dois planos α e β são coincidentes se, e somente se, existem três pontos não-colineares A, B e C tais que $\{A, B, C\} \subset (\alpha \cap \beta)$.

Resolução

Todo teorema do tipo $p \Leftrightarrow q$ (isto é, p se, e somente se, q) deve ser demonstrado em duas partes: $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Primeira parte

"Se dois planos α e β são coincidentes, então existem três pontos não-colineares A, B e C tais que $\{A, B, C\} \subset (\alpha \cap \beta)$."

De fato, pelo postulado P.5, existem três pontos não-colineares A, B e C tais que $\{A, B, C\} \subset \alpha$. Como $\alpha \equiv \beta$, temos também que $\{A, B, C\} \subset \beta$. Logo, $\{A, B, C\} \subset (\alpha \cap \beta)$.

Segunda parte

"Se existem três pontos não-colineares A, B e C tais que $\{A, B, C\} \subset (\alpha \cap \beta)$, então os planos α e β são coincidentes."

De fato, se $\{A, B, C\} \subset (\alpha \cap \beta)$, então $\{A, B, C\} \subset \alpha$ e $\{A, B, C\} \subset \beta$.

Pelo postulado P.5, temos que por três pontos não-colineares passa um único plano. Como A, B e C não são colineares e pertencem simultaneamente a α e a β, temos que $\alpha \equiv \beta$.

(c.q.d.)

3. Resumo dos postulados e teoremas

Postulados

P.15 Dados uma reta r e um ponto A, existe uma única reta s que passa por A e é paralela a r.

P.5 Três pontos não-colineares determinam um plano (revisão).

Teoremas

T.4 Uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, determinam um plano.

T.5 Duas retas concorrentes r e s determinam um plano.

T.6 Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

T.7 Por uma reta passam infinitos planos.

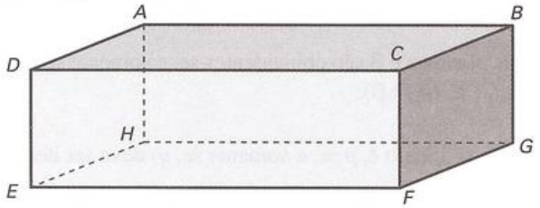
T.8 Se r, s e t são retas coplanares tais que r e t são concorrentes e $r \parallel s$, então s e t são concorrentes.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.7, B.9, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, B.8, B.10, C.1, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Tome como modelo a caixa de sapatos abaixo.



Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$.
b) $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HG}$.
c) $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{FG}$.
d) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são concorrentes.
e) $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
f) Existe um plano que contém as retas $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$.
g) $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
h) Existe um plano que contém as retas $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{BG}$.
i) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são concorrentes.
j) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são coplanares.
k) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são coplanares.
l) $D \in \text{pl}(A, B, C)$.
m) $F \notin \text{pl}(H, G, E)$.
n) $\text{pl}(A, B, C) \equiv \text{pl}(A, D, C)$.
o) $\text{pl}(A, B, C)$ e $\text{pl}(B, C, G)$ são secantes.
p) $\text{pl}(A, C, H) \not\equiv \text{pl}(H, C, F)$.

B.2 Classifique cada uma das seguintes afirmações como V ou F:

a) Se duas retas r e s são paralelas, então $r \cap s = \varnothing$.
b) Se duas retas r e s são paralelas distintas, então $r \cap s = \varnothing$.
c) Se duas retas r e s têm dois pontos distintos em comum, então $r \parallel s$.
d) Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
e) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
f) Duas retas coincidentes têm um único ponto comum.
g) Duas retas coincidentes têm um ponto comum.
h) Duas retas que têm um único ponto comum não são paralelas.
i) Duas retas que têm um ponto comum não são paralelas.
j) Duas retas reversas não têm ponto comum.
k) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
l) Existem retas r e s coplanares e reversas.
m) Duas retas coplanares são paralelas ou concorrentes.

n) Duas retas que não são paralelas são concorrentes.

o) Duas retas coplanares que não são paralelas são concorrentes.

B.3 Demonstre que "duas retas paralelas distintas determinam um plano".

B.4 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se as retas r e s são reversas, então existe uma reta t tal que $r \parallel t$ e $s \parallel t$.

b) Se duas retas são paralelas, então existe um plano que as contém.

c) Se r, s e t são retas tais que r é reversa a s e s é reversa a t, então r é reversa a t.

d) Se a, b, r e s são retas coplanares tais que $a \parallel r$, $b \parallel s$, com a e b concorrentes, então r e s são concorrentes.

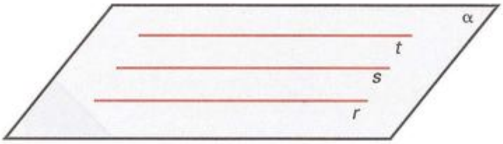
e) Se r e s são retas reversas e um ponto P pertence a r, então existe uma reta que passa por P e é paralela a s.

f) Se r e s são retas reversas e um ponto P pertence a r, então existe uma reta que passa por P e intercepta s.

g) Se a, b e c são retas tais que a é reversa a b e b concorre com c, então a é reversa a c.

h) Dados uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, existe uma única reta s que passa por P e é reversa a r.

B.5 Demonstre que, "se r, s e t são retas coplanares, com $r \parallel s$ e $r \parallel t$, então $s \parallel t$".



B.6 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Três pontos distintos determinam um plano.

b) Três pontos não-colineares determinam um plano.

c) Uma reta r e um ponto P determinam um plano.

d) Uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, determinam um plano.

e) Duas retas determinam um plano.

f) Duas retas concorrentes determinam um plano.

g) Duas retas paralelas determinam um plano.

h) Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

B.7 Três retas r, s e t, distintas entre si e concorrentes duas a duas, são necessariamente coplanares? Justifique sua resposta.

B.8 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Três retas paralelas distintas entre si são sempre coplanares.

b) Três retas paralelas distintas podem ser coplanares.

c) Se r, s e t são retas distintas entre si e concorrentes duas a duas, então r, s e t são coplanares.

d) Se r, s e t são retas concorrentes duas a duas em pontos distintos entre si, então r, s e t são coplanares.

e) Duas retas concorrentes e um ponto que não pertence a nenhuma delas são coplanares.

f) Quatro retas distintas entre si podem concorrer, duas a duas, em seis pontos distintos.

B.9 Quantos planos existem passando por três quaisquer dentre quatro pontos não-coplanares A, B, C e D?

B.10 Justifique a seguinte afirmação: "se r, s e t são retas tais que $r \parallel s$, r concorre com t e s concorre com t, então r, s e t são coplanares".

Exercícios complementares

C.1 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se r, s e t são retas tais que r é reversa a s e r é paralela a t, então s é reversa a t.

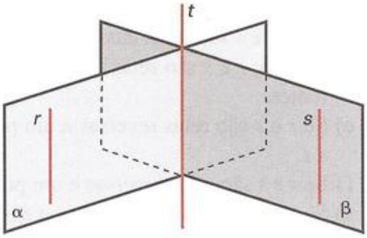
b) Se r, s e t são retas não-coplanares tais que $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$.

c) Se três retas r, s e t concorrem num mesmo ponto, então r, s e t são coplanares.

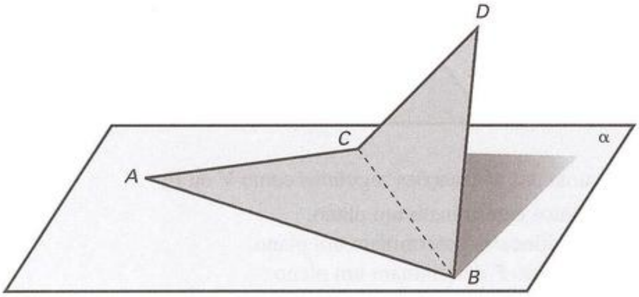
d) Se r, s e t são retas tais que r é reversa a s, s é reversa a t e r é reversa a t, então existe uma única reta que intercepta r, s e t simultaneamente.

e) Se α e β são planos secantes cuja reta comum é r, e a reta s contida em α é distinta de r, então existe uma reta contida em β e reversa a s.

C.2 Se α e β são planos secantes cuja reta comum é t, e as retas r, $r \subset \alpha$, e s, $s \subset \beta$, são tais que $r \parallel t$ e $s \parallel t$, então qual é a posição relativa das retas r e s?

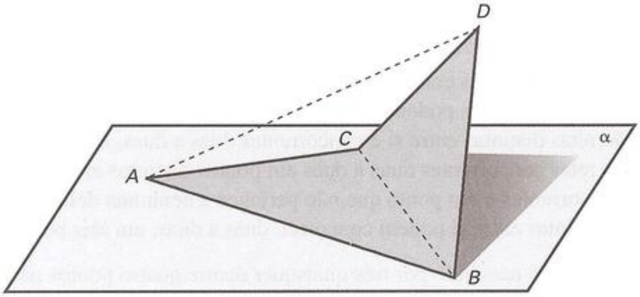


C.3 **Definição 1:** quadrilátero **reverso** é todo aquele cujos quatro vértices **não são coplanares.**



$\{A, B, C\} \subset \alpha$ e $D \notin \alpha \Rightarrow ABCD$ é quadrilátero reverso.

Definição 2: diagonal de um polígono é todo segmento cujos extremos são vértices **não-consecutivos** do polígono.



$\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ são diagonais do quadrilátero $ABCD$.

Prove que "as retas que contêm as diagonais de um quadrilátero reverso são reversas".

C.4 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Dois planos α e β são coincidentes se, e somente se, possuem em comum um par de retas concorrentes.

b) Duas retas são paralelas se, e somente se, são coplanares.

c) Três pontos determinam um plano se, e somente se, não são colineares.

d) Dois planos α e β são secantes se, e somente se, são distintos.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

a) Se duas retas distintas não são paralelas, então elas são concorrentes.
b) Duas retas não-coplanares são reversas.
c) Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, então elas são paralelas.
d) Se três retas são paralelas, então existe um plano que as contém.
e) Se três retas distintas são concorrentes duas a duas, então elas determinam um plano.

V.2 (FEI-SP) Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:

a) duas retas distintas.
b) uma reta e um ponto.
c) duas retas reversas.
d) duas retas concorrentes.
e) n.r.a.

V.3 (UFRS) Assinale a afirmação verdadeira:

a) Quatro pontos quaisquer são sempre coplanares.
b) Existe um único plano que passa por três pontos distintos entre si.
c) Se dois planos têm uma reta comum, então eles são secantes.
d) Dois planos distintos são secantes se, e somente se, tiverem uma única reta em comum.
e) Uma reta e um plano podem ter dois e apenas dois pontos distintos em comum.

V.4 (EESCUSP) Dadas quatro retas a, b, c, d no espaço, duas a duas concorrentes, então:

a) a, b, c, d são sempre coplanares.
b) a, b, c, d passam sempre por um mesmo ponto.
c) ou a, b, c, d são coplanares, ou passam por um mesmo ponto.
d) a, b, c, d formam um quadrilátero.
e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

V.5 (Fuvest-SP, modificado)

a) Defina retas paralelas.
b) Sejam r e s duas retas paralelas distintas e P um ponto não-pertencente ao plano pl(r, s). Prove que a reta t, intersecção dos planos pl(P, r) e pl(P, s), é paralela a r e s.

Capítulo 43

Retas e planos

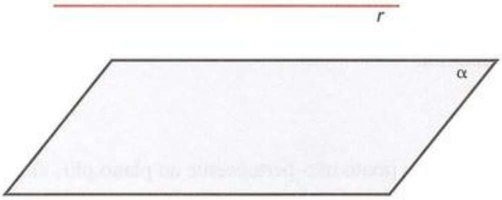
1. Posições relativas entre reta e plano

1.1. Reta paralela a plano

Definição

Uma reta r e um plano α são paralelos se, e somente se, não têm nenhum ponto em comum.

Indicamos que r é paralela a α pelo símbolo $r \,/\!/\, \alpha$.



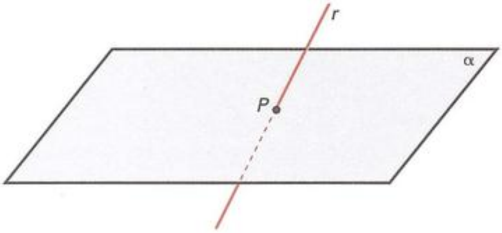
$r \,/\!/\, \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \varnothing$

Nota: dizemos que um segmento de reta $\overline{AB}$ é paralelo a um plano α se, e somente se, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a α.

1.2. Reta secante (ou concorrente) a plano

Definição

Uma reta r e um plano α são secantes (ou concorrentes) se, e somente se, têm um único ponto em comum.



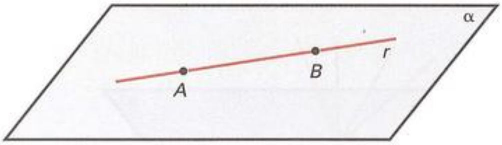
r é secante a $\alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \{P\}$

1.3. Reta contida em plano

Definição

> Uma reta r está contida num plano α se, e somente se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.

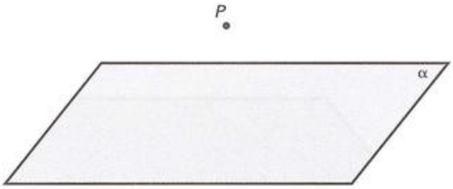
Lembre-se de que o postulado P.6 garante que, "se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então $r \subset \alpha$".



$r = \overleftrightarrow{AB},\ r \subset \alpha \Leftrightarrow A \in \alpha,\ B \in \alpha$

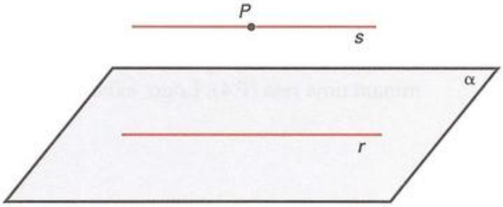
Exercícios resolvidos

R.1 São dados um plano α e um ponto P, $P \notin \alpha$. Mostrar que existe pelo menos uma reta que passa por P e é paralela a α.

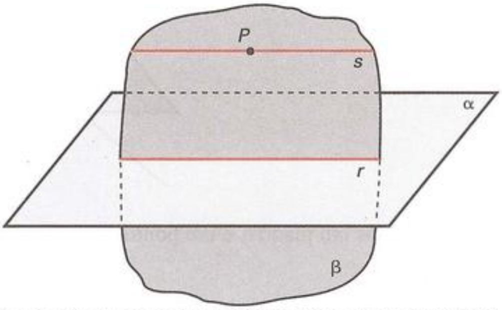


Resolução

Seja r uma reta contida em α. Como $P \notin \alpha$, temos também que $P \notin r$. Pelo postulado das paralelas (P.15), existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r:



Vamos provar que $s \cap \alpha = \varnothing$. Como s e r são paralelas distintas, pois $P \in s$ e $P \notin r$, elas determinam um plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$:



Os planos α e β são distintos, pois $P \in \beta$ e $P \notin \alpha$, e têm a reta r em comum. De acordo com o postulado P.7, $\alpha \cap \beta = r$. Assim, se s tivesse ponto em comum com α, esse ponto deveria pertencer a r. Mas, como r e s são paralelas distintas, esse ponto não existe. Logo, s não tem ponto em comum com α, ou seja, $s \not\parallel \alpha$.

(c.q.d.)

Nota: pelo ponto P, $P \notin \alpha$, podemos traçar infinitas retas paralelas a α.

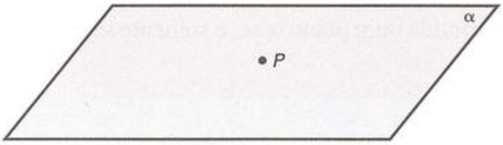
R.2 São dados um plano α e um ponto P. Mostrar que existem infinitas retas passando por P e secantes a α.

Resolução

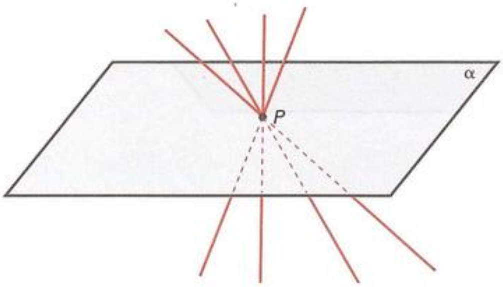
Consideremos dois casos.

Primeiro caso

$P \in \alpha$

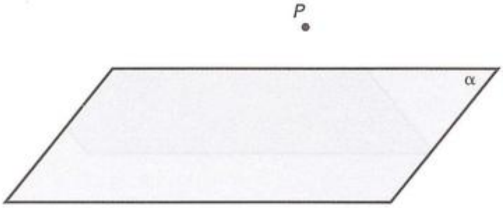


Pelo postulado P.3, existem infinitos pontos que não pertencem a α. Cada um desses pontos e o ponto P determinam uma reta (P.4). Logo, existem infinitas retas secantes a α em P:

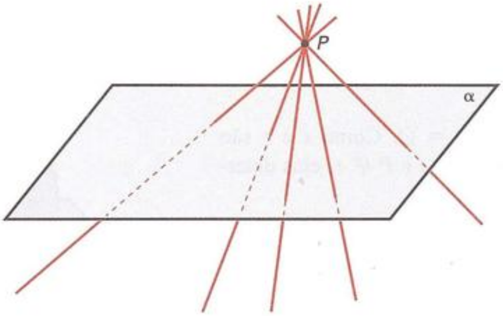


Segundo caso

$P \notin \alpha$

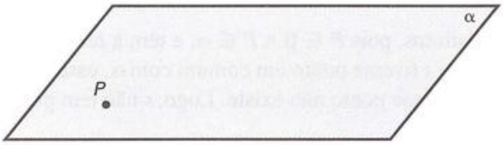


Pelo postulado P.3, o plano α é um conjunto de infinitos pontos. Cada um desses pontos e o ponto P determinam uma reta (P.4). Logo, existem infinitas retas secantes a α que passam por P.



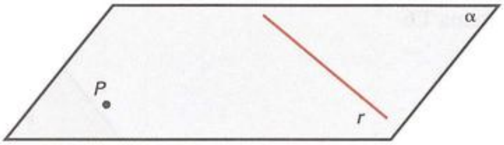
(c.q.d.)

R.3 Dados um plano α e um ponto P, $P \in \alpha$, quantas retas passam por P e estão contidas em α?

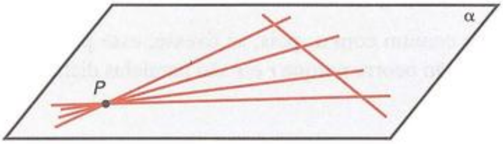


Resolução

Seja $r \subset \alpha$ tal que $P \notin r$:



A reta r é um conjunto de infinitos pontos (P.2). Cada um desses pontos e o ponto P determinam uma reta contida em α (P.4 e P.6). Logo, existem infinitas retas contidas em α e passando por P:

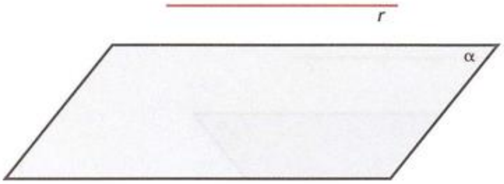


R.4 Dados um plano α e um ponto P, $P \in \alpha$, quantas retas passam por P e são paralelas a α?

Resolução

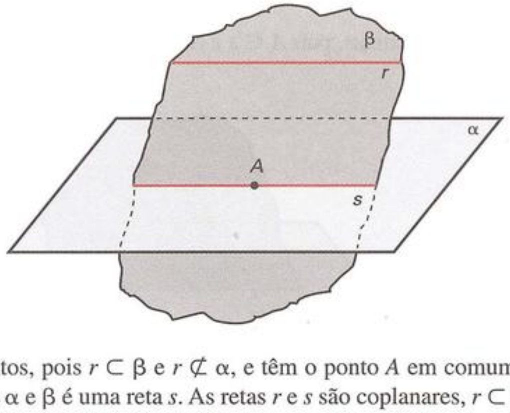
Para que uma reta r seja paralela a α, devemos ter $r \cap \alpha = \varnothing$. Como $P \in \alpha$, **nenhuma** reta que passe por P será paralela a α, pois P é um ponto comum a α e a qualquer reta que passe por ele.

R.5 Provar que, "se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a uma reta s contida em α".



Resolução

Seja A um ponto qualquer pertencente a α. Como $A \notin r$, temos determinado o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, A)$.



Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm o ponto A em comum; logo, pelo postulado P.7, temos que a intersecção de α e β é uma reta s. As retas r e s são coplanares, $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, e não têm ponto comum, pois $r \cap \alpha = \varnothing$ e $s \subset \alpha$; logo, r é paralela a s.

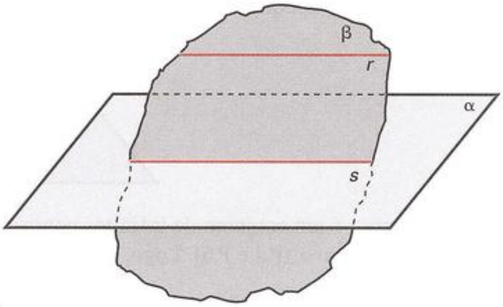
(c.q.d.)

Nota: como o ponto A é qualquer ponto de α, temos que existem infinitas retas contidas em α e paralelas a r.

R.6 Provar que, "se uma reta r não está contida num plano α e é paralela a uma reta s contida em α, então r é paralela a α".

Resolução

As retas r e s são paralelas distintas, pois $r \parallel s$, $r \not\subset \alpha$ e $s \subset \alpha$. Logo, fica determinado o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$, pelo teorema T.6.



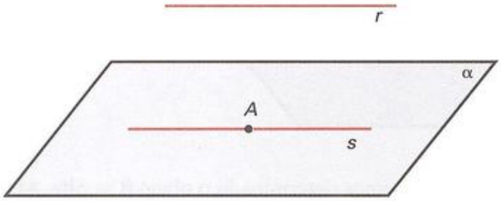
A reta r não tem ponto comum com α, pois, se tivesse, esse ponto pertenceria a s, já que r e s são coplanares e $s \subset \alpha$, mas isso não ocorre porque r e s são paralelas distintas. Logo, $r \parallel \alpha$.

(c.q.d.)

Nota: os exercícios R.5 e R.6 demonstraram que:

Uma reta r, não contida num plano α, é paralela a α se, e somente se, é paralela a uma reta s contida em α.

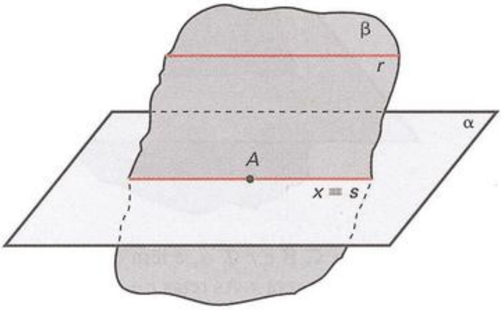
R.7 Demonstrar que, "se uma reta r é paralela a um plano α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α".



$$\begin{cases} r \parallel s \\ A \in \alpha \\ A \in s \\ s \parallel r \end{cases} \Rightarrow s \subset \alpha.$$

Resolução

As retas r e s são paralelas distintas, pois $A \in s$ e $A \notin r$; logo, determinam o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$, pelo teorema T.6.



Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm o ponto A em comum; logo, α e β são secantes e, portanto, têm em comum uma única reta x. Vamos provar que $x \equiv s$.

As retas x e r são coplanares, $x \subset \beta$ e $r \subset \beta$, e não têm ponto comum, pois $r \cap \alpha = \varnothing$ e $x \subset \alpha$; logo, $r \parallel x$.

Pelo postulado das paralelas (P.15), existe uma única reta que passa por A e é paralela a r; logo, como as retas x e s passam por A e são paralelas a r, temos que $x \equiv s$. Como $x \subset \alpha$, concluímos que $s \subset \alpha$.

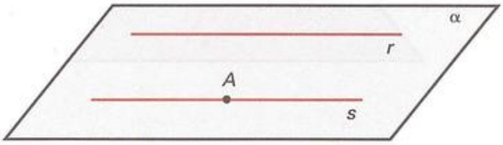
(c.q.d.)

R.8 Provar que, "se uma reta r está contida em um plano α e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α".

Resolução

Se $A \in r$, então $s \equiv r$; logo, $s \subset \alpha$.

Se $A \notin r$, temos que r e s são paralelas distintas, pois $A \notin r$ e $A \in s$.



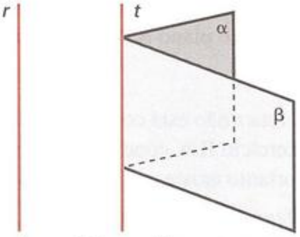
As retas r e s determinam o plano $\alpha' \equiv \text{pl}(r, s)$, pelo T.6. A reta r e o ponto A determinam o plano $\alpha \equiv \text{pl}(r, A)$, pelo T.4. Como $A \in s$ e o plano que passa por r e A é único, temos que $\alpha' \equiv \text{pl}(r, A)$. Logo, $\alpha' \equiv \alpha$ e, portanto, $s \subset \alpha$.

(c.q.d.)

Os teoremas apresentados nos exercícios R.7 e R.8 podem ser enunciados através de uma única proposição:

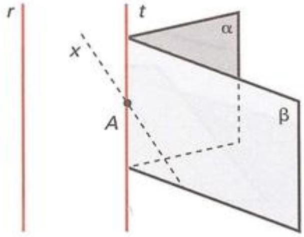
> Se uma reta r é paralela a um plano α ou está contida em α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

R.9 Provar que, "se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta t comum a α e β".



Resolução

Seja A um ponto pertencente à reta t e seja x a reta que passa por A e é paralela a r. Vamos provar que $x \equiv t$.



Temos então:

$$\begin{cases} r \parallel \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in x \\ x \parallel r \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r \parallel \beta \\ A \in \beta \\ A \in x \\ x \parallel r. \end{cases}$$

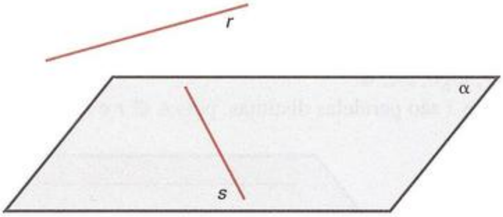
Pelo exercício R.7 concluímos que $x \subset \alpha$ e $x \subset \beta$.

Como α e β são secantes, temos que $x = \alpha \cap \beta = t$.

Portanto $r \parallel t$.

(c.q.d.)

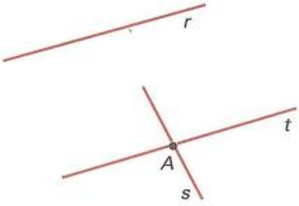
R.10 Provar que, "se r e s são retas reversas, então existe um único plano α que contém s e é paralelo a r".



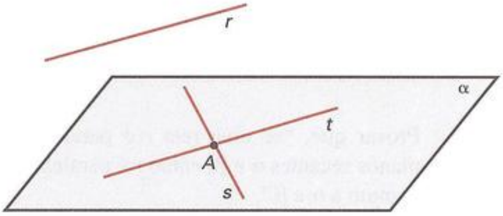
Resolução

Primeira parte: existência

Seja A um ponto pertencente à reta s e seja t a reta paralela a r que passa por A.



As retas s e t têm apenas o ponto A em comum, pois, se tivessem mais um ponto comum, então seriam coincidentes, e, como $t \parallel r$, teríamos $s \parallel r$, o que contraria o fato de r e s serem reversas. Como s e t são concorrentes, fica determinado o plano $\alpha \equiv \text{pl}(s, t)$, pelo teorema T.5.

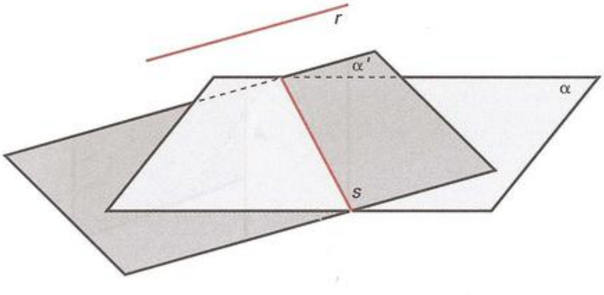


A reta r não está contida em α, pois r e s são reversas e $s \subset \alpha$; r é paralela à reta t contida em α. Logo, pelo exercício R.6, concluímos que $r \parallel \alpha$.

Portanto existe um plano α que contém s e é paralelo a r.

Segunda parte: unicidade

Suponhamos que exista um outro plano α', $\alpha' \not\equiv \alpha$, que contenha s e seja paralelo a r.



α' e α são secantes e sua reta comum é s. A reta r é paralela a α e é paralela a α'. Assim, pelo exercício R.9, temos que $r \parallel s$, o que é um **absurdo**, pois r e s são reversas. Logo, existe apenas um plano α que passa por s e é paralelo a r.

(c.q.d.)

2. Resumo dos teoremas apresentados

T.9 Se um ponto P não pertence a um plano α, então existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a α.

T.10 Por um ponto P passam infinitas retas secantes a um plano α.

T.11 Por um ponto P pertencente a um plano α passam infinitas retas contidas em α.

T.12 Uma reta r, não contida num plano α, é paralela a α se, e somente se, é paralela a uma reta s contida em α.

T.13 Se uma reta r é paralela a um plano α ou está contida em α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

T.14 Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta t comum a α e β.

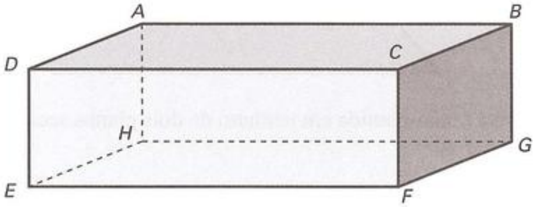
T.15 Se r e s são retas reversas, então existe um único plano α que contém s e é paralelo a r.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.7, B.8, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.9, B.10, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Tome como modelo a caixa de sapatos abaixo.



Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \text{pl}(F, G, H)$.
b) $\overleftrightarrow{AC} \parallel \text{pl}(F, G, H)$.
c) $\overleftrightarrow{AC} \parallel \text{pl}(B, C, G)$.
d) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \text{pl}(D, C, F)$.
e) $\overleftrightarrow{AB} \subset \text{pl}(H, G, B)$.
f) $\overleftrightarrow{EF} \subset \text{pl}(F, G, B)$.
g) $\overleftrightarrow{DC}$ é secante ao plano $\text{pl}(B, G, F)$.
h) $\overleftrightarrow{AD}$ é secante ao plano $\text{pl}(H, G, F)$.
i) $\overleftrightarrow{EB}$ é secante ao plano $\text{pl}(B, G, F)$.
j) $\{F\} = \overleftrightarrow{CF} \cap \text{pl}(H, G, F)$.
k) $\overleftrightarrow{DE} \subset \text{pl}(A, H, C)$.
l) $\overleftrightarrow{DE} \parallel \text{pl}(A, H, C)$.

B.2 Demonstre que, "se uma reta r é paralela a um plano α, então existe pelo menos um plano β que contém r e é secante a α".

B.3 Demonstre que, "se uma reta r é secante a um plano α, então existe pelo menos um plano β que contém r e é secante a α".

B.4 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

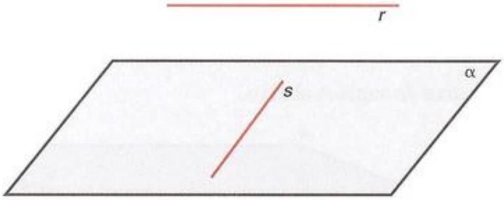
a) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a todas as retas contidas em α.
b) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a infinitas retas contidas em α.
c) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a uma única reta contida em α.
d) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a uma reta contida em α.
e) Se uma reta r está contida num plano α, então r é paralela a α.
f) Dado um plano α e um ponto P, $P \notin \alpha$, existe uma única reta que passa por P e é paralela a α.
g) Se uma reta r está contida num plano α e uma reta s é secante a α num ponto P, $P \in r$, então a intersecção do plano α com o plano pl(r, s) é a reta r.
h) Se uma reta não é paralela a um plano, então é secante a esse plano.
i) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.
j) Se um ponto A não pertence a uma reta r, então existem infinitos planos que passam por A e são paralelos a r.

B.5 Uma reta r é concorrente com uma reta s, s contida num plano α. Qual é a posição da reta r em relação ao plano?

B.6 Uma reta r é paralela a um plano α e uma reta s está contida em α. Qual é a posição relativa de r e s?

B.7 Uma reta r é paralela a uma reta s, s contida num plano α. Qual é a posição da reta r em relação ao plano α?

B.8 Demonstre que, "se uma reta r é paralela a um plano α e uma reta s, $s \subset \alpha$, não é paralela a r, então s é reversa a r".



B.9 Prove que, "se uma reta r, não-contida em nenhum de dois planos secantes α e β, é paralela à reta t comum a α e β, então $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$".

B.10 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se uma reta e um plano são secantes, então têm um ponto comum.
b) Se uma reta e um plano têm um ponto comum, então são secantes.
c) Se uma reta e um plano têm um único ponto comum, então são secantes.
d) Dadas duas retas reversas r e s, existe um plano que contém r e é paralelo a s.
e) Se duas retas r e s são reversas e um plano α contém r, então s é secante a α.
f) Se r e s são retas reversas, então existe um plano α paralelo a ambas.
g) Se r e s são retas reversas e t é uma reta paralela a r e concorrente com s, então o plano pl(t, s) é paralelo a r.

Exercícios complementares

C.1 Demonstre que, "se r e s são retas reversas, e um ponto A, $A \notin r$ e $A \notin s$, é tal que $s \parallel$ pl(r, A), então não existe uma reta que passa por A e é concorrente a r e s simultaneamente".

C.2 Demonstre que, "se r e s são retas reversas e um ponto A, $A \notin r$ e $A \notin s$, é tal que pl(r, A) não é paralelo a s e pl(s, A) não é paralelo a r, então existe uma reta que passa por A e é concorrente com r e s simultaneamente".

C.3 Duas retas r e s são paralelas e r é secante a um plano α. Qual é a posição da reta s em relação a α?

C.4 Dois planos distintos α e β são paralelos. Podemos afirmar que toda reta paralela a α é paralela a β? Por quê?

C.5 Dois planos α e β são secantes e a reta comum a ambos é *t*. Podemos afirmar que toda reta *r* secante a α e β simultaneamente é reversa a *t*? Por quê?

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Se a reta *r* é paralela ao plano α, então:

a) todas as retas de α são paralelas a *r*.
b) a reta *r* não é coplanar com nenhuma reta de α.
c) existem em α retas paralelas a *r* e também existem em α retas reversas a *r*.
d) existem em α retas paralelas a *r* e retas concorrentes com *r*.
e) a reta *r* pode estar contida em α.

V.2 (Cescea) Assinalar a afirmação falsa:

a) Um plano fica determinado por duas retas paralelas distintas.
b) Por um ponto do espaço existe uma única reta paralela a uma reta dada.
c) Toda reta não-contida num plano e paralela a uma reta contida nesse plano é paralela ao plano.
d) Por um ponto não-pertencente a um plano existe uma única reta paralela a esse plano.
e) Se duas retas são paralelas, então todo o plano secante a uma delas também é secante à outra.

V.3 (Mackenzie-SP) *r* e *r'* são retas reversas. O número de planos paralelos a *r* que passam por *r'* é:

a) dois.
b) um.
c) infinitos.
d) nenhum.
e) Nenhuma das respostas anteriores é correta.

Capítulo 44

Planos

1. Posições relativas entre dois planos

1.1. Planos paralelos

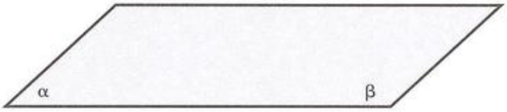
Definição

Dois planos α e β são paralelos se, e somente se:
I. $\alpha \equiv \beta$ (planos paralelos coincidentes) ou
II. α e β não têm ponto em comum (planos paralelos distintos).

Indicamos que α é paralelo a β pelo símbolo $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.

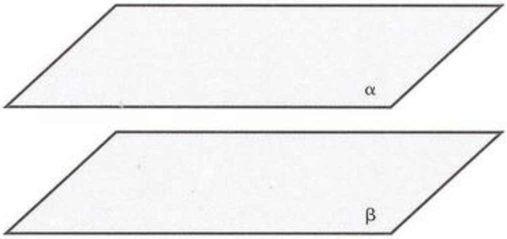
Temos que $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$ se, e somente se:

$\alpha \equiv \beta$



ou

$\alpha \cap \beta = \varnothing$



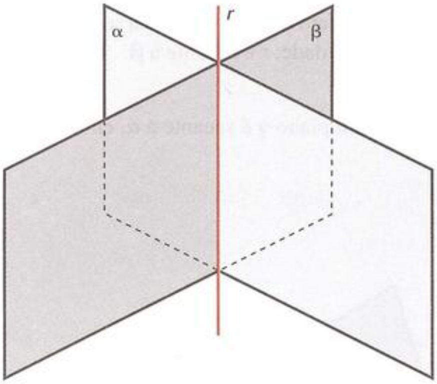
Nota: dizemos que uma figura plana *F* é paralela a um plano α se, e somente se, o plano que contém *F* é paralelo a α.

1.2. Planos secantes

Estudamos no capítulo 40 a definição de planos secantes.

Recordando:

Dois planos α e β são secantes se, e somente se, têm uma única reta em comum.



$\alpha \cap \beta = r \Leftrightarrow \alpha$ e β são secantes.

Lembre-se também de que o postulado P.7 nos garante que, "se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta".

Exercícios resolvidos

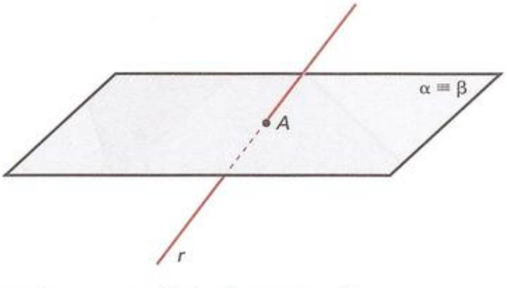
R.1 Demonstrar que, "se dois planos α e β são paralelos e uma reta r é secante a α, então r é secante a β".

Resolução

Consideremos dois casos.

Primeiro caso

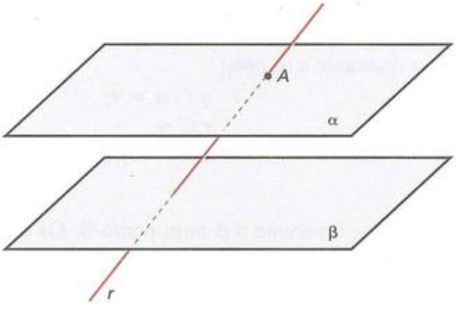
$\alpha \equiv \beta$ (planos paralelos coincidentes).



Esse caso é imediato: r é secante a α e $\alpha \equiv \beta \Rightarrow r$ é secante a β.

Segundo caso

α e β são planos paralelos distintos.



Se r é secante a α, então existe um único ponto A que pertence a r e a α, ou seja, $r \cap \alpha = \{A\}$. Temos ainda que:

- r não está contida em β, pois $A \in r$ e $A \notin \beta$;
- r não é paralela a β, pois se assim fosse teríamos uma reta r' tal que:

$$r' \subset \beta, r' \parallel r, A \in r, A \in \alpha.$$

Pelo teorema T.13, teríamos $r \subset \alpha$, o que contraria o fato de r ser secante a α. Ora, se r não está contida em β e não é paralela a β, então resta uma única possibilidade: r é secante a β.

(c.q.d.)

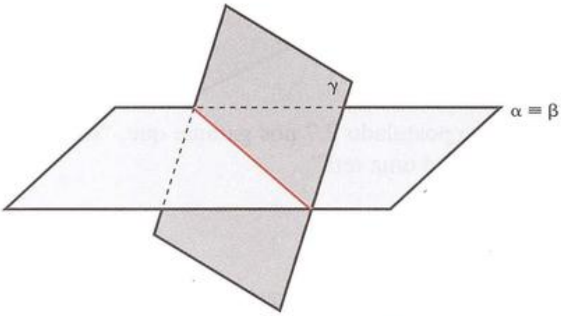
R.2 Demonstrar que, "se α e β são planos paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β".

Resolução

Consideremos dois casos.

Primeiro caso

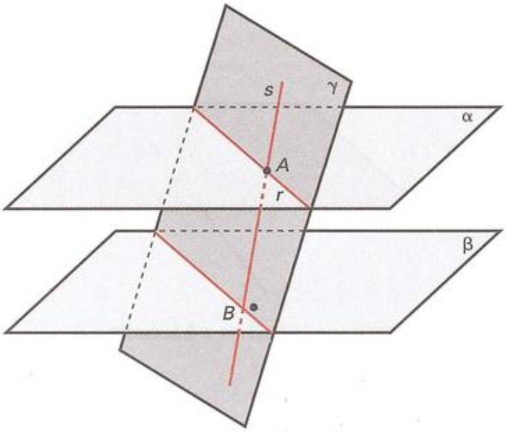
$\alpha \equiv \beta$ (planos paralelos coincidentes).



Esse caso é imediato: se γ é secante a α e $\alpha \equiv \beta$, então γ é secante a β.

Segundo caso

α e β são planos paralelos distintos.



Se γ é secante a α, então existe uma única reta r tal que $\gamma \cap \alpha = r$. Seja uma reta s, $s \subset \gamma$ e concorrente com r no ponto A. A reta s é secante a α, pois:

$$\gamma \cap \alpha = r,$$
$$s \subset \gamma,$$
$$s \cap r = \{A\}.$$

Logo, $s \cap \alpha = \{A\}$.

Pelo exercício R.1, temos que s é secante a β num ponto B. Os planos γ e β são distintos, pois $A \in \gamma$ e $A \notin \beta$, e têm o ponto B em comum. Logo, pelo postulado P.7, γ é secante a β.

(c.q.d.)

R.3 Demonstrar que, "dados um plano α e um ponto P, existe um plano β que passa por P e é paralelo a α".

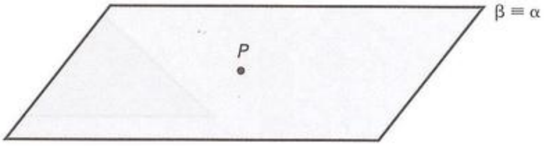
Resolução

Consideremos dois casos.

Primeiro caso

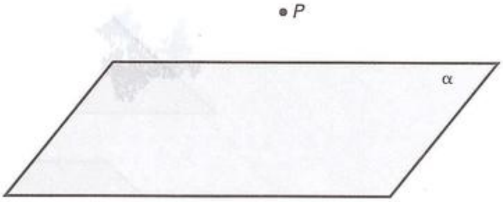
$P \in \alpha$

Esse caso é imediato, pois basta considerar β tal que $\beta \equiv \alpha$. Assim, existe β, $\beta \equiv \alpha$, tal que $\beta /\!\!/ \alpha$ (planos paralelos coincidentes) e $P \in \beta$.

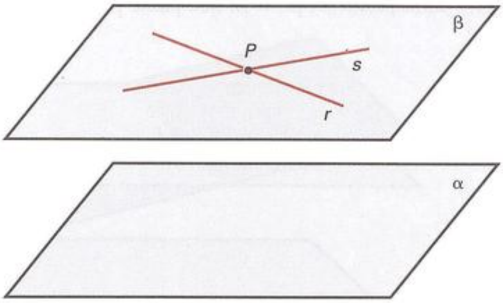


Segundo caso

$P \notin \alpha$



Sejam as retas r e s concorrentes em P e paralelas a α. Vamos mostrar que o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$ não tem ponto em comum com α.



Suponhamos que exista um ponto comum a α e β. Como α e β são planos distintos, pois $P \in \beta$ e $P \notin \alpha$, se existir um ponto comum a ambos, então o postulado P.7 nos garante que esses planos terão uma única reta t em comum. As retas r, s e t serão coplanares, pois todas estarão contidas em β. Porém r e s são paralelas a α, ou seja, não têm ponto em comum com α e, portanto, não podem ter ponto em comum com t, pois $t \subset \alpha$. Resumindo: r, s e t são coplanares tais que $r \cap t = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$. Assim, temos que pelo ponto P passam duas retas distintas, r e s, paralelas a t, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas (P.15). Logo, os planos α e β não têm ponto comum. Portanto α e β são paralelos.

(c.q.d.)

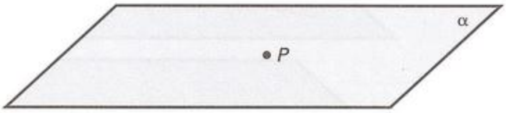
R.4 Provar que, "dados um plano α e um ponto P, existe e é único o plano β que passa por P e é paralelo a α".

Resolução

No exercício R.3, provamos a existência do plano β. Vamos provar a unicidade de β.

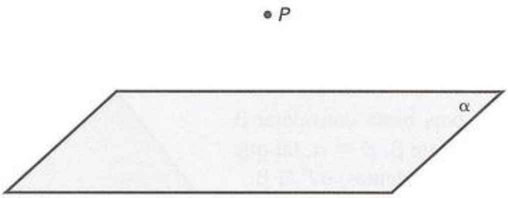
Primeiro caso

$P \in \alpha$

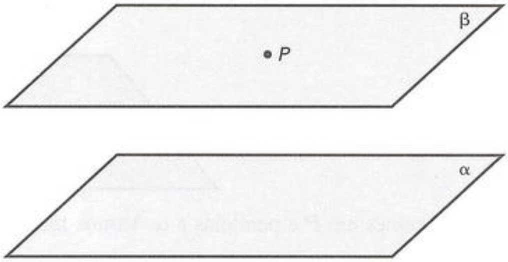


O plano β, $\beta \equiv \alpha$, passa por P e é paralelo a α. Suponhamos que exista um outro plano β', $\beta' \not\equiv \beta$, que passe por P e seja paralelo a α. Como β e β' são planos distintos e têm o ponto P em comum, o postulado P.7 nos garante que β e β' são secantes. Porém $\beta \equiv \alpha$; logo, α e β' são secantes, o que é absurdo porque $\beta' /\!\!/ \alpha$. Concluímos então que o plano β é único.

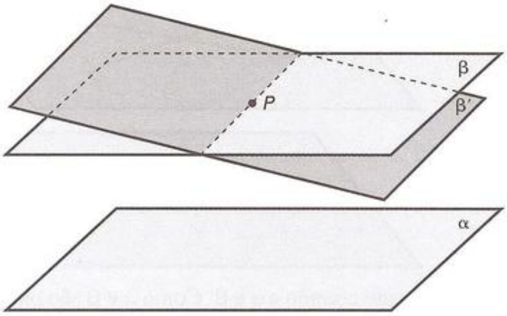
Segundo caso
$P \notin \alpha$



Seja β um plano que passa por P e é paralelo a α.



Suponhamos que exista outro plano β′, β′ ≢ β, que passe por P e seja paralelo a α:



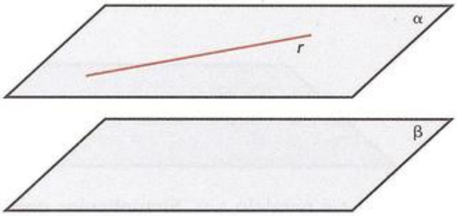
Como β e β′ são planos distintos e têm o ponto P em comum, o postulado P.7 nos garante que β e β′ são secantes. Porém, se β // α e β′ é secante a β, então, pelo exercício R.2, β′ é secante a α, o que é **absurdo**, pois β′ é paralelo a α. Concluímos então que existe um único plano β passando por P e paralelo a α.

(c.q.d.)

Os exercícios R.3 e R.4 provaram o importante teorema:

Dados um plano α e um ponto P, existe e é único o plano β que passa por P e é paralelo a α.

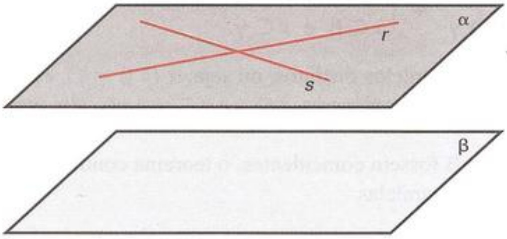
R.5 Provar que, "se dois planos distintos α e β são paralelos, então toda reta r, contida em α, é paralela a β".



Resolução
Como $\alpha \cap \beta = \varnothing$ e a reta r está contida em α, concluímos que $r \cap \beta = \varnothing$, ou seja, r é paralela a β.

(c.q.d.)

R.6 Demonstrar que "dois planos distintos α e β são paralelos se, e somente se, existem retas concorrentes *r* e *s* contidas num deles e paralelas ao outro".



Resolução

Todo teorema do tipo $p \Leftrightarrow q$ (isto é, *p* se, e somente se, *q*) deve ser demonstrado em duas partes: $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Primeira parte

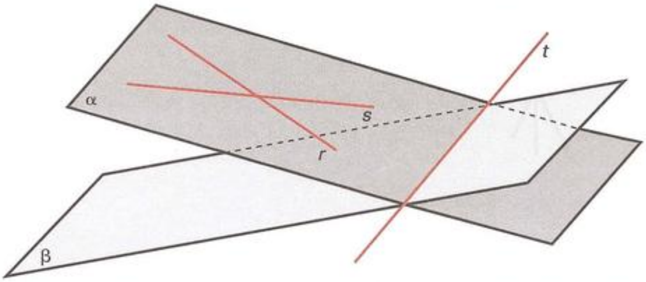
Se α e β são planos paralelos distintos, então existem retas concorrentes *r* e *s* contidas num deles e paralelas ao outro.

De fato, pelo exercício R.5 temos que, se α é paralelo a β e $\alpha \not\equiv \beta$, então toda reta contida em α é paralela a β. Assim, duas retas concorrentes quaisquer contidas em α são paralelas a β.

Segunda parte

Se um plano α contém retas concorrentes *r* e *s*, paralelas a um plano β, então $\alpha \parallel \beta$.

De fato, por hipótese, existem retas concorrentes *r* e *s* contidas em α e paralelas a β. Como α e β são planos distintos, temos que ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas: α é secante a β ou $\alpha \parallel \beta$. Suponhamos que α seja secante a β. Então α e β têm uma única reta *t* em comum:



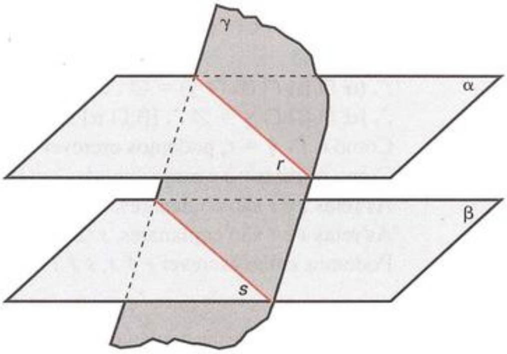
As retas *r* e *s* não podem ter ponto em comum com *t*, pois *r* e *s* não têm ponto comum com β, e $t \subset \beta$. Temos, então, que:

- *r* e *t* são coplanares, pois $r \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$, e não têm ponto comum; logo, $r \parallel t$;
- *s* e *t* são coplanares, pois $s \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$, e não têm ponto comum; logo, $s \parallel t$.

Essas conclusões são **absurdas**, pois teríamos duas retas concorrentes *r* e *s* paralelas à reta *t*, o que contraria o postulado das paralelas (P.15). Concluímos então que $\alpha \parallel \beta$.

(c.q.d.)

R.7 Justificar a seguinte afirmação: "se um plano γ é secante a dois planos paralelos distintos α e β, então as retas *r*, $r = \alpha \cap \gamma$, e *s*, $s = \beta \cap \gamma$, são paralelas".



Resolução

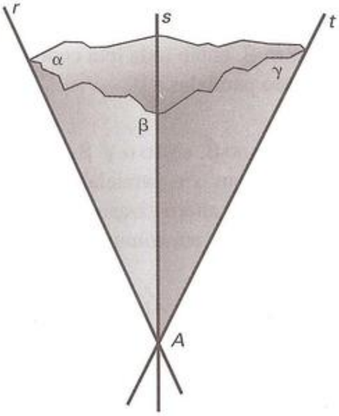
Temos que $\begin{cases} r = \alpha \cap \gamma \\ s = \beta \cap \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \subset \alpha \text{ e } r \subset \gamma \\ s \subset \beta \text{ e } s \subset \gamma. \end{cases}$

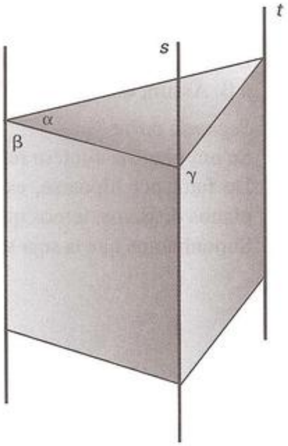
Como α e β são planos paralelos distintos, ou seja, $\alpha \cap \beta = \varnothing$, e, ainda, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, concluímos que $r \cap s = \varnothing$. As retas r e s são coplanares, $r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma$, e não têm ponto comum. Logo, $r \parallel s$.

(c.q.d.)

Nota: se os planos α e β fossem coincidentes, o teorema continuaria verdadeiro, pois as retas r e s seriam coincidentes e, portanto, paralelas.

R.8 Provar que, "se α, β e γ são planos secantes dois a dois, com $\alpha \cap \beta = r$, $\beta \cap \gamma = s$ e $\alpha \cap \gamma = t$, com r, s e t retas distintas entre si, então há apenas duas possibilidades: r, s e t concorrem num mesmo ponto ou são paralelas duas a duas".





Resolução

Como r e s são coplanares ($r \subset \beta$ e $s \subset \beta$), temos duas e somente duas possibilidades: $r \cap s = \{A\}$ (I) ou $r \cap s = \varnothing$ (II). Analisemos cada possibilidade.

I. $r \cap s = \{A\}$

Como $r = \alpha \cap \beta$ e $s = \beta \cap \gamma$, a possibilidade (I) pode ser expressa como:

$(\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = \{A\} \therefore [\alpha \cap (\beta \cap \beta)] \cap \gamma = \{A\}$

$\therefore [\alpha \cap \beta] \cap \gamma = \{A\} \therefore [\beta \cap \alpha] \cap \gamma = \{A\} \therefore \beta \cap (\alpha \cap \gamma) = \{A\}$.

Temos que $\alpha \cap \gamma = t$; logo, $\beta \cap t = \{A\}$.

Concluímos então que a reta t também passa por A. Assim, as retas r, s e t concorrem no ponto A, ou seja: $r \cap s \cap t = \{A\}$.

II. $r \cap s = \varnothing$

$\therefore (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = \varnothing \therefore [\alpha \cap (\beta \cap \beta)] \cap \gamma = \varnothing$

$\therefore [\alpha \cap \beta] \cap \gamma = \varnothing \therefore [\beta \cap \alpha] \cap \gamma = \varnothing \therefore \beta \cap (\alpha \cap \gamma) = \varnothing$.

Como $\alpha \cap \gamma = t$, podemos escrever $\beta \cap t = \varnothing$.

Como as retas r e s estão contidas em β, temos $r \cap t = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$.

As retas r e t são coplanares, $r \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$, e não têm ponto comum; logo, $r \parallel t$.

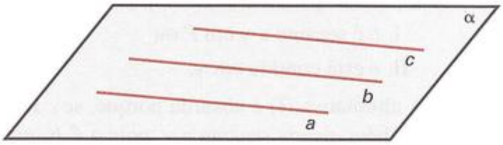
As retas s e t são coplanares, $s \subset \gamma$ e $t \subset \gamma$, e não têm ponto comum; logo, $s \parallel t$.

Podemos então escrever $r \parallel s$, $s \parallel t$ e $r \parallel t$.

(c.q.d.)

R.9 Provar que, "se três retas coplanares a, b e c são tais que $a \parallel b$ e $b \parallel c$, então $a \parallel c$".

Resolução



Se pelo menos duas dessas retas forem coincidentes, então a demonstração será imediata. Analisemos o caso em que a, b e c são distintas entre si, conforme figura ao lado.

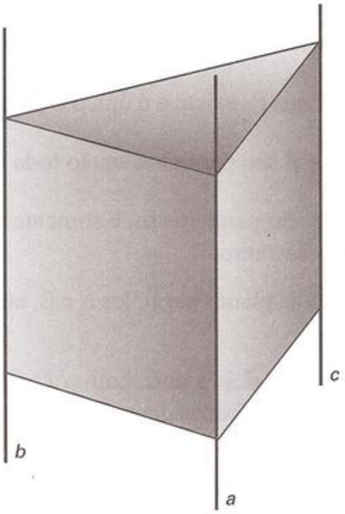
Como as retas a e c são coplanares, temos que ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas:

I. a e c são concorrentes ou

II. a e c são paralelas.

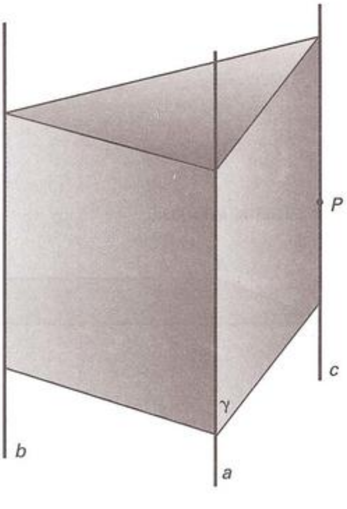
A alternativa (I) é **absurda**, pois teríamos as retas concorrentes a e c paralelas à reta b, o que contraria o postulado das paralelas (P.15). Resta apenas a alternativa (II): $a \parallel c$. (c.q.d.)

R.10 Provar que, "se três retas não-coplanares a, b e c são tais que $a \parallel b$ e $b \parallel c$, então $a \parallel c$".



Resolução

- As retas a e c não têm ponto comum, pois se isso ocorresse teríamos retas concorrentes a e c, ambas paralelas a b, o que contraria o postulado das paralelas (P.15).
- Vamos provar que a e c são coplanares. De fato, seja o ponto P, $P \in c$. Temos que $P \notin a$, pois a e c não têm ponto em comum; logo, fica determinado o plano $\gamma = \text{pl}(a, P)$.



O ponto P pertence a γ e também pertence a c. Logo, temos que ocorre uma, e apenas uma, das alternativas:

I. c é secante a γ em P ou

II. c está contida em γ.

A alternativa (I) é absurda porque, se c fosse secante a γ, então b também seria secante a γ, pois $b \parallel c$, e também a seria secante a γ, pois $a \parallel b$, mas isso contraria o fato $a \subset \gamma$. Resta, portanto, a alternativa (II): c está contida em γ.

- Provamos então que a e c não têm ponto comum e são coplanares. Logo, $a \parallel c$.

(c.q.d.)

2. Resumo dos teoremas

T.16 Se dois planos α e β são paralelos e uma reta r é secante a α, então r é secante a β.

T.17 Se dois planos α e β são paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β.

T.18 Dados um plano α e um ponto P, existe e é único o plano β que passa por P e é paralelo a α.

T.19 Se dois planos distintos α e β são paralelos, então toda reta r contida em α é paralela a β.

T.20 Dois planos distintos α e β são paralelos se, e somente se, existem retas concorrentes r e s contidas num deles e paralelas ao outro.

T.21 Se um plano γ é secante a dois planos paralelos α e β, então as retas r, $r = \alpha \cap \gamma$, e s, $s = \beta \cap \gamma$, são paralelas.

T.22 Se α, β e γ são planos secantes dois a dois, com $\alpha \cap \beta = r$, $\beta \cap \gamma = s$ e $\alpha \cap \gamma = t$, com r, s e t retas distintas entre si, então há apenas duas possibilidades: r, s e t concorrem num mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

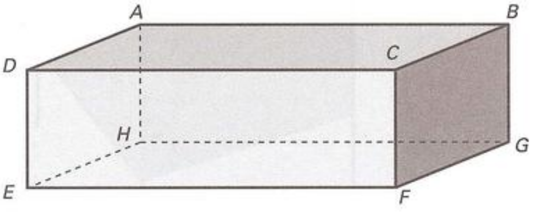
T.23 Se três retas a, b e c são tais que $a \parallel b$ e $b \parallel c$, então $a \parallel c$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8, B.13, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.9, B.10, B.11, B.12, B.14, B.15, C.2, C.4, C.5, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Tome como modelo a caixa de sapatos abaixo.



Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) O plano pl(A, B, C) é secante ao plano pl(H, G, B).

b) pl(A, B, C) // pl(H, E, F).

c) pl(A, B, C) // pl(A, D, C).

d) pl(A, C, F) // pl(D, E, C).

e) pl(H, G, F) $\equiv$ pl(H, E, F).

f) pl(A, C, F) é secante ao plano pl(A, B, C).

g) A reta comum aos planos secantes pl(B, G, F) e pl(A, B, C) é $\overleftrightarrow{CF}$.

h) $\overleftrightarrow{DC} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{HG} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{EF}$.

B.2 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se dois planos são paralelos distintos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

b) Se dois planos distintos α e β são paralelos, então existe em α uma única reta paralela a β.

c) Se dois planos distintos α e β são paralelos, então existe em α uma reta paralela a β.

d) Se dois planos α e β são paralelos, então existe em α uma reta paralela a β.

e) Se um plano α contém uma reta paralela a um plano β, então $\alpha /\!/ \beta$.

f) Se α e β são planos paralelos distintos e r e s são retas tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então $r /\!/ s$ ou r é reversa a s.

g) Se um plano α contém duas retas paralelas distintas r e s, e β é um plano tal que $r /\!/ \beta$ e $s /\!/ \beta$, então $\alpha /\!/ \beta$.

h) Se um plano α contém duas retas concorrentes r e s paralelas a um plano β, então $\alpha /\!/ \beta$.

i) Se α, β e γ são planos tais que $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, então $\alpha /\!/ \gamma$.

j) Se dois planos α e β são secantes a um plano γ, então $\alpha /\!/ \beta$.

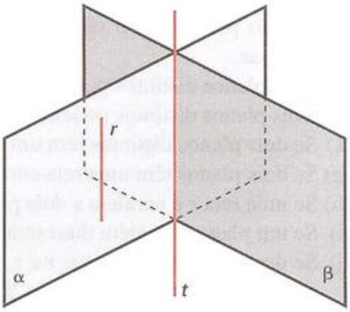
k) Se dois planos α e β são paralelos e α é secante a um plano γ, então β é secante a γ.

l) Se dois planos α e β são secantes cuja reta comum é t, então toda reta paralela a α e β é paralela a t.

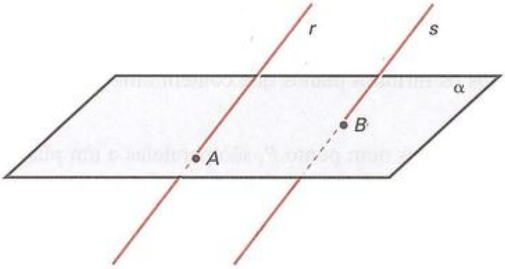
m) Se dois planos α e β são secantes cuja reta comum é t, então toda reta paralela a t é paralela a α e β.

B.3 Podemos afirmar que, "se dois planos são paralelos, então toda reta contida em um deles é paralela ao outro"? Por quê?

B.4 Prove que, "se dois planos α e β são secantes cuja reta comum é t e uma reta r, contida em α, é paralela a β, então $r /\!/ t$".



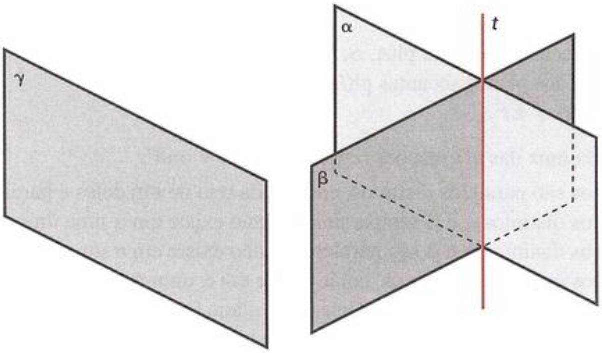
B.5 Duas retas r e s, paralelas distintas, são secantes a um plano α nos pontos A e B. Qual é a intersecção do plano α com o plano pl(r, s)?



B.6 Três planos α, β e γ, secantes dois a dois, são tais que $\alpha \cap \beta = r$, $\alpha \cap \gamma = s$ e $\beta \cap \gamma = t$, com r, s e t retas distintas entre si. Podemos afirmar que existe um ponto comum aos três planos α, β e γ? Por quê?

B.7 Três planos α, β e γ, secantes dois a dois, são tais que $\alpha \cap \beta = r$, $\alpha \cap \gamma = s$ e $\beta \cap \gamma = t$, com r, s e t retas distintas entre si. Qual é a intersecção dos três planos, isto é, $\alpha \cap \beta \cap \gamma$?

B.8 Prove que, "se α e β são planos secantes cuja reta comum é t e γ é um plano distinto de α e paralelo a α, então $t \parallel \gamma$".



B.9 Prove que, "se uma reta r é secante a um plano α e é paralela a um plano β, então α é secante a β".

B.10 Uma reta é secante a dois planos distintos num ponto A tal que $A \in \alpha$ e $A \in \beta$. Qual é a posição relativa entre os planos α e β?

B.11 Um plano γ é secante a dois planos α e β tais que $\alpha \cap \gamma = r$ e $\beta \cap \gamma = s$, com r e s retas paralelas distintas. Podemos afirmar que $\alpha \parallel \beta$? Por quê?

B.12 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se dois planos são secantes, então toda reta de um deles é secante ao outro.
b) Se dois planos α e β são secantes e as retas r e s são tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então r e s podem ser paralelas.
c) Se dois planos α e β são secantes e duas retas r e s são tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então r e s podem ser reversas.
d) Dois planos distintos podem ter um ponto comum.
e) Dois planos distintos podem ter um único ponto comum.
f) Se dois planos distintos têm um ponto comum, então existe uma única reta comum a esses planos.
g) Se dois planos têm uma reta comum, então são secantes.
h) Se uma reta r é paralela a dois planos α e β, então $\alpha \parallel \beta$.
i) Se um plano α contém duas retas distintas paralelas a um plano β, então $\alpha \parallel \beta$.
j) Se duas retas concorrentes r e s, contidas num plano α, são respectivamente paralelas a duas retas t e u, contidas num plano β, então $\alpha \parallel \beta$.
k) Se duas retas concorrentes r e s são, respectivamente, paralelas a duas retas t e u, então as retas t e u determinam um plano.
l) Considerando todos os infinitos planos paralelos a uma reta t, existe uma reta r secante a todos esses planos.
m) Considerando todos os infinitos planos que contêm uma reta t, existe uma reta r secante a todos esses planos.
n) Considerando todos os infinitos planos que contêm uma reta t, existe uma reta r paralela a todos esses planos.

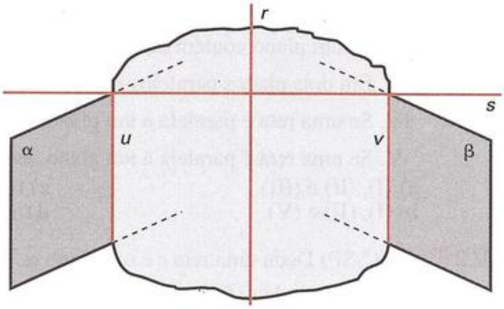
B.13 Duas retas r e s, concorrentes num ponto P, são paralelas a um plano α e outras duas retas u e v também concorrem no ponto P e são paralelas a α. Qual é a posição relativa dos planos pl(r, s) e pl(u, v)?

B.14 Dois planos α_1 e α_2 são secantes entre si e sua reta comum é t. Outros dois planos α_3 e α_4 são secantes entre si e sua reta comum é r. Sabendo que $\alpha_1 \parallel \alpha_3$ e $\alpha_2 \parallel \alpha_4$, qual é a posição relativa das retas t e r?

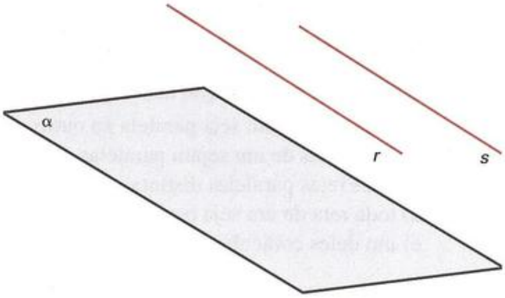
B.15 Prove que, "se dois planos α e β são secantes cuja reta comum é t e A e B são pontos tais que $A \in \alpha$, $A \notin t$, $B \in \beta$ e $B \notin t$, então as retas t e $\overleftrightarrow{AB}$ são reversas".

Exercícios complementares

C.1 Prove que, “se uma reta r é paralela a dois planos distintos α e β, e s é uma reta concorrente com r e secante aos planos α e β, então r é paralela a cada uma das retas u e v, sendo $u = \alpha \cap \text{pl}(r, s)$ e $v = \beta \cap \text{pl}(r, s)$”.



C.2 Prove que, “se uma reta r é paralela a um plano α, então qualquer reta s, paralela a r e não-contida em α, é paralela a α”.



C.3 Prove que, “se r e s são retas reversas, então existem dois planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$”.

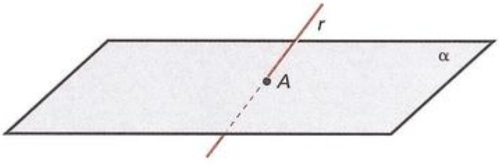
C.4 Sendo r e s retas reversas e sendo α e β planos paralelos tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, podemos afirmar que existem outros planos paralelos α' e β', $\alpha' \not\equiv \alpha$ e $\beta' \not\equiv \beta$, tais que $r \subset \alpha'$ e $s \subset \beta'$?

C.5 Podemos afirmar que, se três retas r, s e t são reversas duas a duas e não existe um plano paralelo às três, então existe uma reta u, paralela a r e concorrente com s e t simultaneamente? Apresente uma figura que justifique sua resposta. **Sugestão:** use, como modelo, a caixa de sapatos.

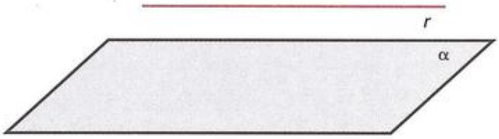
C.6 Prove que, “se uma reta r é paralela a um plano α, então existe um único plano β que contém r e é paralelo a α”.

C.7 Prove que, “dados uma reta r e um plano α, existe um plano β que contém r e é secante a α”. **Sugestão:** faça a demonstração em três casos:

1º) r é secante a α:



2º) r é paralela a α:



3º) r está contida em α:

Questões dos vestibulares

V.1 (ITA) Quais são as sentenças falsas?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro.

II. Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

III. Em dois planos paralelos distintos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a infinitas retas desse plano.

V. Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.

a) (I), (II) e (III).
b) (I), (II) e (V).
c) (I), (III) e (IV).
d) (II), (III) e (IV).
e) n.d.a.

V.2 (PUC-SP) Dada uma reta r e um plano α, pode-se afirmar que:

a) existe um plano β que contém r e é paralelo a α.
b) existe um plano β que contém r e é secante a α.
c) existe um plano β paralelo a α e paralelo a r.
d) existe uma reta t paralela a r e paralela a α.
e) não existe uma reta t concorrente com r e paralela a α.

V.3 (Cescem) Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que:

a) uma reta de um seja paralela ao outro.
b) duas retas de um sejam paralelas ao outro.
c) duas retas paralelas distintas de um sejam paralelas ao outro.
d) toda reta de um seja paralela a toda reta do outro.
e) um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

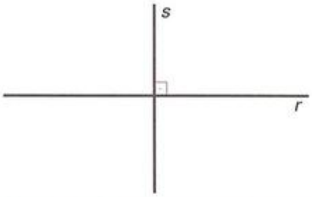
Capítulo 45

Perpendicularismo entre reta e reta e entre reta e plano

1. Retas perpendiculares

Definição

Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto entre si.

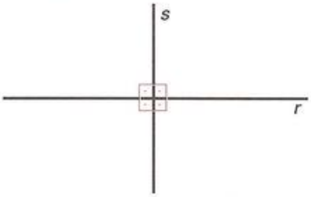


Indicamos que r e s são perpendiculares por:

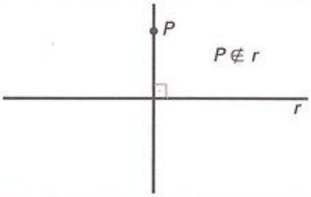
$$r \perp s \text{ ou } s \perp r.$$

Teoremas

Se duas retas são perpendiculares, então formam entre si quatro ângulos retos.



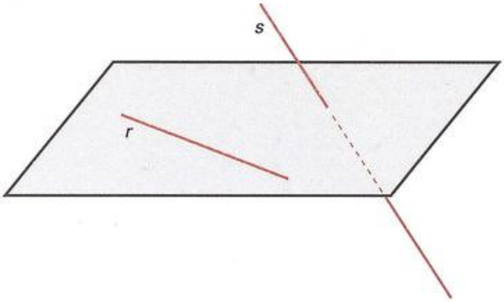
Dados uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, existe e é única a reta que passa por P e é perpendicular a r.



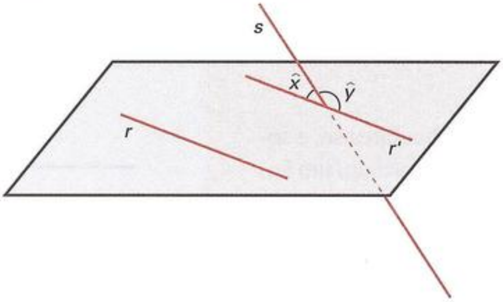
Nota: dizemos que dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares.

2. Ângulos de duas retas reversas

Sejam *r* e *s* duas retas reversas:



Consideremos uma reta *r'* paralela a *r* e concorrente com *s*.



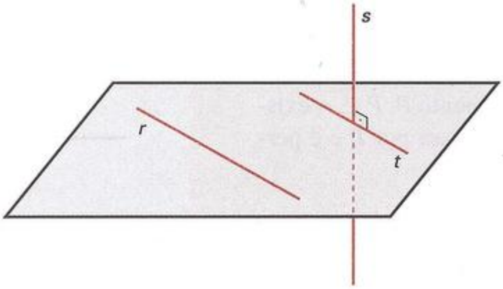
A reta *r'* forma com a reta *s* os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Definem-se como ângulos formados pelas retas reversas *r* e *s* os próprios ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

3. Retas ortogonais

Definição

> Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e existe uma reta perpendicular a uma delas e paralela à outra.

Note, portanto, que os ângulos formados por duas retas ortogonais são retos:

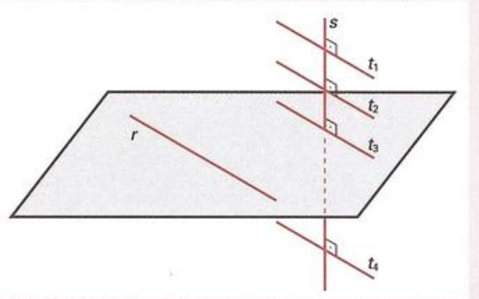


$$r \text{ e } s \text{ são ortogonais} \Leftrightarrow r \text{ e } s \text{ são reversas}, t \parallel r \text{ e } t \perp s.$$

Indicamos que *r* e *s* são ortogonais pelo símbolo $r \overset{\perp}{\_} s$ ou $s \overset{\perp}{\_} r$.

Propriedade

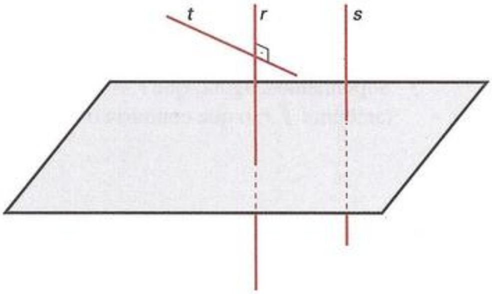
Se r e s são retas ortogonais, então toda reta paralela a r e concorrente com s é perpendicular a s.



Nota: dizemos que duas retas r e s formam ângulo reto entre si, quando $r \perp s$ ou $r \overset{|}{\_} s$.

Exercícios resolvidos

R.1 Provar que, "se duas retas r e s são paralelas e uma reta t é perpendicular a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s".

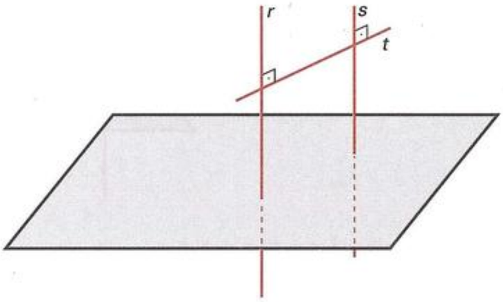


Resolução

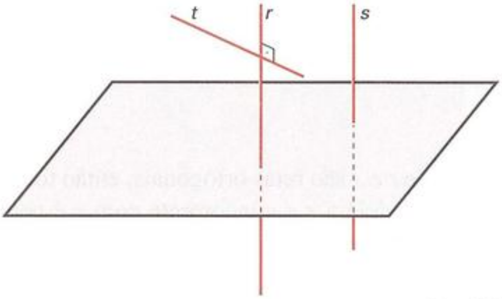
- Se $r \equiv s$, então $t \perp s$, pois $t \perp r$.
- Suponhamos agora que $r \not\equiv s$. A reta t não pode ser paralela a s, pois t é concorrente com r e $r \parallel s$. Há então duas possibilidades:

t é concorrente com s **(I)** ou
t é reversa a s. **(II)**

Ocorrendo a possibilidade (I), temos duas retas paralelas r e s cortadas por uma transversal t. Logo, os ângulos correspondentes determinados pelas três retas são congruentes e, como $t \perp r$, concluímos que $t \perp s$.

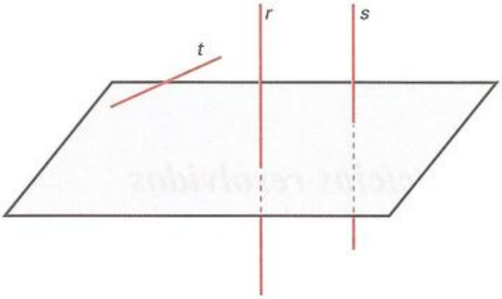


Ocorrendo a possibilidade (II), temos $r \parallel s$, $r \not\equiv s$ e $t \perp r$. Por definição de retas ortogonais, temos que t é ortogonal a s.



(c.q.d.)

R.2 Provar que, "se duas retas r e s são paralelas e t é ortogonal a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s".

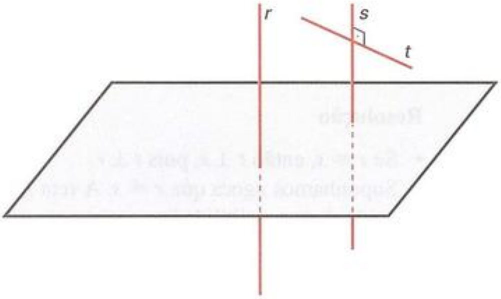


Resolução

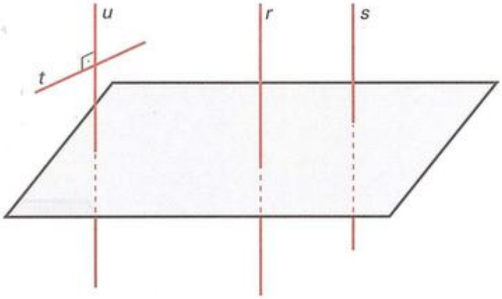
- Se $r \equiv s$, então $t \overset{\shortmid}{\_}\, s$, pois $t \overset{\shortmid}{\_}\, r$.
- Suponhamos, agora, que $r \not\equiv s$. A reta t não pode ser paralela a s porque $s \parallel r$ e, assim, deveríamos ter também $t \parallel r$, o que contraria o fato $t \overset{\shortmid}{\_}\, r$. Restam duas possibilidades:

t é concorrente com s **(I)** ou
t é reversa a s. **(II)**

Ocorrendo a possibilidade (I), temos $r \parallel s$, $r \not\equiv s$, $t \overset{\shortmid}{\_}\, r$. Logo, por definição de retas ortogonais, concluímos que $t \perp s$.



Ocorrendo a possibilidade (II), existe uma reta u concorrente com t e paralela a s.
Como $u \parallel s$ e $s \parallel r$, temos que $u \parallel r$.



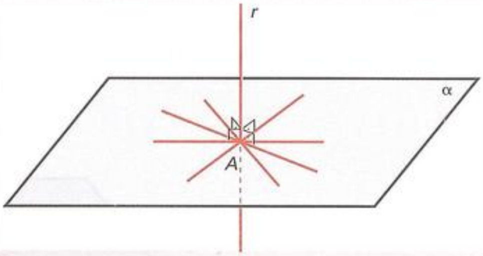
Concluímos, então, que $t \perp u$, pois $u \parallel r$, $u \not\equiv r$ e $t \overset{\shortmid}{\_}\, r$.
Assim, $u \parallel s$, $u \not\equiv s$ e $u \perp t$. Logo, por definição de retas ortogonais, temos $t \overset{\shortmid}{\_}\, s$.

(c.q.d.)

4. Reta perpendicular a plano

Definição

Uma reta r, secante a um plano α em um ponto A, é perpendicular a α se, e somente se, todas as retas contidas em α e concorrentes em A são perpendiculares a r.



Se r é perpendicular a α, podemos dizer também que α é perpendicular a r. Indicamos esse fato por $r \perp \alpha$ ou por $\alpha \perp r$.

Para visualizar concretamente uma reta perpendicular a um plano, imagine um lustre preso por um fio ao teto de uma sala.

NELSON TOLEDO/REFLEXO

Esse fio representa uma reta perpendicular ao plano do teto.

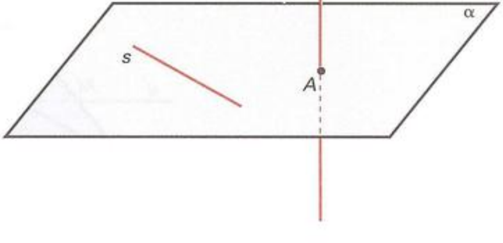
Nota: dizemos que um segmento de reta $\overline{AB}$ é perpendicular a um plano α se, e somente se, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a α.

Exercícios resolvidos

R.3 Provar que, "se uma reta r é perpendicular a um plano α, por um ponto A, $A \in \alpha$, então r forma ângulo reto com todas as retas contidas em α".

Resolução

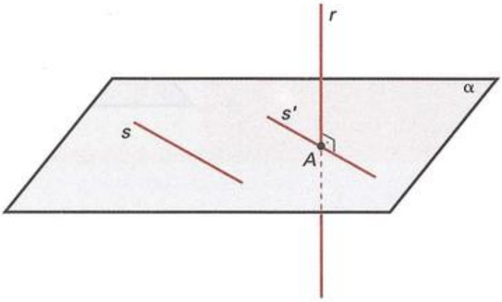
Pela definição de reta perpendicular a plano, temos que r é perpendicular a todas as retas do plano α concorrentes com ela. Seja s uma reta qualquer contida em α e não-concorrente com r.



Como s não é concorrente com r, temos que ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas:

s é paralela a r **(I)** ou
s é reversa a r. **(II)**

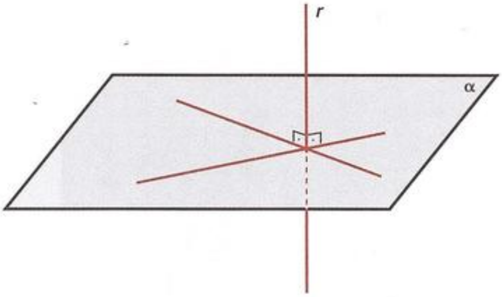
A alternativa (I) é absurda, pois, como $s \subset \alpha$ e $A \in \alpha$, teríamos $r \subset \alpha$, o que contraria o fato de r ser perpendicular a α e, portanto, secante a α. Resta, então, a alternativa (II): s é reversa a r.
Seja s', $s' \subset \alpha$, a reta que passa por A e é paralela a s.



A reta s' é perpendicular a r, pois r é perpendicular a α em A. Logo, s e r são ortogonais.
Concluímos então que qualquer reta contida em α ou é perpendicular a r ou é ortogonal a r.

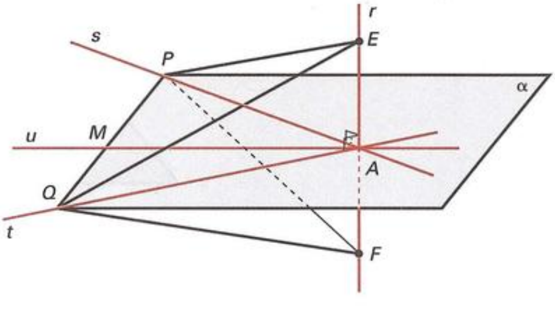
(c.q.d.)

R.4 Demonstrar que, "se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α".



Resolução
Denominemos s e t duas retas concorrentes contidas em α e perpendiculares a r no ponto A. Devemos provar que qualquer reta contida em α e concorrente com r é perpendicular a r.

- Seja u, $u \neq s$ e $u \neq t$, uma reta qualquer contida em α, tal que $A \in u$. Sejam P e Q, $P \in s$ e $Q \in t$, pontos situados em semiplanos opostos em relação a u, tais que $\overleftrightarrow{PQ} \cap u = \{M\}$. Consideremos ainda os pontos E e F, $E \neq F$, distintos de A, pertencentes a r tais que $\overline{AE} \cong \overline{AF}$:



- Os triângulos APE e APF são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{AE} \cong \overline{AF}$, $E\hat{A}P \cong F\hat{A}P$ (ambos retos) e $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos. Dessa congruência concluímos que:

  $$\overline{PE} \cong \overline{PF}. \textbf{ (I)}$$

  Analogamente, da congruência entre os triângulos AQE e AQF, concluímos que:

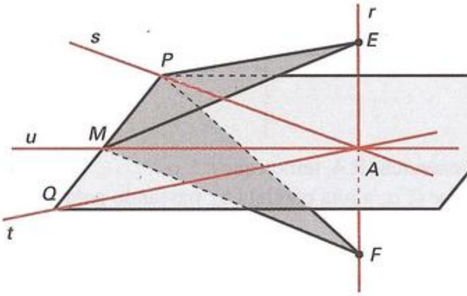
  $$\overline{QE} \cong \overline{QF}. \textbf{ (II)}$$

- Os triângulos PEQ e PFQ são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{PE} \cong \overline{PF}$, $\overline{QE} \cong \overline{QF}$ e $\overline{PQ}$ é lado comum aos dois triângulos. Dessa congruência concluímos que:

  $$E\hat{P}Q \cong F\hat{P}Q \textbf{ (III)} \text{ e}$$
  $$E\hat{Q}P \cong F\hat{Q}P. \textbf{ (IV)}$$

- Os triângulos EPM e FPM são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{PE} \cong \overline{PF}$, por (I); $E\hat{P}M \cong F\hat{P}M$, por (III); e $\overline{PM}$ é lado comum aos triângulos. Dessa congruência concluímos que:

  $$\overline{ME} \cong \overline{MF} \textbf{ (V)} \text{ e}$$
  $$A\hat{E}M \cong A\hat{F}M. \textbf{ (VI)}$$



- Os triângulos EMA e FMA são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{EA} \cong \overline{FA}$, por hipótese; $A\hat{E}M \cong A\hat{F}M$, por (VI); e $\overline{ME} \cong \overline{MF}$, por (V). Dessa congruência concluímos que:

  $$E\hat{A}M \cong F\hat{A}M. \textbf{ (VII)}$$

  Como $E\hat{A}M$ e $F\hat{A}M$ são ângulos adjacentes suplementares e congruentes, temos que cada um deles é reto. Logo, a reta r é perpendicular a u.

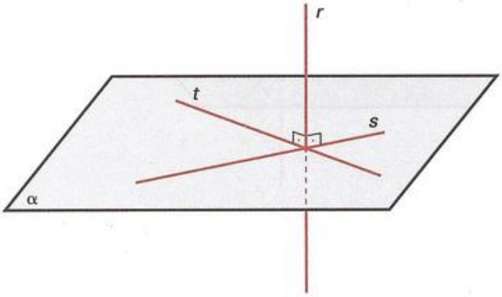
(c.q.d.)

R.5 Provar que, "se uma reta r forma ângulo reto com duas retas concorrentes s e t, contidas em um plano α, então r é perpendicular a α".

Resolução

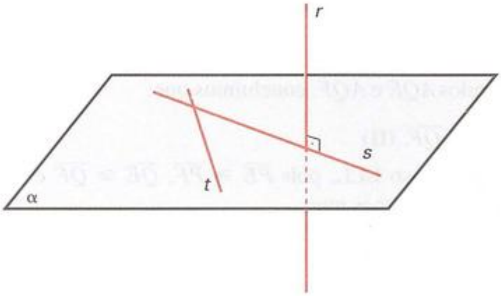
Temos três casos possíveis.

Primeiro caso



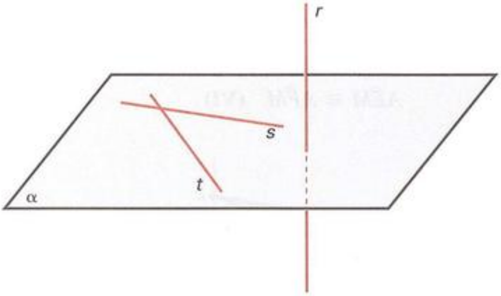
r é perpendicular a s e t.

Segundo caso



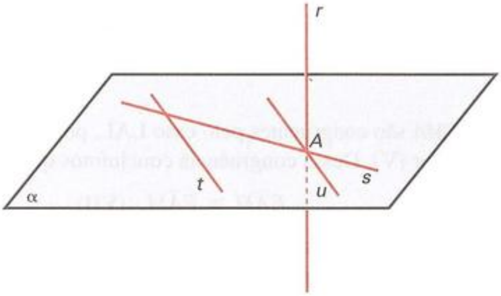
r é perpendicular a uma das retas e ortogonal à outra.

Terceiro caso



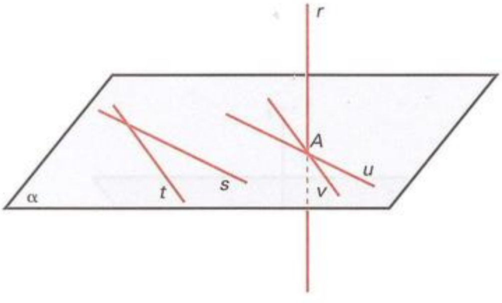
r é ortogonal a s e t.

- No primeiro caso, pelo exercício R.4, temos que $r \perp \alpha$.
- No segundo caso, seja u, $u \subset \alpha$, a reta paralela a t passando pelo ponto A, $\{A\} = r \cap \alpha$.



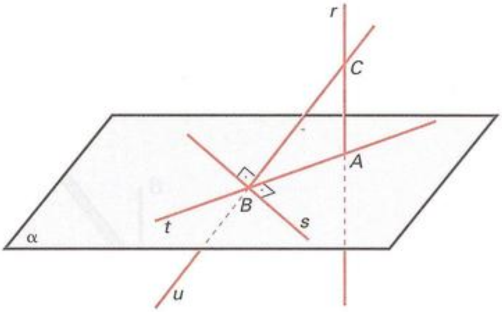
Como r é ortogonal a t, u é concorrente com r e $u \parallel t$, temos que $r \perp u$.
Logo, como $r \perp u$, $r \perp s$, $u \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e u é concorrente com s, concluímos, pelo exercício R.4, que $r \perp \alpha$.

- No terceiro caso, sejam u e v, $u \subset \alpha$ e $v \subset \alpha$, retas respectivamente paralelas a s e t, passando pelo ponto A, $\{A\} = r \cap \alpha$.



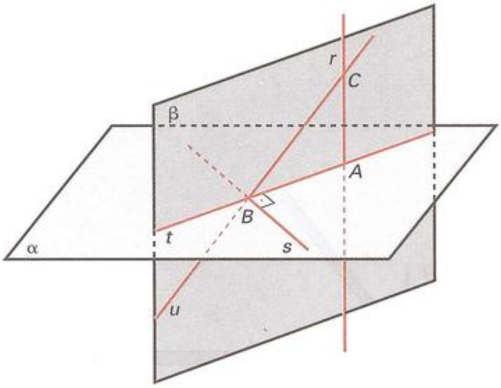
Como r é ortogonal a t, u é concorrente com r e $u \parallel t$, temos que $r \perp u$. Analogamente, $r \perp v$.
Assim, r é perpendicular a duas retas concorrentes u e v, contidas em α. Logo, pelo exercício R.4, $r \perp \alpha$.
(c.q.d.)

R.6 Provar que, "se r é uma reta perpendicular a um plano α por um ponto A, $A \in \alpha$, s é uma reta contida em α que não passa por A e t é uma reta que passa por A e é perpendicular a s no ponto B, então toda reta u, concorrente com r e que passa por B, é perpendicular a s". **Nota:** esse teorema é conhecido como **teorema das três perpendiculares**.



Resolução

- Se $u \equiv t$, então $u \perp s$, pois, por hipótese, $t \perp s$.
- Suponhamos, agora, que $u \not\equiv t$. Seja C o ponto tal que $\{C\} = u \cap r$.
  Os pontos A, B e C determinam o plano β, que contém as retas u, r e t.



A reta s é perpendicular a t, por hipótese, e é ortogonal a r, pelo exercício R.3. Logo, s forma ângulo reto com duas retas concorrentes t e r contidas em β. Portanto, pelo exercício R.5, temos que $s \perp \beta$.
Sendo s perpendicular a β no ponto B, tem-se que s é perpendicular a qualquer reta contida em β e que passa por B. Como u está contida em β e passa por B, concluímos que $u \perp s$.

(c.q.d.)

Para visualizar concretamente o teorema das três perpendiculares, construa um modelo.

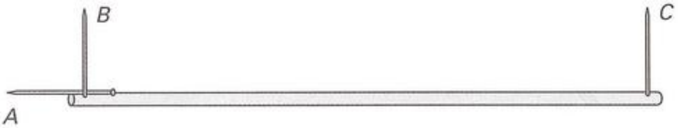
Material necessário

Utilize:
- quatro espetinhos de madeira (desses usados em churrascos);
- quatro alfinetes;
- durex.

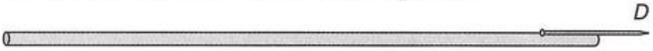
Construção

Siga os cinco passos descritos a seguir.

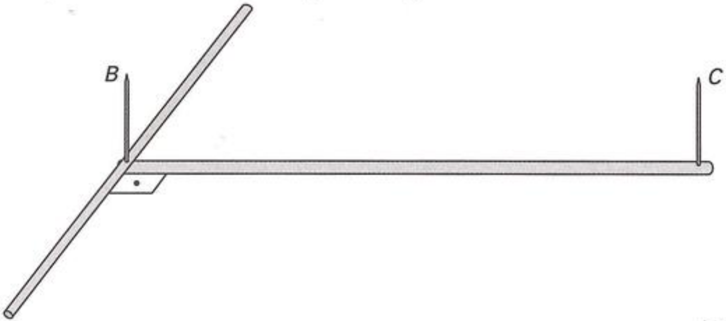
1º) Num dos espetinhos fixe os três alfinetes A, B e C.



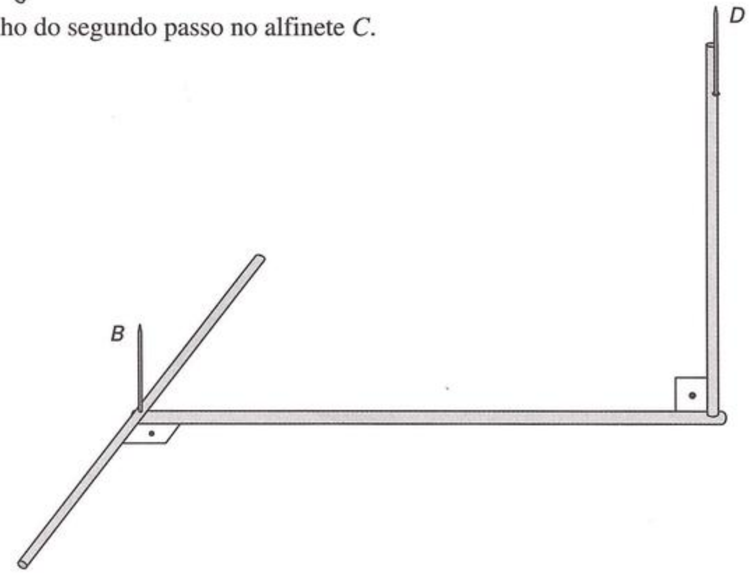
2º) Fixe o alfinete *D* em uma das extremidades de outro espetinho.



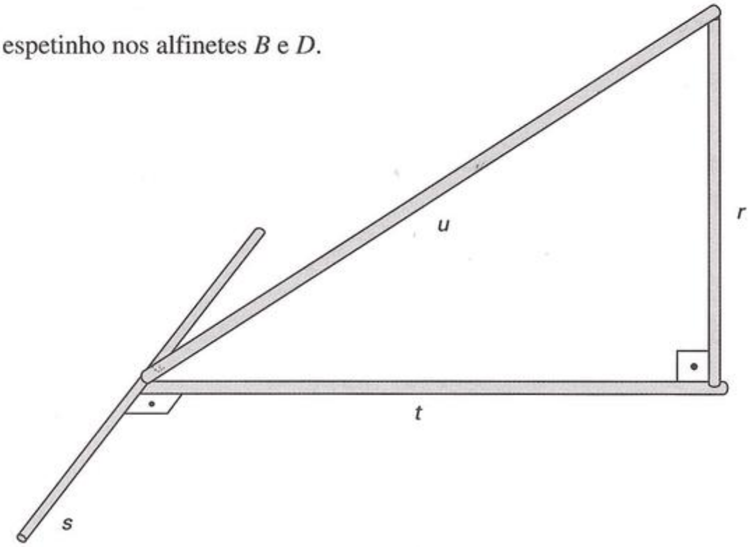
3º) Fixe um terceiro espetinho no alfinete *A* do primeiro passo.



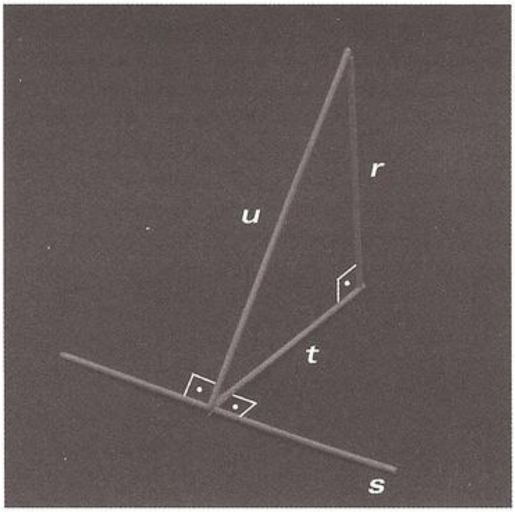
4º) Fixe o espetinho do segundo passo no alfinete *C*.



5º) Fixe o último espetinho nos alfinetes *B* e *D*.



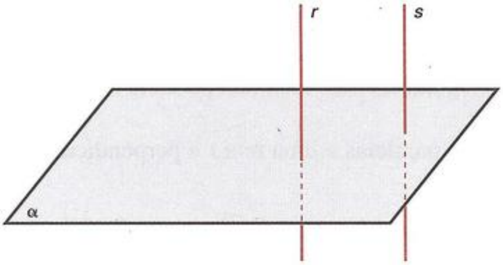
Finalmente, apoiando essa estrutura sobre uma mesa de modo que a "reta" r seja perpendicular ao plano da mesa, você percebe que a "reta" u é perpendicular à "reta" s.



LUIZ ANTONIO

Exercício resolvido

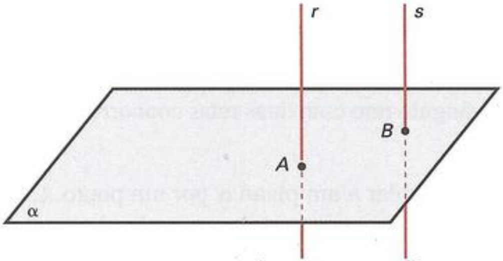
R.7 Provar que, "se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta s, paralela a r, é perpendicular a α".



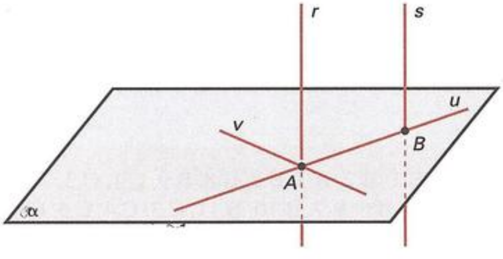
Resolução

I. Se $r \equiv s$, então $s \perp \alpha$, pois $r \perp \alpha$.

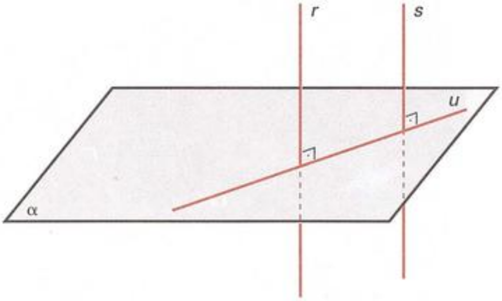
II. Suponhamos $r \not\equiv s$. Sejam A e B pontos tais que $\{A\} = r \cap \alpha$ e $\{B\} = s \cap \alpha$.



Sejam u e v retas tais que u concorre com v no ponto A e u passa por B.



- A reta u está contida em α e concorre com r. Como $r \perp \alpha$, temos $r \perp u$. Os ângulos correspondentes formados pelas paralelas r e s cortadas pela transversal u são congruentes; logo, $s \perp u$.



- A reta v está contida em α e concorre com r. Como $r \perp \alpha$, temos $r \perp v$. Como $r \perp v$, $r \parallel s$ e $r \not\equiv s$, temos, por definição de retas ortogonais, que s é ortogonal a v.
  Assim, s forma ângulo reto com duas retas concorrentes, u e v, contidas em α. Logo, pelo exercício R.5, temos que $s \perp \alpha$.

5. Resumo dos teoremas

T.24 Se duas retas são perpendiculares, então formam entre si quatro ângulos retos.

T.25 Dados uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, existe e é única a reta que passa por P e é perpendicular a r.

T.26 Se r e s são retas ortogonais, então toda reta paralela a r e concorrente com s é perpendicular a s.

T.27 Se duas retas r e s são paralelas e uma reta t é perpendicular a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

T.28 Se duas retas r e s são paralelas e t é ortogonal a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

T.29 Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r forma ângulo reto com todas as retas contidas em α.

T.30 Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α.

T.31 Se uma reta r forma ângulo reto com duas retas concorrentes s e t, contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.

T.32 Se uma reta r é perpendicular a um plano α por um ponto A, $A \in \alpha$, s é uma reta contida em α que não passa por A, e t é uma reta que passa por A e é perpendicular a s no ponto B, então toda reta u, concorrente com r e que passa por B, é perpendicular a s.

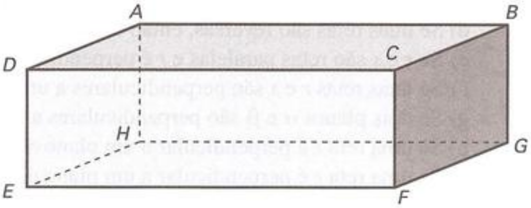
T.33 Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta s, paralela a r, é perpendicular a α.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.8, B.9, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.7, B.10, B.11, C.3, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Tendo como modelo a caixa de sapatos, classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:



a) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.

b) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AH}$.

c) $\overleftrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{AH}$.

d) $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{BG}$.

e) $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{AH}$.

f) $\overleftrightarrow{DC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{HG}$.

g) $\overleftrightarrow{EC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CF}$.

h) $\overleftrightarrow{EB}$ não é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.

i) $\overleftrightarrow{HF}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{BG}$.

j) $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular ao plano pl(B, G, F).

k) $\overleftrightarrow{DG}$ é perpendicular ao plano pl(E, F, C).

l) $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular aos planos pl(A, B, C) e pl(H, G, F).

m)As retas $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AH}$ são perpendiculares ao plano pl(A, B, C).

B.2 Prove que, "se dois planos α e β são paralelos e r é uma reta perpendicular a α, então r é perpendicular a β".

B.3 Uma reta r está contida em um plano α e um ponto P é tal que $P \in \alpha$ e $P \notin r$. Se as retas s e t que passam por P são tais que $s \perp r$ e $t \perp \alpha$, então podemos afirmar que toda reta u paralela a r é:

a) paralela a t.

b) coincidente com s.

c) ortogonal a t.

d) perpendicular a t.

e) perpendicular ou ortogonal a t.

B.4 Classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) Se duas retas r e s são perpendiculares, então toda reta perpendicular a r é paralela a s.

b) Se duas retas são ortogonais, então toda reta perpendicular a uma delas é paralela à outra.

c) Se duas retas são ortogonais, então existe uma reta perpendicular a ambas simultaneamente.

d) Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.

e) Se uma reta r é perpendicular a duas retas distintas de um plano α, então r é perpendicular a α.

f) Se uma reta r é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α.

g) Se uma reta r é ortogonal a duas retas distintas de um plano α, então r é perpendicular a α.

h) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a uma única reta contida em α.

i) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a uma reta contida em α.

j) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a infinitas retas contidas em α.

k) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a todas as retas contidas em α.

l) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r forma ângulo reto com todas as retas contidas em α.

B.5 Uma reta r está contida em um plano α, e um ponto P é tal que $P \in \alpha$ e $P \notin r$. Se as retas s e t que passam por P são tais que $s \perp r$ e $t \perp \alpha$, então podemos afirmar que toda reta u que passa por Q, $\{Q\} = r \cap s$, e concorre com t é:

a) ortogonal a s.

b) coincidente com r.

c) ortogonal a r.

d) perpendicular a r.

e) perpendicular a s.

B.6 Sejam A, B e C pontos pertencentes a um plano α e seja o ponto D, $D \notin \alpha$. Sabendo que $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$, pode-se afirmar que:

a) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

b) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{DB}$

c) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

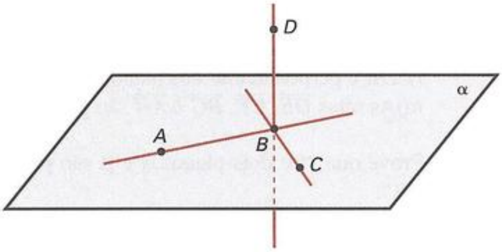
d) $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

e) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}$

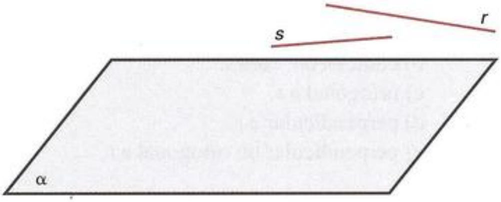
B.7 Classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) Se duas retas são perpendiculares, então elas são concorrentes.
b) Se duas retas são concorrentes, então elas são perpendiculares.
c) Se duas retas são ortogonais, então elas são reversas.
d) Se duas retas são reversas, então elas são ortogonais.
e) Se r e s são retas paralelas e r é perpendicular a um plano α, então s é perpendicular a α.
f) Se duas retas r e s são perpendiculares a um mesmo plano α, então r e s são paralelas.
g) Se dois planos α e β são perpendiculares a uma reta r, então $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.
h) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta perpendicular a r está contida em α.
i) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta perpendicular a r é paralela a α.
j) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e s é uma reta perpendicular a r, então ou $s \subset \alpha$ ou $s \mathbin{/\!/} \alpha$.

B.8 Prove que, "se três pontos A, B e C de um plano α são tais que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e um ponto D, $D \notin \alpha$, é tal que $\overleftrightarrow{DB} \perp \alpha$, então $\overleftrightarrow{CB} \perp \text{pl}(A, D, B)$".



B.9 Prove que, "se r e s são retas reversas e α é um plano tal que $r \mathbin{/\!/} \alpha$ e $s \mathbin{/\!/} \alpha$, então uma reta t que forma ângulo reto com cada uma das retas r e s é perpendicular a α".

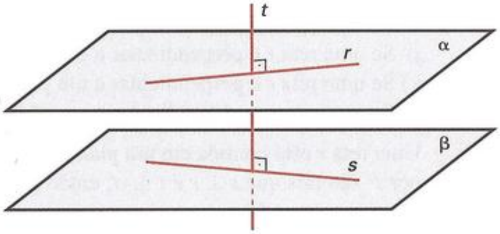


B.10 Duas retas r e s são reversas. Quantos planos contêm r e são paralelos a s?

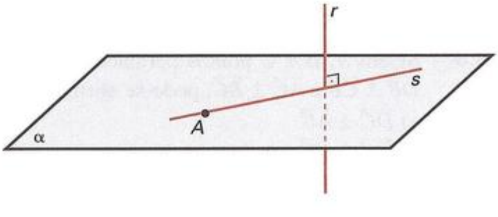
B.11 Duas retas r e s são ortogonais e a reta t é perpendicular a r e a s. Pode-se afirmar que a reta r é perpendicular ao plano $\text{pl}(s, t)$? Por quê?

Exercícios complementares

C.1 Prove que, "se r e s são retas reversas e os planos α e β são tais que $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então a reta t perpendicular a r e a s é perpendicular a α e a β".

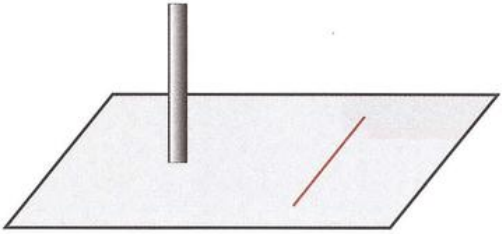


C.2 Prove que, "se uma reta r é perpendicular a um plano α e uma reta s, perpendicular a r, passa por um ponto A, $A \in \alpha$, então s está contida em α".

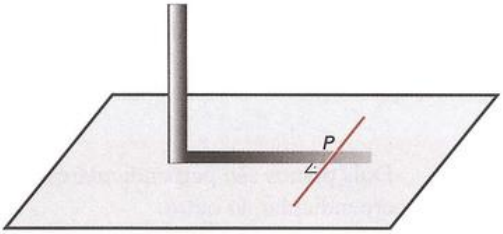


C.3 Prove que, "se r e s são retas ortogonais, então existe um único plano α que contém s e é perpendicular a r".

C.4 Num terreno plano e horizontal há um mastro perpendicular ao terreno e uma linha reta desenhada no solo, não passando pela base do mastro.



Num certo momento do dia, o mastro projeta uma sombra perpendicular à linha reta num ponto P.



Unindo-se por um fio o ponto P a um ponto M qualquer do mastro, qual é o ângulo que esse fio forma com a linha reta desenhada no solo? Por quê? (Considere o mastro como um segmento de reta.)

C.5 Seja r uma reta não-perpendicular a um plano α e seja s concorrente com r e perpendicular ao plano α. Se t é uma reta contida em α e perpendicular a r, então podemos afirmar que:

a) t é concorrente com s.
b) $t \parallel s$.
c) $s \perp \text{pl}(t, r)$.
d) $t \perp \text{pl}(s, r)$.
e) t não forma ângulo reto com r.

C.6 As instruções de um exame vestibular alertavam que cada teste era composto por cinco alternativas com uma, e apenas uma, correta. Um dos testes apresentou as seguintes alternativas:

a) As retas r e s são paralelas distintas.
b) As retas r e s não têm ponto comum.
c) As retas r e s são reversas.
d) As retas r e s são ortogonais.
e) Não existe plano que contém as retas r e s.

Qual é a alternativa correta?

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) São dados cinco pontos não-coplanares A, B, C, D e E. Sabe-se que $ABCD$ é um retângulo, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

a) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EB}$.
b) $\overleftrightarrow{EB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$.
c) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.
d) $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$.
e) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$.

V.2 (Mackenzie-SP) Sejam r, s e t retas no espaço. Se r é perpendicular a t e s é perpendicular a t, então:

a) r e s são paralelas.
b) r e s são perpendiculares.
c) r e s são reversas.
d) r, s e t são coplanares.
e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

V.3 (PUC-SP) Qual a afirmação falsa?

a) Se dois planos são perpendiculares a uma reta, então eles são paralelos.
b) Se duas retas são perpendiculares a um plano, então elas são paralelas.
c) Se dois planos são paralelos e uma reta é perpendicular a um deles, então a reta também é perpendicular ao outro.
d) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.
e) Se uma reta é perpendicular a um plano, então toda reta paralela a ela é perpendicular a esse plano.

Capítulo 46

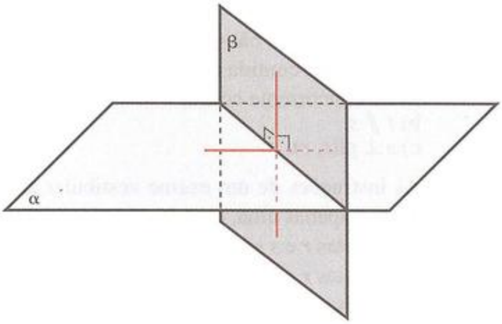
Perpendicularismo entre planos

1. Planos perpendiculares

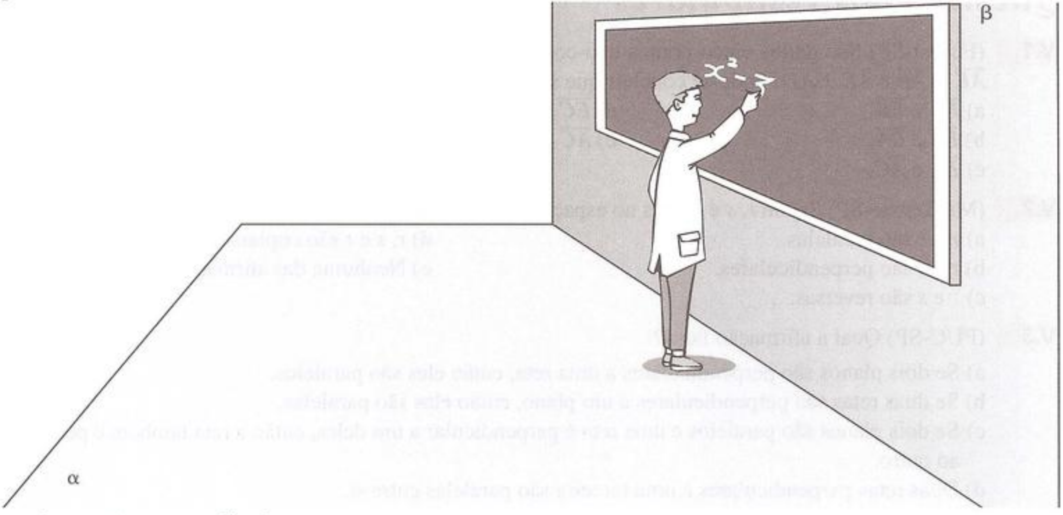
Definição

> Dois planos são perpendiculares se, e somente se, existe uma reta contida em um deles e perpendicular ao outro.

Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β pelo símbolo $\alpha \perp \beta$ ou $\beta \perp \alpha$.



Para visualizar concretamente dois planos perpendiculares, observe o plano do piso e o plano de uma das paredes de uma sala de aula:



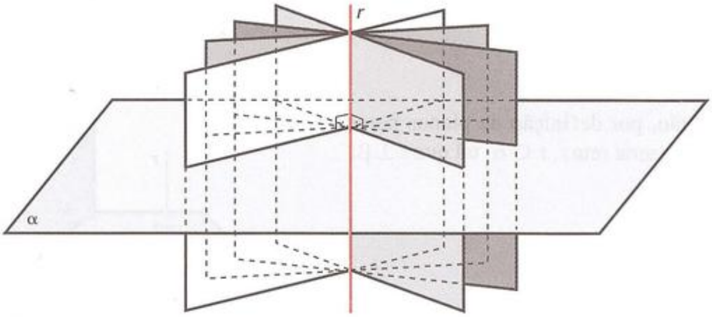
Esses planos são perpendiculares.

Exercícios resolvidos

R.1 Uma reta r é perpendicular a um plano α. Quantos planos contêm r e são perpendiculares a α?

Resolução

Se a reta r é perpendicular a α, então qualquer plano β que contém r é perpendicular a α, pois β contém uma reta (a própria r) perpendicular a α. Como existem infinitos planos que contêm r, temos que existem infinitos planos perpendiculares a α e que contêm r.

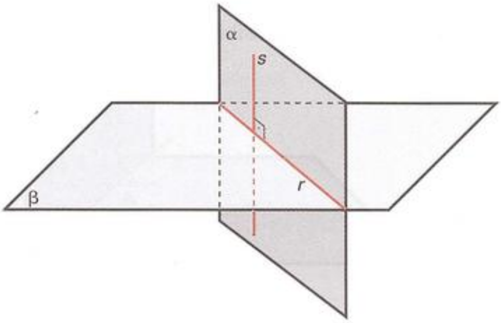


R.2 Dados um plano α e um ponto P, quantos planos passam por P e são perpendiculares a α?

Resolução

Sabemos que existe uma única reta r que passa por P e é perpendicular a α. Como qualquer plano que contém r é perpendicular a α, temos que existem infinitos planos que passam por P e são perpendiculares a α.

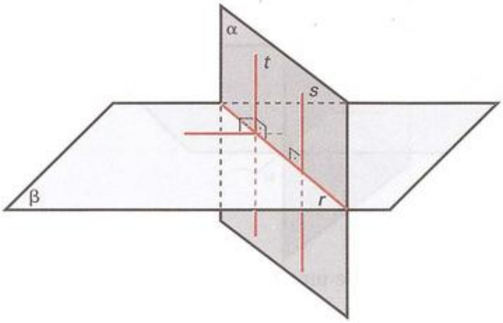
R.3 Provar que, "se α e β são planos perpendiculares tais que $\alpha \cap \beta = r$ e uma reta s, $s \subset \alpha$, é perpendicular à reta r, então s é perpendicular a β".



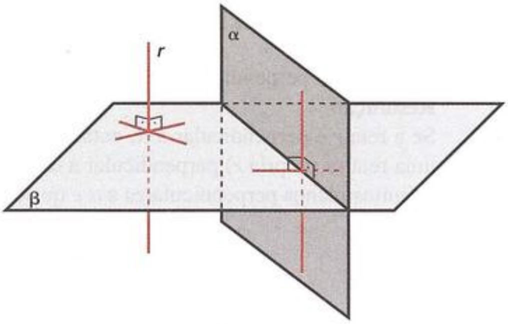
Resolução

- Se $\alpha \perp \beta$, então, de acordo com a definição de planos perpendiculares, existe uma reta t, $t \subset \alpha$, tal que $t \perp \beta$.
- Por definição de reta perpendicular a plano, temos que $t \perp r$.
- Como t e s são coplanares e perpendiculares a r, temos que $t \parallel s$.
- Como $t \parallel s$ e $t \perp \beta$, temos, pelo teorema T.33, que $s \perp \beta$.

(c.q.d.)

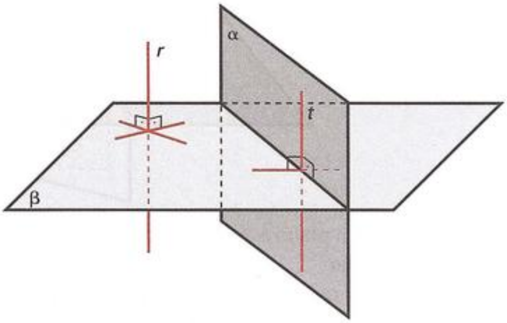


R.4 Provar que, "se α e β são planos perpendiculares e uma reta r é perpendicular a β, então $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$".



Resolução

- Se $\alpha \perp \beta$, então, por definição de planos perpendiculares, existe uma reta t, $t \subset \alpha$, tal que $t \perp \beta$.

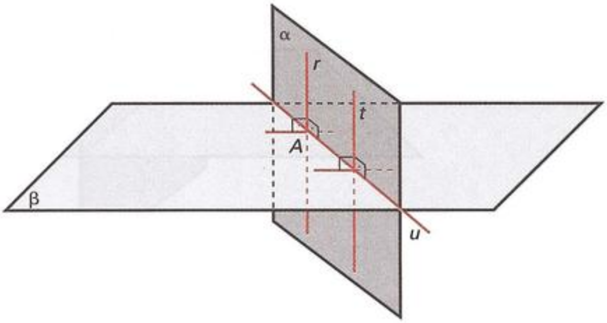


- Como $r \perp \beta$ e $t \perp \beta$, temos que $r \parallel t$.

Deve ocorrer uma dentre duas possibilidades:

I. r é perpendicular a β num ponto A pertencente à reta u, $u = \alpha \cap \beta$;
II. r é perpendicular a β por um ponto P, $P \notin \alpha$ e $P \in \beta$.

Examinemos a possibilidade (I).

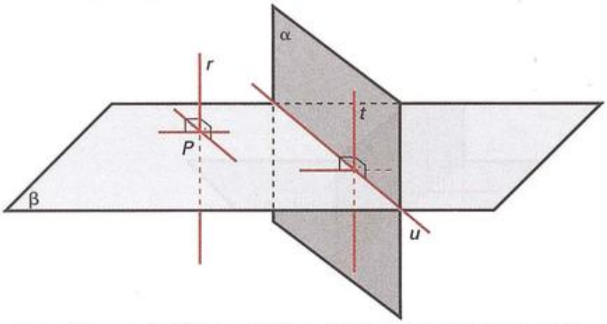


Temos:

$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ t \perp \beta \\ r \parallel t \\ t \subset \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in r. \end{cases}$$

Como $t \perp \beta$, temos que toda reta paralela a t é perpendicular a β. Consideremos a reta r' tal que $r' \subset \alpha$, $A \in r'$ e $r' \parallel t$. Temos que $r' \perp \beta$. Pelo postulado das paralelas, existe uma única reta que passa por A e é paralela a t; logo, $r' \equiv r$ e, portanto, $r \subset \alpha$.

Vejamos agora a possibilidade (II):



$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ t \perp \beta \\ r \parallel t \\ P \notin \alpha \\ P \in r. \end{cases}$$

A reta $r \not\subset \alpha$, pois $P \in r$ e $P \notin \alpha$. Se uma reta r, não contida em α, é paralela a uma reta t, contida em α, temos, pelo teorema T.12, que $r \parallel \alpha$. (c.q.d.)

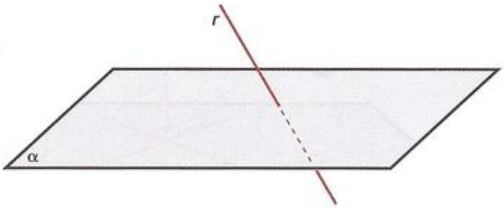
R.5 Provar que, "se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α".

Resolução

Devemos analisar três casos, r secante a α, $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$, e em cada caso provar a existência e a unicidade do plano β.

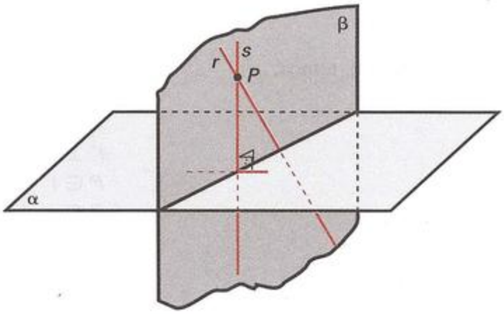
Primeiro caso

r é secante a α:



- Existência

  Seja P um ponto pertencente a r e seja s a reta que passa por P e é perpendicular a α. A reta s não coincide com r porque, se $s \equiv r$, então r seria perpendicular a α, o que contraria a hipótese. Por isso s é concorrente com r. O plano $\beta = \text{pl}(r, s)$ contém a reta s perpendicular a α; logo, $\beta \perp \alpha$.



- Unicidade

  Suponhamos que exista um outro plano β', tal que β' contenha r e seja perpendicular a α. Então β' passa pelo ponto P. Pelo exercício R.4, temos que, se $\beta' \perp \alpha$, então toda reta perpendicular a α é paralela a β' ou está contida em β'.

  Como $P \in \beta'$, $P \in s$ e $s \perp \alpha$, concluímos que $s \subset \beta'$. Assim, temos:

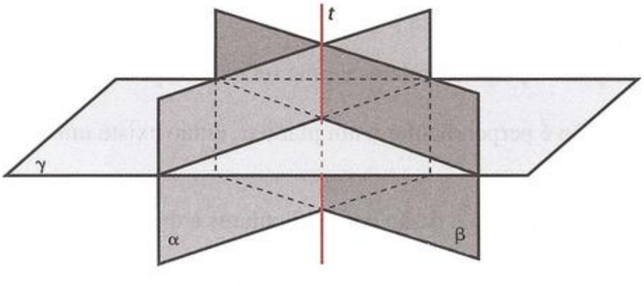
$$\begin{cases} \beta' = \text{pl}(r, s) \\ \beta = \text{pl}(r, s) \end{cases} \Rightarrow \beta' \equiv \beta.$$

  Logo, o plano β é único.

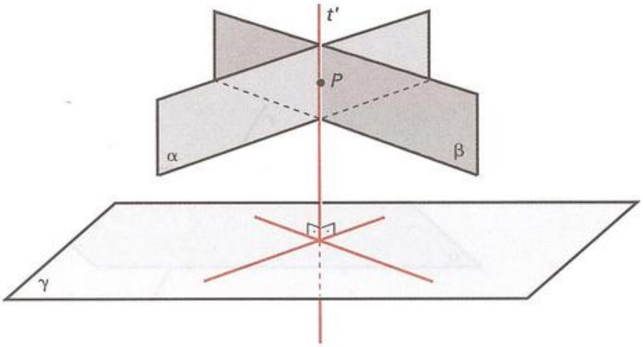
  O segundo e o terceiro casos são demonstrados de modo análogo.

(c.q.d.)

R.6 Provar que, "se dois planos secantes α e β são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e β, é perpendicular a γ".



Resolução
Seja t' a reta que passa por um ponto P, $P \in t$, e é perpendicular a γ. Como $P \in t$ e $t = \alpha \cap \beta$, temos que $P \in \alpha$ e $P \in \beta$.



Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \gamma \\ t' \perp \gamma \\ P \in t' \\ P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow t' \subset \alpha, \text{ pelo exercício R.4, e}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta \perp \gamma \\ t' \perp \gamma \\ P \in t' \\ P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow t' \subset \beta, \text{ pelo exercício R.4.}$$

Como α e β são secantes e, portanto, têm uma única reta em comum, temos $t' \equiv t$.
Logo, $t \perp \gamma$. (c.q.d.)

2. Resumo dos teoremas

T.34 Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então existem infinitos planos que contêm r e são perpendiculares a α.

T.35 Dados um ponto P e um plano α, existem infinitos planos que passam por P e são perpendiculares a α.

T.36 Se α e β são planos perpendiculares tais que $\alpha \cap \beta = r$ e uma reta s, $s \subset \alpha$, é perpendicular à reta r, então s é perpendicular a β.

T.37 Se α e β são planos perpendiculares e uma reta r é perpendicular a β, então $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

T.38 Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.

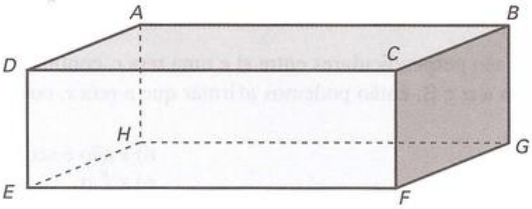
T.39 Se dois planos secantes α e β são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e β, é perpendicular a γ.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.8, B.9, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.7, B.10, C.2, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Tendo como modelo a caixa de sapatos, classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:



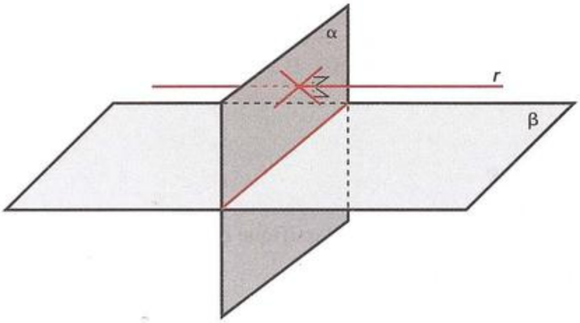
a) $pl(C, B, G) \perp pl(A, B, C)$.
b) $pl(A, B, C) \perp pl(A, B, G)$.
c) $pl(D, C, F) \perp pl(A, B, G)$.
d) $pl(A, C, F) \perp pl(E, H, F)$.
e) $pl(D, B, G) \perp pl(A, B, G)$.
f) A intersecção dos planos $pl(A, C, F)$ e $pl(D, B, G)$ é uma reta perpendicular ao plano $pl(H, G, F)$.
g) Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{EB}$ e é perpendicular ao plano $pl(H, G, F)$.
h) Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{BG}$ e é perpendicular ao plano $pl(H, G, F)$.

B.2 Prove que, "se dois planos α e β são paralelos entre si e um plano γ é perpendicular a α, então γ é perpendicular a β".

B.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:
a) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existe uma única reta contida em α e perpendicular a β.
b) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existem infinitas retas contidas em α e perpendiculares a β.
c) Se dois planos secantes α e β são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e β, é perpendicular a γ.
d) Se dois planos α e β são perpendiculares a um plano γ, então $\alpha \parallel \beta$.
e) Se dois planos α e β são secantes e a reta t, comum a α e β, é perpendicular a um plano γ, então $\alpha \perp \gamma$ e $\beta \perp \gamma$.
f) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então existem infinitos planos que contêm r e são perpendiculares a α.
g) Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano que contém r e é perpendicular a α.
h) Se r é uma reta e α é um plano, então existe um único plano que contém r e é perpendicular a α.

B.4 Se α e β são planos perpendiculares entre si e γ é um plano perpendicular à reta comum a α e β, então podemos afirmar que as retas r, $r = \alpha \cap \gamma$, e s, $s = \beta \cap \gamma$, são:
a) paralelas distintas.
b) ortogonais.
c) perpendiculares.
d) coincidentes.
e) concorrentes e não-perpendiculares.

B.5 Prove que, "se uma reta r é paralela a um plano β e um plano α é perpendicular a r, então β é perpendicular a α".



B.6 Se dois planos α e β são perpendiculares entre si e uma reta r, contida em α e secante a β, não é perpendicular à reta t, comum a α e β, então podemos afirmar que a reta s, contida em β e perpendicular a r, é tal que:

a) $s \equiv t$.
b) $s \perp \alpha$.
c) s não é perpendicular a t.
d) s não é secante a α.
e) $s \parallel \alpha$.

B.7 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:

a) Dois planos perpendiculares são secantes.
b) Se dois planos α e β são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
c) Se duas retas r e s são perpendiculares, então dois planos α e β, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, são perpendiculares.
d) Se duas retas r e s são concorrentes, então existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
e) Se duas retas r e s são reversas, então não existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

B.8 Prove que, "se α e β são planos secantes e P é um ponto qualquer, então existe um plano γ que passa por P e é perpendicular a α e β".

B.9 Prove que o plano γ do exercício anterior é único.

B.10 Sejam uma reta r e dois planos secantes α e β. Sob que condição existe um plano γ que contém r e é perpendicular a α e β simultaneamente?

Exercícios complementares

C.1 Sejam dois planos secantes α e β e uma reta r, concorrente com uma reta s, $s \subset \alpha$ e $s \perp \beta$. Sabendo que existe um plano γ que contém r, $\gamma \perp \alpha$ e $\gamma \perp \beta$, podemos afirmar que:

a) $r \subset \alpha$.
b) $r \perp \alpha$.
c) $r \perp s$.
d) $r \parallel \beta$.
e) α não é perpendicular a β.

C.2 Prove que, "se duas retas r e s são reversas, então existe uma reta t tal que $r \perp t$ e $s \perp t$".

C.3 Prove a unicidade da reta t do exercício anterior.

C.4 Se dois planos α e β são perpendiculares e uma reta r, perpendicular a β, tem um ponto P em comum com α, então podemos afirmar que:

a) $r \subset \alpha$.
b) $P \in \alpha$.
c) $r \parallel \alpha$.
d) r é secante a α.
e) $r \subset \beta$.

C.5 Se r e s são retas paralelas e os planos α e β são tais que $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$, então podemos afirmar que:

a) $\alpha \equiv \beta$.
b) $\alpha \parallel \beta$.
c) $\alpha \perp \beta$.
d) α é secante a β.
e) $\alpha \cap \beta \equiv r \cap s$.

Questões dos vestibulares

V.1 (U.F.S. Carlos-SP) Assinale a proposição falsa:

a) Duas retas do espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.
b) Um plano perpendicular a dois planos secantes é perpendicular à reta intersecção deles.
c) Uma reta ortogonal a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular ao plano.
d) Um plano α, perpendicular a uma reta de um plano β, é paralelo a β.
e) Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos.

V.2 (F.M. Santa Casa-SP) Sempre existem:

I. dois diferentes planos passando por um mesmo ponto e perpendiculares a uma mesma reta;
II. duas diferentes retas passando por um mesmo ponto e perpendiculares a um mesmo plano;
III. dois diferentes planos passando por um mesmo ponto e perpendiculares a um terceiro plano;
IV. dois diferentes planos paralelos a uma mesma reta;
V. dois diferentes planos com um ponto comum, paralelos a um mesmo plano.

Assinale a alternativa correta:

a) (III) e (IV) são verdadeiras.
b) só (II) é verdadeira.
c) todas são falsas.
d) (III) e (V) são verdadeiras.
e) só (I), (II) e (IV) são verdadeiras.

V.3 (Vunesp) Sejam α um plano e b uma reta não-perpendicular a α. Então:

a) não existe plano passando por b e perpendicular a α.
b) existem, no mínimo, dois planos passando por b e perpendiculares a α.
c) existe um e um só plano passando por b e perpendicular a α.
d) existe uma infinidade de planos passando por b e perpendiculares a α.
e) todo plano passando por b é perpendicular a α.

V.4 (Fuvest-SP) Dados um plano α e uma reta r, podemos afirmar que:

a) existe um plano β que contém r e é perpendicular a α.
b) existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.
c) existe um plano β que contém r e é paralelo a α.
d) existe um único plano β que contém r e é paralelo a α.
e) qualquer plano β que contém r intercepta o plano α.

Capítulo 47

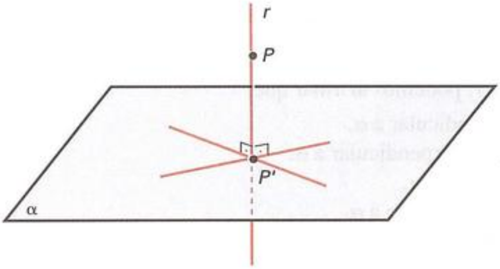
Geometria métrica espacial, projeções ortogonais e distâncias

1. Projeção ortogonal

1.1. Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Definição

Chama-se "**projeção ortogonal** de um ponto P sobre um plano α" a intersecção do plano α com a reta r que passa por P e é perpendicular a α.



P' é a projeção ortogonal de P sobre α.

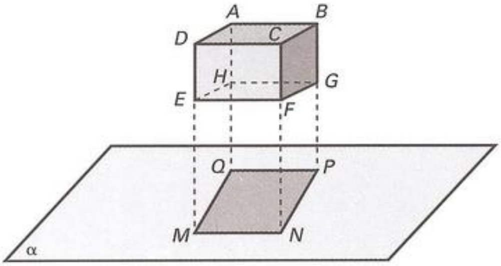
1.2. Projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano

Definição

Chama-se "**projeção ortogonal** de uma figura geométrica sobre um plano" o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

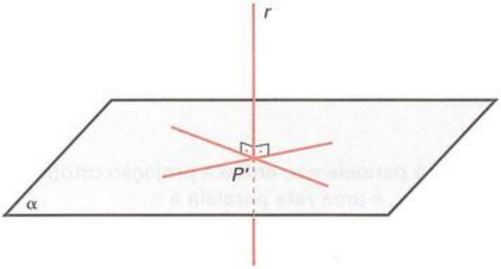
Exemplos

a)



A projeção ortogonal da figura $ABCDEFGH$ sobre o plano α é a figura $MNPQ$.

b)

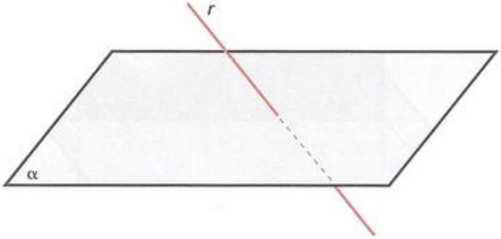


A projeção ortogonal da reta r, perpendicular a α, sobre α é o ponto P'.

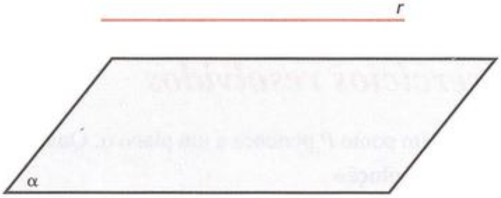
Projeção ortogonal de uma reta *r* sobre um plano α, com *r* não-perpendicular a α

Consideremos uma reta r não-perpendicular a um plano α. Temos três casos possíveis:

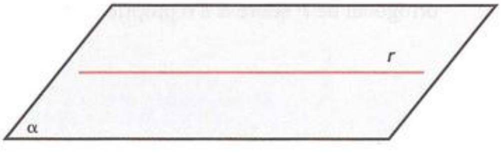
I. r é secante a α:



II. r é paralela a α:

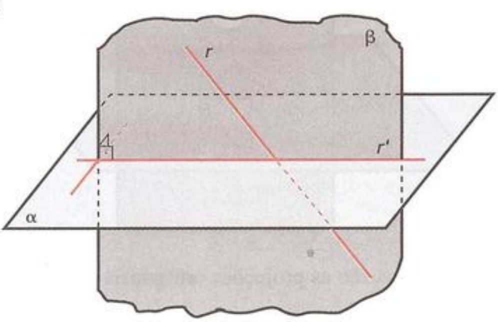


III. r está contida em α:



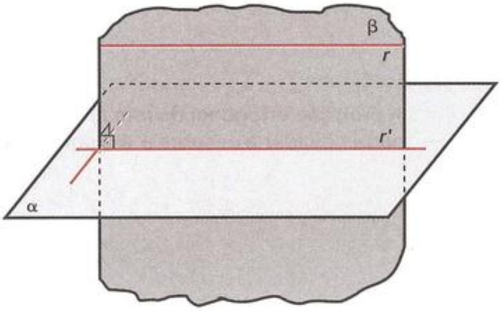
Provamos anteriormente (exercício R.5 do capítulo 46) que existe e é único o plano β que contém r e é perpendicular a α. A projeção ortogonal de r sobre α é a reta r' tal que $r' = \beta \cap \alpha$. Assim, temos:

(I)



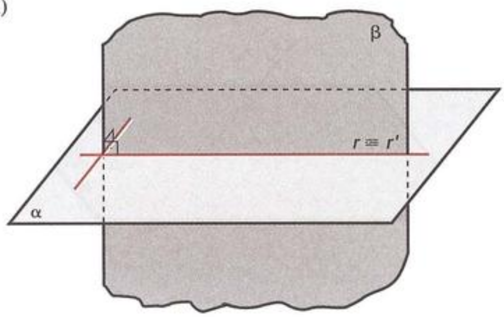
Se r é secante a α, então a projeção ortogonal r', de r sobre α, é uma reta concorrente com r.

(II)



Se r é paralela a α, então a projeção ortogonal r', de r sobre α, é uma reta paralela a r.

(III)



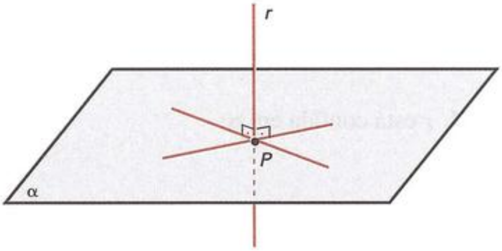
Se $r \subset \alpha$, então a projeção ortogonal r', de r sobre α, coincide com r.

Exercícios resolvidos

R.1 Um ponto P pertence a um plano α. Qual é a projeção ortogonal de P sobre α?

Resolução

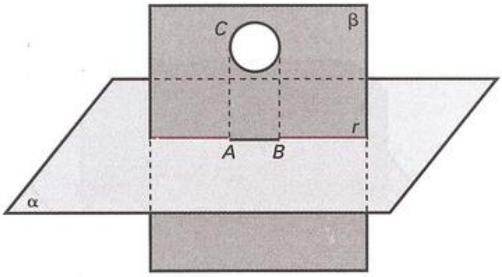
Sendo r a reta que passa por P e é perpendicular a α, temos que $r \cap \alpha = \{P\}$. Logo, a projeção ortogonal de P sobre α é o próprio ponto P.



R.2 Uma circunferência C está contida em um plano β perpendicular a um plano α. Que figura geométrica é a projeção ortogonal de C sobre α?

Resolução

As projeções ortogonais dos pontos C sobre α pertencem à reta r, $r = \alpha \cap \beta$, e formam um segmento de reta. Portanto a projeção ortogonal de C sobre α é um segmento de reta $\overline{AB}$.



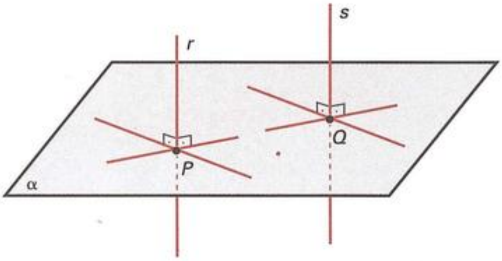
R.3 Duas retas r e s são paralelas distintas. Que figuras geométricas são as projeções ortogonais de r e s sobre um plano α?

Resolução

Temos de analisar três casos.

Primeiro caso

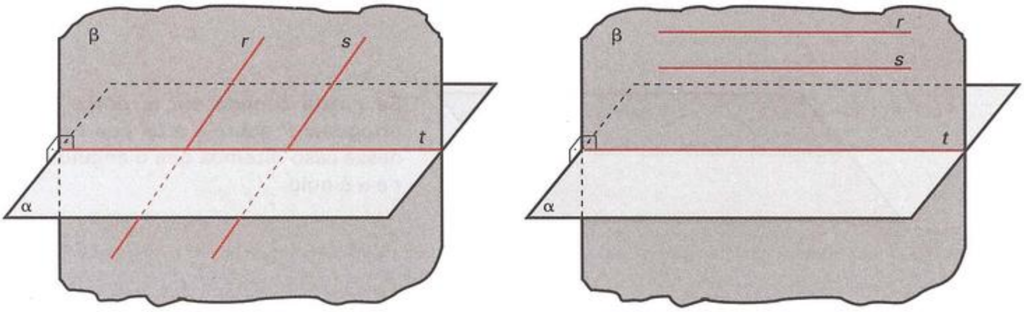
r e *s* são perpendiculares a α.



Nesse caso as projeções de *r* e *s* sobre α são dois pontos *P* e *Q*.

Segundo caso

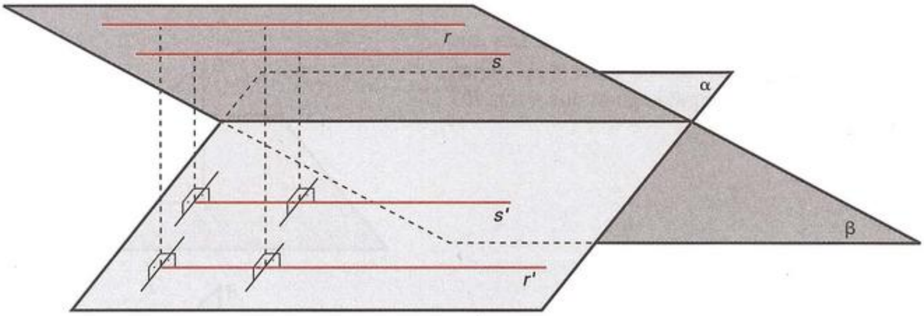
r e *s* não são perpendiculares a α e estão contidas num plano β perpendicular a α.



Nesse caso as projeções ortogonais de *r* e *s* sobre α formam uma única reta *t*.

Terceiro caso

r e *s* estão contidas em um plano β secante a α e não-perpendicular a α.



Nesse caso as projeções ortogonais de *r* e *s* sobre α são duas retas paralelas distintas *r*′ e *s*′.

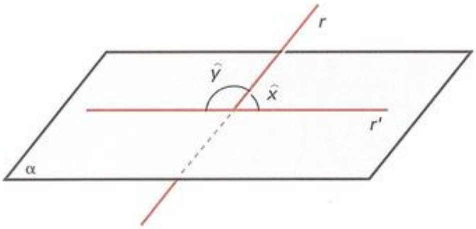
2. Ângulos entre reta e plano

Definição

Sendo *r* uma reta não-perpendicular a um plano α, os ângulos que *r* forma com sua projeção ortogonal sobre α são chamados de "ângulos formados por *r* e α".

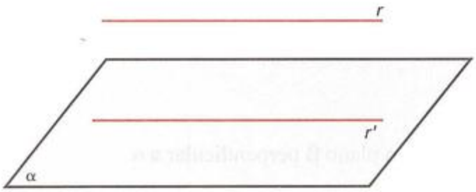
Exemplos

a)



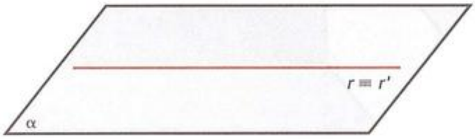
Se r' é a projeção ortogonal de r sobre α, então $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são os ângulos que r forma com α.

b)



Se r é paralela a α, então a projeção ortogonal r', de r sobre α, é paralela a r. Nesse caso, dizemos que o ângulo formado por r e α é nulo.

c)

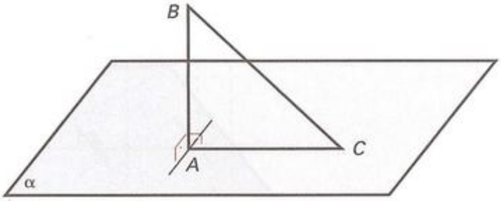


Se r está contida em α, então sua projeção ortogonal r' sobre α é tal que $r \equiv r'$. Também nesse caso dizemos que o ângulo formado por r e α é nulo.

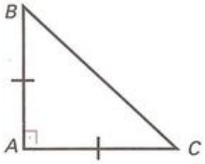
Nota: se uma reta r é perpendicular a um plano α, dizemos que r forma ângulo reto com α.

Exercício resolvido

R.4 Sejam os pontos A, B, C e o plano α tais que $\{A, C\} \subset \alpha$, $B \notin \alpha$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$ e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Qual é a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ forma com o plano α?

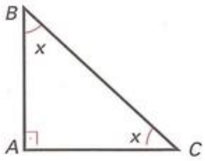


Resolução



A projeção ortogonal da reta $\overleftrightarrow{BC}$ sobre o plano α é a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Assim sendo, o ângulo $B\hat{C}A$ é um ângulo agudo que $\overleftrightarrow{BC}$ forma com α.

Como $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, temos que o triângulo retângulo ABC é isósceles; logo, $B\hat{C}A \cong C\hat{B}A$. Seja x a medida de cada um desses ângulos:



Temos então que $x + x + 90° = 180° \Rightarrow x = 45°$.
Logo, a medida de um ângulo agudo que $\overleftrightarrow{BC}$ forma com α é 45°.

3. Distâncias

3.1. Distância entre dois pontos

Definição

A distância entre dois pontos A e B é a **medida** do segmento de reta $\overline{AB}$.

A medida do segmento $\overline{AB}$ é a distância entre os pontos A e B. Indicamos essa distância por d_{AB} ou simplesmente por AB.

Em particular, se $A \equiv B$, então $d_{AB} = 0$.

Nota: não confunda a notação $\overline{AB}$ com AB:
- $\overline{AB}$ indica **o segmento** de reta de extremos A e B;
- AB indica **a medida** do segmento $\overline{AB}$.

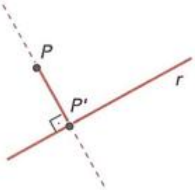
3.2. Distância entre ponto e reta

Definição

A distância entre um ponto P e uma reta r é a medida do segmento $\overline{PP'}$, onde P' é a projeção ortogonal de P sobre r.

A medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre o ponto P e a reta r. Indicamos essa distância por d_{Pr} ou simplesmente por Pr.

Em particular, se $P \in r$, então $d_{Pr} = 0$.



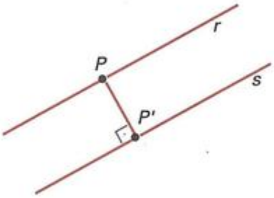
3.3. Distância entre duas retas paralelas

Definição

A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

A medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre as retas r e s. Indicamos essa distância por d_{rs} ou simplesmente por rs.

Em particular, se $r \equiv s$, então $d_{rs} = 0$.



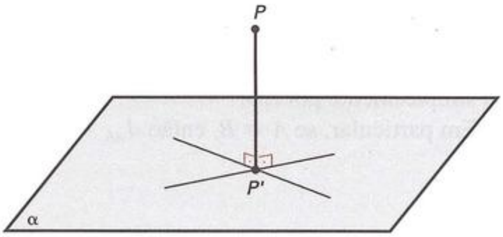
3.4. Distância entre um ponto e um plano

Definição

A distância entre um ponto P e um plano α é a medida do segmento $\overline{PP'}$, onde P' é a projeção ortogonal de P sobre α.

A medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre P e α. Indicamos a distância entre P e α por $d_{P\alpha}$ ou simplesmente por $P\alpha$.

Em particular, se $P \in \alpha$, então $d_{P\alpha} = 0$.

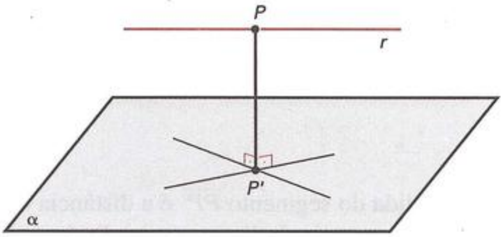


3.5. Distância entre uma reta e um plano paralelo à reta

Definição

A distância entre uma reta r e um plano α, paralelo a r, é a distância de um ponto P qualquer da reta ao plano α.

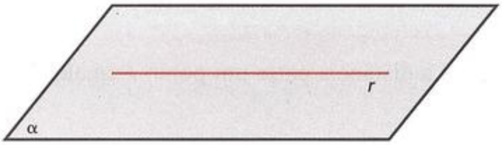
A medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre r e α. Indicamos essa distância por $d_{r\alpha}$ ou simplesmente por $r\alpha$.



3.6. Distância entre uma reta e um plano que contém a reta

Definição

Sejam um plano α e uma reta r, $r \subset \alpha$. A distância entre r e α é nula.



$r \subset \alpha \Leftrightarrow d_{r\alpha} = 0$

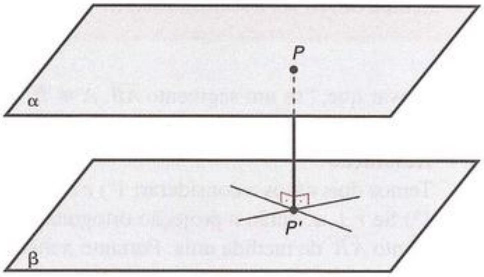
3.7. Distância entre planos paralelos

Definição

A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto P qualquer de um deles ao outro plano.

Se $\alpha \parallel \beta$, então a medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre α e β. Indicamos essa distância por $d_{\alpha\beta}$ ou simplesmente por $\alpha\beta$.

Em particular, se $\alpha \equiv \beta$, então $d_{\alpha\beta} = 0$.

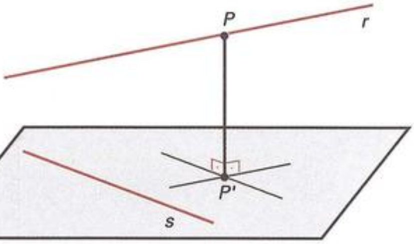


3.8. Distância entre retas reversas

Definição

A distância entre duas retas reversas r e s é a distância entre um ponto qualquer de r ao plano que contém s e é paralelo a r.

Se r e s são reversas, $P \in r$, $s \subset \alpha$ e $r \parallel \alpha$, então a medida do segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre r e s.

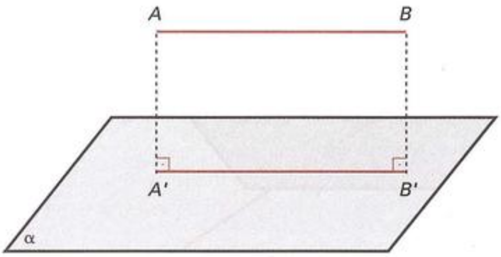


Exercícios resolvidos

R.5 Provar que, "se um segmento $\overline{AB}$, $A \not\equiv B$, está contido em uma reta r paralela a um plano α, então a medida da projeção ortogonal $\overline{A'B'}$, do segmento $\overline{AB}$ sobre α, é igual à medida AB".

Resolução

1º caso: $\overline{AB} \subset r \subset \alpha$. Se $\overline{AB} \subset \alpha$, então $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$. Logo, $A'B' = AB$.
2º caso: $\overline{AB} \subset r$ e $r \parallel \alpha$.



$\overline{AA'} \perp \alpha \Rightarrow \overline{AA'} \perp \overline{A'B'}$;
$\overline{BB'} \perp \alpha \Rightarrow \overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$;
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'} \Rightarrow A'\hat{A}B \cong A\hat{A'}B'$ e $B'\hat{B}A \cong B\hat{B'}A'$ (ângulos colaterais).

Assim, o quadrilátero $ABB'A'$ é um retângulo. Como lados opostos de um retângulo são congruentes, concluímos que $A'B' = AB$.

(c.q.d.)

Nota: a recíproca dessa implicação também é verdadeira. Demonstre-a como exercício. Assim sendo, podemos enunciar:

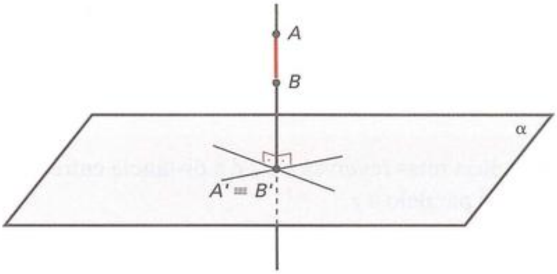
A medida da projeção ortogonal $\overline{A'B'}$ de um segmento $\overline{AB}$, $A \not\equiv B$, sobre um plano α é igual à medida de $\overline{AB}$ se, e somente se, $\overline{AB}$ está contido em uma reta paralela a α ou contida em α.

R.6 Provar que, "se um segmento $\overline{AB}$, $A \not\equiv B$, está contido em uma reta r secante a α, então a medida da projeção ortogonal $\overline{A'B'}$, de $\overline{AB}$ sobre α, é menor que a medida AB".

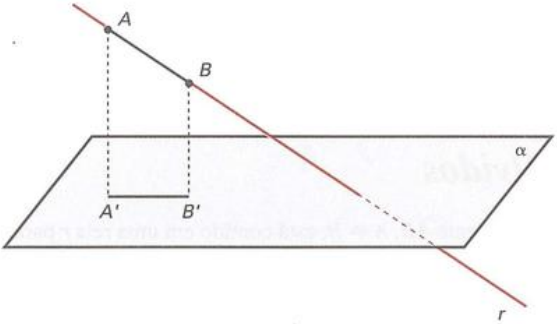
Resolução

Temos dois casos a considerar: 1º) r é perpendicular a α; 2º) r não é perpendicular a α.

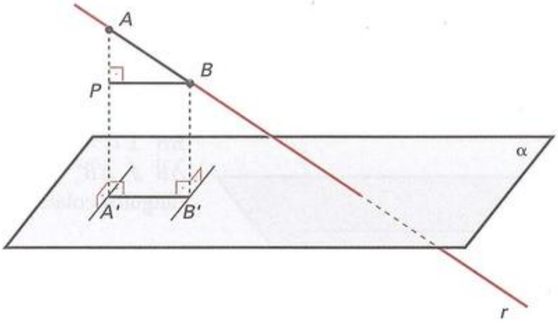
1º) Se $r \perp \alpha$, então a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre α é um ponto $A' \equiv B'$, ou seja, é um segmento $\overline{A'B'}$ de medida nula. Portanto a medida de $\overline{A'B'}$ é menor do que a medida de $\overline{AB}$.



2º) Se r é secante a α e não é perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é um segmento não-nulo $\overline{A'B'}$.



Seja $P \in \overline{AA'}$ tal que $\overleftrightarrow{PB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.



Com raciocínio análogo ao utilizado no R.5, concluímos que:

$$\overline{PB} \cong \overline{A'B'} \quad \textbf{(I)} \text{ e}$$
$$A\hat{P}B \cong P\hat{A'}B'. \quad \textbf{(II)}$$

Como $P\hat{A'}B'$ é ângulo reto, temos, por (II), que o triângulo ABP é retângulo em P. Em todo triângulo retângulo, cada cateto é menor do que a hipotenusa; logo, temos:

$$PB < AB. \quad \textbf{(III)}$$

De (I) e (III), obtemos $A'B' < AB$.

(c.q.d.)

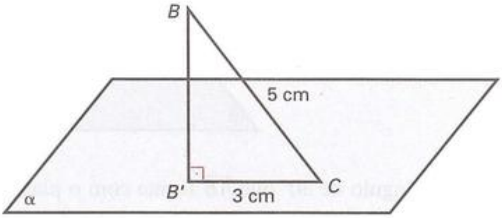
Nota: a recíproca dessa implicação também é verdadeira. Demonstre-a como exercício. Assim sendo, podemos enunciar:

> A medida da projeção ortogonal $\overline{A'B'}$ de um segmento $\overline{AB}$, $A \neq B$, sobre um plano α, é menor que a medida de $\overline{AB}$ se, e somente se, $\overline{AB}$ está contido em uma reta secante a α.

R.7 Sejam os pontos B, C e um plano α tais que $\overline{BC}$ mede 5 cm, a projeção ortogonal de $\overline{BC}$ sobre α mede 3 cm e o ponto C pertence a α. Qual é a distância do ponto B ao plano α?

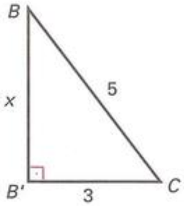
Resolução

Observe que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é secante a α, pois $C \in \alpha$ e a medida da projeção ortogonal de $\overline{BC}$ sobre α é menor do que a medida de $\overline{BC}$.



B' é a projeção ortogonal de B sobre α. Logo, a medida x do segmento $\overline{BB'}$ é a distância entre B e α. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

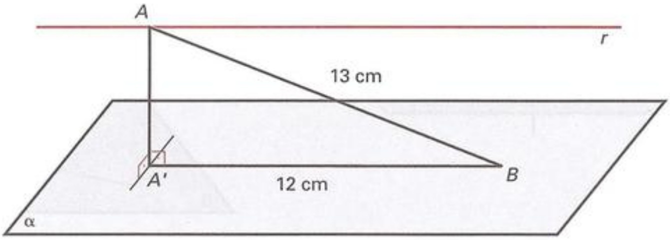
$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \quad \therefore \quad x = \pm 4.$$



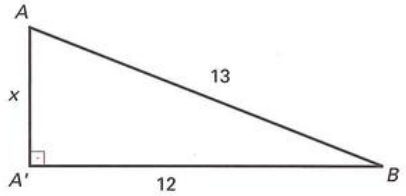
Como distância não pode ter valor negativo, concluímos que $x = 4$.
Logo, $d_{B\alpha} = 4$ cm.

R.8 Uma reta r é paralela a um plano α. Os pontos A e B são tais que $A \in r$, $B \in \alpha$, o segmento $\overline{AB}$ mede 13 cm e a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α mede 12 cm. Qual é a distância entre r e α?

Resolução



A distância entre r e α é, por definição, a distância entre um ponto qualquer de r e o plano α. Essa distância x é a medida do segmento $\overline{AA'}$.



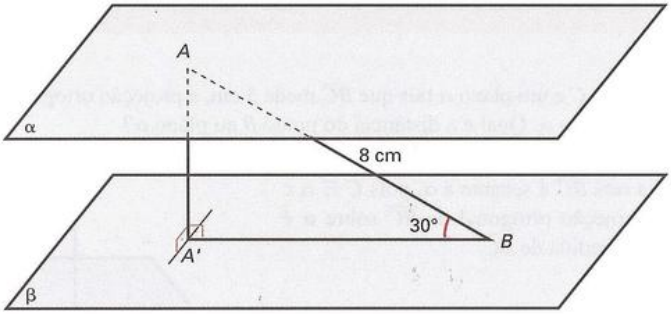
Pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25 \;\therefore\; x = \pm 5$.

Como distância não pode ter valor negativo, temos $x = 5$.

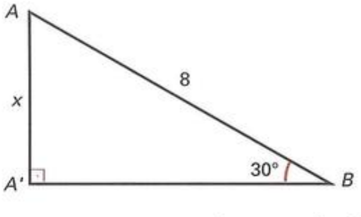
Logo, $d_{r\alpha} = 5$ cm.

R.9 Dois planos α e β são paralelos distintos. Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\overline{AB}$ mede 8 cm e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma um ângulo de 30° com o plano β. Qual é a distância entre os planos α e β?

Resolução



O ângulo de 30° que $\overleftrightarrow{AB}$ forma com o plano β é o ângulo que $\overleftrightarrow{AB}$ forma com sua projeção ortogonal $\overline{A'B}$ sobre o plano β. A distância entre α e β é a medida x do segmento $\overline{AA'}$. Temos então:

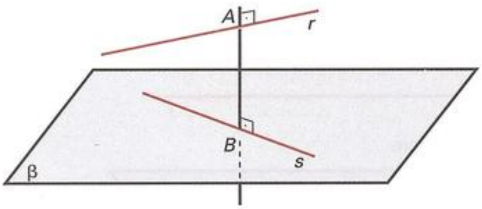


$$\text{sen } 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \quad \therefore\; x = 4.$$

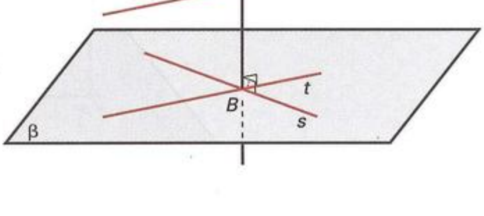
Logo, $d_{\alpha\beta} = 4$ cm.

R.10 Duas retas r e s são reversas. Os pontos A e B são tais que $A \in r$, $B \in s$, $\overline{AB}$ mede 6 m e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a r e s simultaneamente. Qual é a distância entre as retas r e s?

Resolução

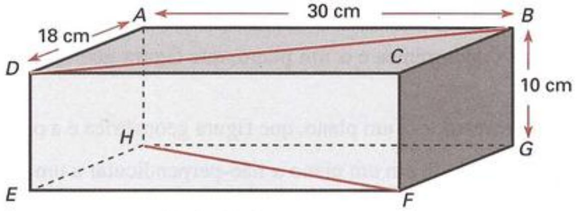


A reta s e a reta t, que passa por B e é paralela a r, determinam um plano $\beta = \text{pl}(t, s)$ paralelo a r.



Por definição de distância entre retas reversas, a distância entre r e s é aquela entre um ponto de r e o plano β. Essa distância é a medida do segmento $\overline{AB}$.
Logo, $d_{rs} = 6$ m.

R.11 Consideremos uma caixa de sapatos com as dimensões dadas na figura.



Qual é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$?

Resolução

O plano pl(H, G, F) é paralelo à reta $\overleftrightarrow{BD}$. Assim, a distância entre o ponto B e o plano pl(H, G, F) é a distância entre as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$.
Logo, $d_{\overleftrightarrow{BD}\,\overleftrightarrow{HF}} = 10$ cm.

4. Resumo dos teoremas

T.40 Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é um ponto.

T.41 Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é uma reta.

T.42 A medida da projeção ortogonal $\overline{A'B'}$ de um segmento $\overline{AB}$, $A \neq B$, sobre um plano α é igual à medida de $\overline{AB}$ se, e somente se, $\overline{AB}$ está contido em uma reta paralela a α ou contida em α.

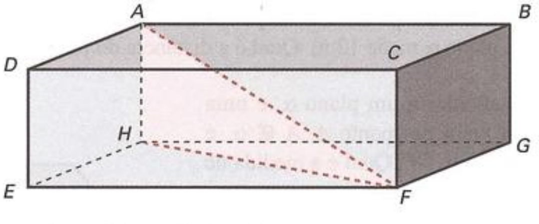
T.43 A medida da projecão ortogonal $\overline{A'B'}$ de um segmento $\overline{AB}$, $A \neq B$, sobre um plano α, é menor do que a medida de $\overline{AB}$ se, e somente se, $\overline{AB}$ está contido em uma reta secante a α.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.8, B.9, B.10, B.14, B.16, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.7, B.11, B.12, B.13, B.15, B.17, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Considere a caixa de sapatos representada na figura, em que $\overline{AF}$ mede 36 cm e $\overline{AH}$ mede 18 cm.



a) Qual é a distância do ponto A ao plano pl(E, F, G)?
b) Qual é a distância do ponto B ao plano pl(E, F, G)?
c) Qual é a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AF}$ sobre o plano pl(E, F, G)?

d) Qual é a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AF}$ forma com o plano pl(E, F, G)?
e) Qual é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$?
f) Projetando ortogonalmente o segmento $\overline{AF}$ sobre o plano pl(D, C, F), obtemos que figura geométrica? Descreva essa figura.
g) Projetando o triângulo AHF sobre o plano pl(A, E, H), obtemos que figura geométrica? Descreva essa figura.

B.2 Sendo r e s duas retas concorrentes e α um plano, que figura geométrica é a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α?

B.3 Sendo r e s duas retas reversas e α um plano, que figura geométrica é a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α?

B.4 Um triângulo ABC está contido em um plano α não-perpendicular a um plano β. Que figura geométrica é a projeção ortogonal do triângulo ABC sobre o plano β?

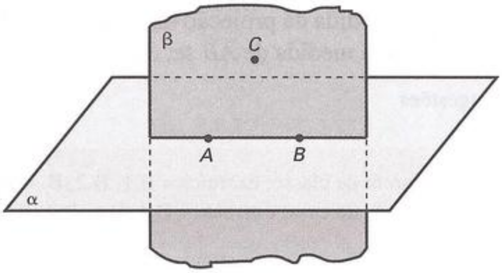
B.5 As projeções ortogonais de duas retas r e s sobre um plano α são dois pontos. Qual é a posição relativa entre r e s?

B.6 As projeções ortogonais de duas retas r e s sobre um plano α são duas retas paralelas distintas r' e s'. Qual é a posição relativa entre r e s?

B.7 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:

a) Se um ponto P, pertencente a um plano α, é a projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre α, então essa figura é um ponto.
b) Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto, então r é perpendicular a α.
c) Se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre um plano α são segmentos congruentes.
d) Se um segmento $\overline{AB}$ está contido em uma reta paralela a um plano α, então a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é um segmento $\overline{A'B'}$ congruente a $\overline{AB}$.
e) A projeção ortogonal de um ângulo $A\hat{O}B$ sobre um plano é sempre um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente a $A\hat{O}B$.
f) Se um ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo contido em um plano α paralelo a um plano β, então a projeção ortogonal do ângulo $A\hat{O}B$ sobre β é um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente a $A\hat{O}B$.

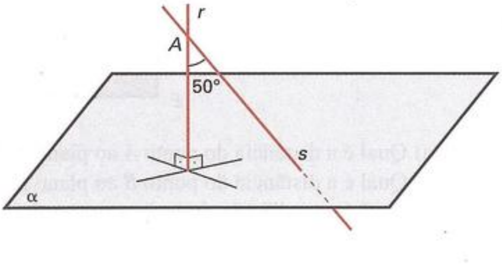
B.8 Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si e sejam A, B e C três pontos distintos tais que $\{A, B\} \subset (\alpha \cap \beta)$, $C \in \beta$ e $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$. Qual é a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ forma com o plano α?



B.9 Um ponto A dista 10 cm de um plano α, e um ponto B, $B \in \alpha$, é tal que $\overline{AB}$ mede 20 cm. Qual é a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com o plano α?

B.10 Um ponto A, pertencente a um plano α, e um ponto B, $B \notin \alpha$, são tais que $\overline{AB}$ mede 20 m e a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o plano α mede 12 m. Qual é a distância do ponto B ao plano α?

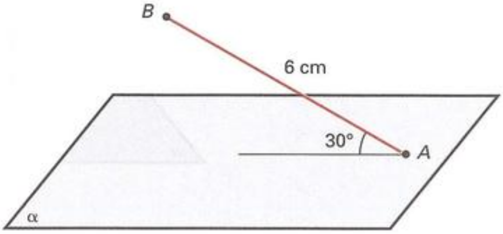
B.11 Uma reta r é perpendicular a um plano α, e uma reta s concorre com r em um ponto A, $A \notin \alpha$, e forma com r um ângulo de 50°. Qual é a medida de um ângulo obtuso que s forma com α?



B.12 Dois planos α e β, perpendiculares entre si, e três pontos A, B e C são tais que $\{A, B\} \subset (\alpha \cap \beta)$, $C \in \beta$, $\overline{AC}$ mede 5 cm, $\overline{BC}$ mede 5 cm e $\overline{AB}$ mede 8 cm. Calcule a distância do ponto C ao plano α.

B.13 Um ponto A, pertencente a um plano α, e um ponto B, $B \notin \alpha$, são tais que $\overline{AB}$ mede 6 cm e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com α um ângulo de 30°.
Calcule:

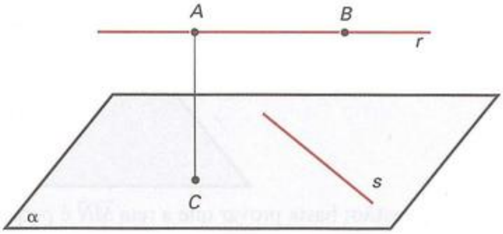
a) a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α;
b) a distância do ponto B ao plano α.



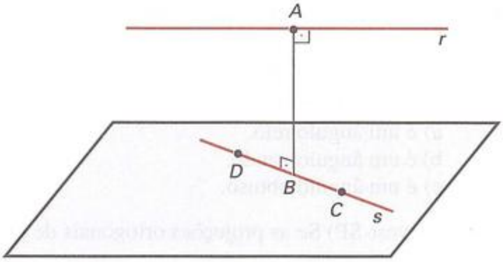
B.14 Dois planos α e β são paralelos distintos. Dois pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\overline{AB}$ mede 5 cm e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma um ângulo de 60° com o plano α. Calcule a distância entre os planos α e β.

B.15 A distância entre dois planos paralelos distintos α e β é 6 cm. Dois pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$ e $\overline{AB}$ mede 12 cm. Calcule a medida de um ângulo obtuso que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com o plano α.

B.16 Duas retas r e s são reversas e α é o plano que contém s e é paralelo a r. Três pontos A, B e C são tais que $\{A, B\} \subset r$, $C \in \alpha$, $\overline{AC} \perp \alpha$, $\overline{AB}$ mede 6 cm e $\overline{BC}$ mede 10 cm. Calcule a distância entre as retas r e s.

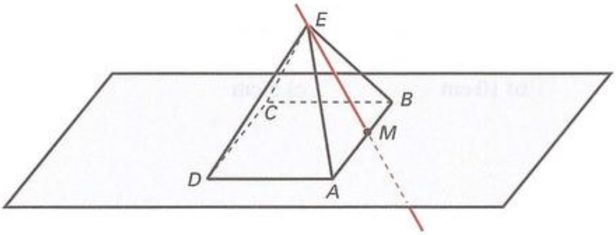


B.17 Duas retas r e s são reversas e quatro pontos distintos entre si A, B, C e D são tais que $A \in r$, $B \in s$, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a r e s simultaneamente, $\{C, D\} \subset s$, $\overline{DC}$ mede 6 cm, $\overline{AC}$ mede 5 cm e $\overline{AD}$ mede 5 cm. Calcule a distância entre as retas r e s.

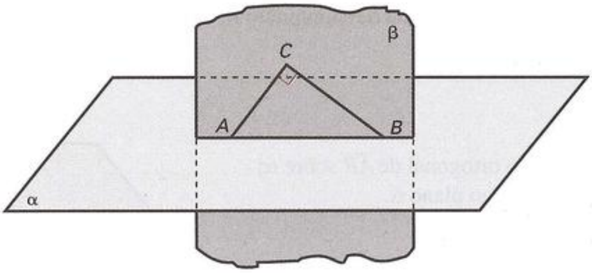


Exercícios complementares

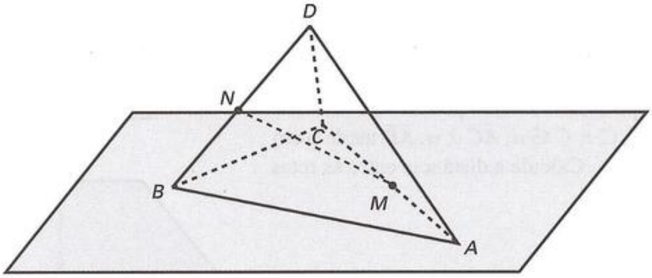
C.1 Sejam cinco pontos não-coplanares A, B, C, D e E tais que A, B, C e D são vértices de um quadrado de lado 3 cm e $\overline{AE} \cong \overline{BE} \cong \overline{CE} \cong \overline{DE} \cong \overline{AB}$. Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, calcule a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{EM}$ forma com o plano pl(A, B, C).



C.2 Dois planos α e β são perpendiculares entre si. Três pontos A, B e C são tais que $\{A, B\} \subset (\alpha \cap \beta)$, $C \in \beta$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$, $\overline{AC}$ mede 6 cm e $\overline{BC}$ mede 8 cm. Calcule a distância do ponto C ao plano α.



C.3 Quatro pontos não-coplanares A, B, C e D são tais que os triângulos ABC, ADC, ADB e BCD são equiláteros. Sendo M e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente, prove que a medida do segmento $\overline{MN}$ é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.



Sugestão: basta provar que a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ simultaneamente.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Se um dos lados de um ângulo reto é paralelo a um plano e o outro lado não é perpendicular a esse plano, a projeção ortogonal do ângulo sobre o plano:

a) é um ângulo reto.
b) é um ângulo agudo.
c) é um ângulo obtuso.
d) depende da posição do plano.
e) Nenhuma das anteriores.

V.2 (Fuvest-SP) Se as projeções ortogonais de um conjunto de retas sobre um plano α são retas paralelas entre si, então necessariamente as retas do conjunto:

a) são paralelas entre si.
b) são paralelas ao plano α.
c) estão contidas em um mesmo plano.
d) estão contidas em planos paralelos.
e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

V.3 (Fuvest-SP) São dados um plano α, uma reta r contida em α e uma reta s perpendicular a r, mas não a α. Demonstre que a projeção ortogonal de s sobre α é perpendicular a r.

V.4 (Cescem) Uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma um ângulo de medida 30° com um plano α. Se $A \in \alpha$ e $\overline{AB}$ mede 12 cm, então a distância do ponto B ao plano α é:

a) 12 cm
b) 10 cm
c) 5 cm
d) 8 cm
e) 6 cm

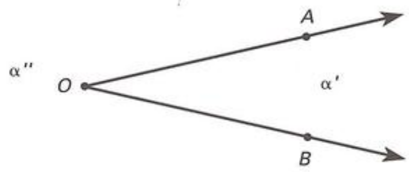
Capítulo 48

Ângulos no espaço

1. Ângulo – revisão

Vamos fazer uma revisão sobre o conceito de ângulo para que as definições deste capítulo sejam perfeitamente entendidas.

Consideremos duas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ não-contidas em uma mesma reta.



O conjunto $G = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ separa o plano $\alpha = \text{pl}(A, O, B)$ em dois conjuntos α' e α'' tais que:

I. α' é convexo e α'' não é convexo;

II. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;

III. $\alpha' \cup \alpha'' \cup G = \alpha$.

Chama-se **ângulo** ou **região angular** o conjunto $G \cup \alpha'$.

- Indicamos esse ângulo por $A\hat{O}B$.
- O conjunto **convexo** α' é chamado de "**interior** do ângulo".
- O conjunto **não-convexo** α'' é chamado de "**exterior** do ângulo".
- O ponto O é chamado de "**vértice** do ângulo".
- As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamadas de "**lados** do ângulo".

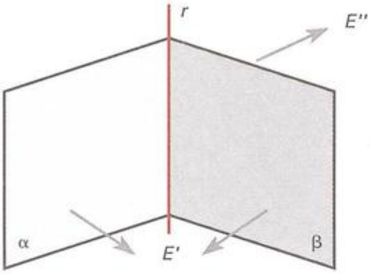
Notas

1. Admitimos como conhecidos os conceitos de ângulos congruentes, bissetriz de um ângulo, medida de um ângulo, ângulo reto, ângulo agudo, ângulo obtuso e ângulos formados por duas paralelas e uma transversal.

2. Alguns autores definem ângulo como sendo o conjunto $G = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ e região angular como o conjunto $G \cup \alpha'$. A definição pela qual optamos não faz distinção entre ângulo e região angular.

2. Diedro ou ângulo diédrico

Consideremos dois semiplanos distintos α e β de mesma origem r e não-contidos em um mesmo plano:



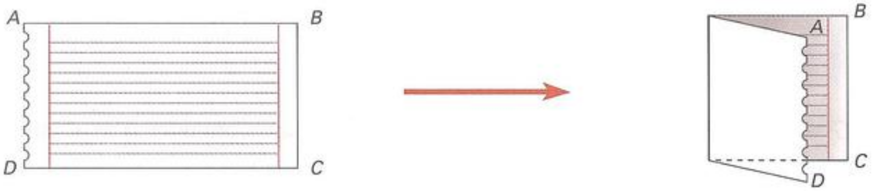
O conjunto $G = \alpha \cup \beta$ separa o espaço E em dois conjuntos E' e E'' tais que:

I. E' é convexo e E'' não é convexo;
II. $E' \cap E'' = \varnothing$;
III. $E' \cup E'' \cup G = E$.

Chama-se "**diedro** (ou **ângulo diédrico**) de aresta r e faces α e β" o conjunto $G \cup E'$.

- Indicamos esse diedro por $\alpha\widehat{r}\beta$.
- O conjunto convexo E' é chamado de "**interior** do diedro".
- O conjunto não-convexo E'' é chamado de "**exterior** do diedro".
- O conjunto $G = \alpha \cup \beta$ é chamado de "**superfície** do diedro".

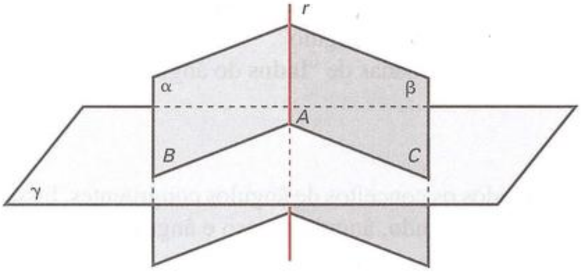
Para visualizar concretamente a superfície de um diedro, dobre uma folha de caderno conforme a figura abaixo:



2.1. Secção de um diedro

Definição

Chama-se "**secção de um diedro** de aresta r" a intersecção do diedro com um plano γ secante a r.

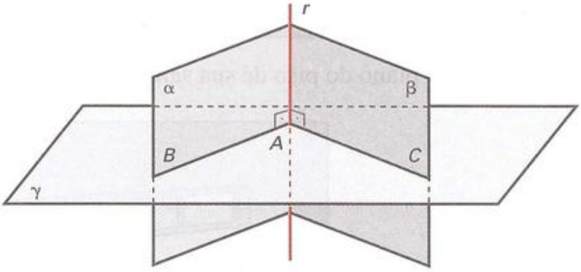


A região angular $B\widehat{A}C$ é uma secção do diedro $\alpha\widehat{r}\beta$.

2.2. Secção normal ou secção reta de um diedro

Definição

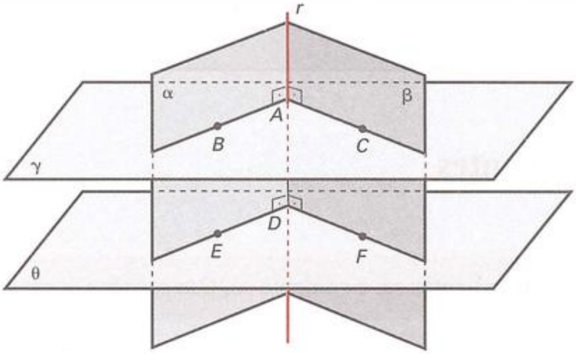
Chama-se "**secção normal** ou **secção reta de um diedro** de aresta r" a intersecção desse diedro com um plano γ perpendicular a r.



$r \perp \gamma \Rightarrow B\hat{A}C$ é uma secção normal do diedro $\alpha\hat{r}\beta$.

Propriedade

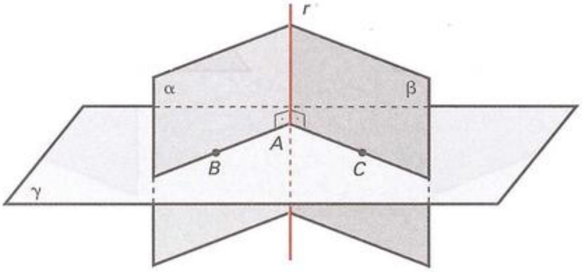
Dois planos paralelos entre si e secantes à aresta de um diedro determinam nesse diedro secções congruentes.



$\gamma \parallel \theta \Rightarrow B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$

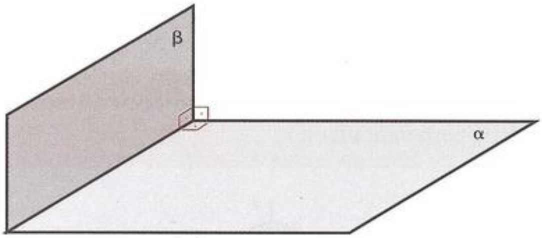
2.3. Medida de um diedro

A medida de um diedro é a medida de uma de suas secções normais.

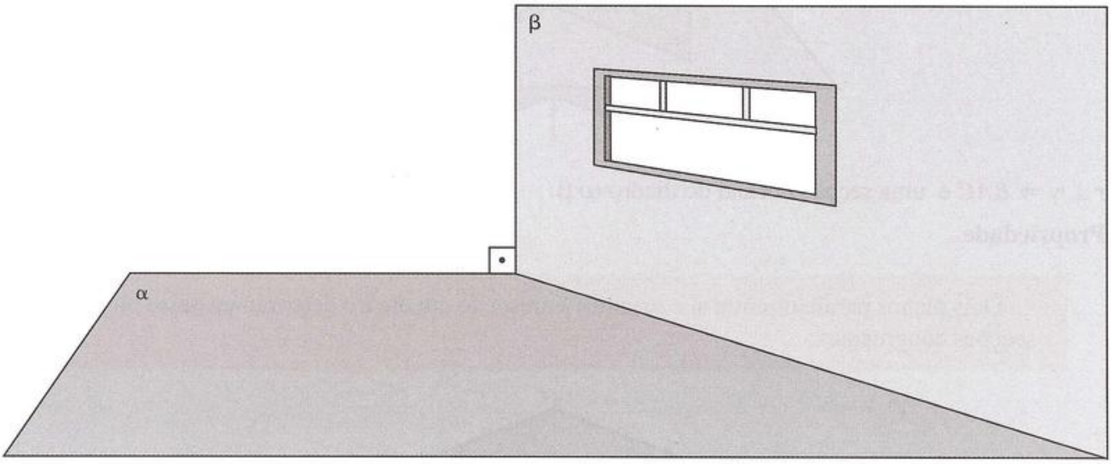


Se $B\hat{A}C$ é uma secção normal do diedro $\alpha\hat{r}\beta$, então a medida desse diedro é a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

Nota: um diedro é **reto** se, e somente se, sua medida for 90°.



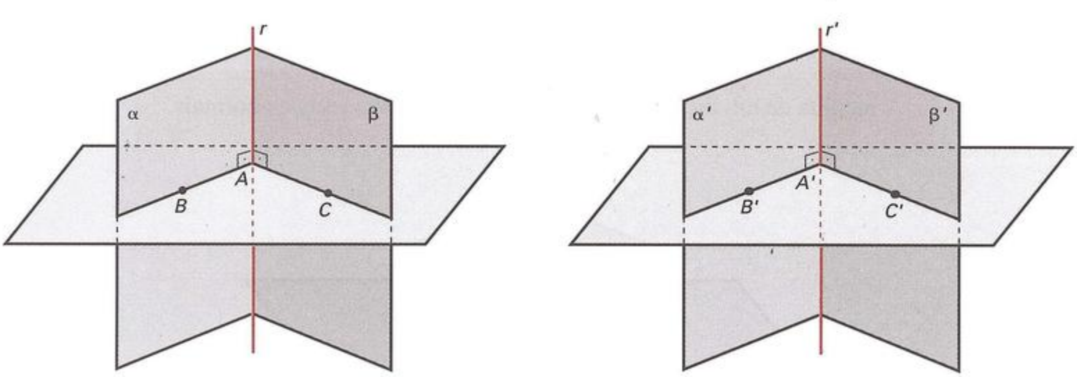
Visualize um diedro reto observando o plano do piso de sua sala de aula e o plano de uma das paredes.



2.4. Diedros congruentes

Definição

Dois diedros são congruentes se, e somente se, têm secções normais congruentes.

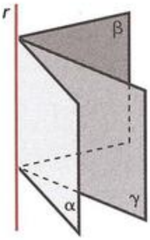


Se $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$ são secções normais congruentes, então os diedros $\alpha\hat{r}\beta$ e $\alpha'\hat{r'}\beta'$ são congruentes: $\alpha\hat{r}\beta \cong \alpha'\hat{r'}\beta'$.

2.5. Bissetor de um diedro

Definição

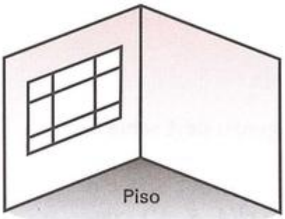
Bissetor de um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ é um semiplano γ, de origem r, que passa por um ponto interior do diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e $\alpha\hat{r}\gamma \cong \beta\hat{r}\gamma$.



γ é bissetor $\Leftrightarrow \alpha\hat{r}\gamma \cong \beta\hat{r}\gamma$

Exercícios resolvidos

R.1 Em uma sala de aula, duas paredes formam um diedro e são perpendiculares ao plano do piso.

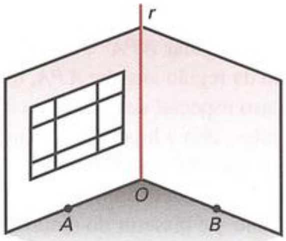


a) Descrever uma maneira de medir esse diedro.

b) Sendo o plano do teto paralelo ao plano do piso, que relação existe entre as medidas das secções determinadas nesse diedro pelos planos do teto e do piso?

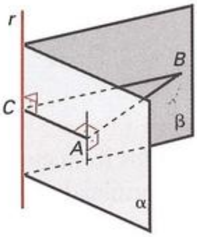
Resolução

a) Seja r a reta comum aos planos das paredes e seja $A\hat{O}B$ a secção do diedro determinada pelo plano do piso.
Como o plano do piso é perpendicular a r, temos que $A\hat{O}B$ é uma secção normal do diedro e, portanto, que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é a medida do diedro.



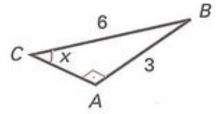
b) Dois planos paralelos determinam em um diedro secções congruentes; logo, as secções determinadas no diedro pelos planos do teto e do piso têm medidas iguais.

R.2 Sejam $\alpha\hat{r}\beta$ um diedro e três pontos A, B e C tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\overleftrightarrow{AC} \perp r$, $\overleftrightarrow{CB} \perp r$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$, $\overline{AB}$ mede 3 cm e $\overline{CB}$ mede 6 cm. Determinar a medida desse diedro.



Resolução

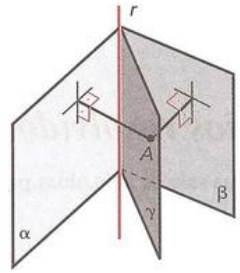
O plano pl(A, B, C) é perpendicular a r; portanto a secção $B\hat{C}A$ é uma secção normal do diedro. Assim, a medida x do ângulo $B\hat{C}A$ é a medida do diedro.
Temos:



$$\text{sen}\, x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

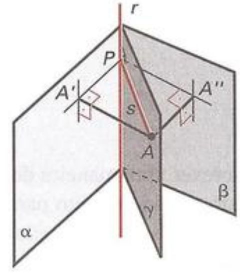
Como $B\hat{C}A$ é agudo, então $x = 30°$.
Logo, a medida do diedro é 30°.

R.3 Um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ mede 80°. Um ponto A, interior ao diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e equidistante de α e β, pertence a um semiplano γ de origem na reta r. Calcular a medida do diedro $\alpha\hat{r}\gamma$.



Resolução

Sejam A' e A'' as projeções ortogonais de A sobre α e β, respectivamente. A reta r é perpendicular ao plano pl(A, A', A''), pois $r \perp \overleftrightarrow{AA'}$ e $r \perp \overleftrightarrow{AA''}$. Seja P o ponto comum à reta r e ao plano pl(A, A', A''), conforme figura ao lado.

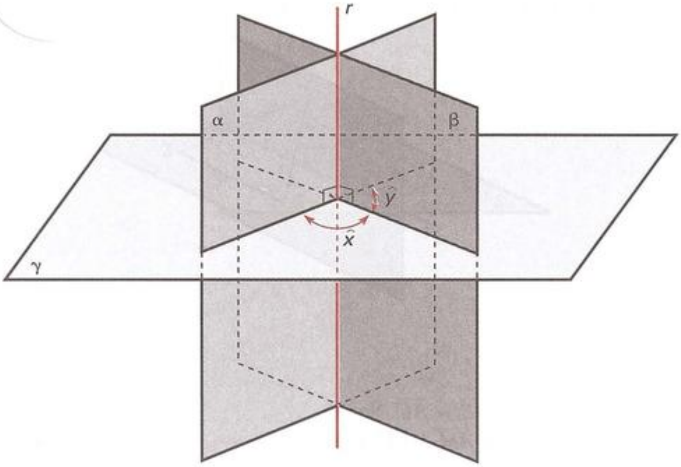


A região angular $A'\hat{P}A''$ é secção normal do diedro $\alpha\hat{r}\beta$; portanto, $A'\hat{P}A''$ mede 80°. Devemos calcular a medida da região angular $A'\hat{P}A$, que é secção normal do diedro $\alpha\hat{r}\gamma$.
Pelo caso especial de congruência, temos que os triângulos $A'PA$ e $A''PA$ são congruentes, pois ambos são retângulos, têm a hipotenusa comum $\overline{AP}$, e os catetos $\overline{AA'}$ e $\overline{AA''}$ são congruentes. Dessa congruência, concluímos que $A'\hat{P}A \cong A''\hat{P}A$.
Logo, $\overrightarrow{PA}$ é bissetriz do ângulo $A'\hat{P}A''$ e, portanto, a medida do ângulo $A'\hat{P}A$ é 40°. Temos, então, que o semiplano γ é bissetor do diedro $\alpha\hat{r}\beta$. Assim, o diedro $\alpha\hat{r}\gamma$ mede 40°.

3. Ângulos formados por dois planos secantes

Definição

Os ângulos formados por dois planos secantes são os ângulos das **secções normais** dos diedros determinados por eles.

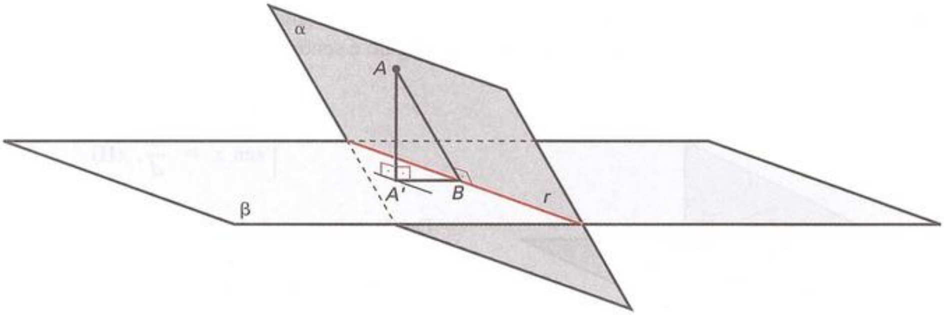


Se $r \perp \gamma$, então $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são os ângulos formados pelos planos α e β.

Nota: define-se como ângulo formado por dois planos paralelos o ângulo nulo.

Exercícios resolvidos

R.4 Dois planos α e β são secantes cuja reta comum é r. Dois pontos distintos A e B são tais que $B \in r$, $A \in \alpha$, $\overline{AB} \perp r$, $\overline{AB}$ mede 8 cm e a projeção ortogonal $\overline{A'B}$, de $\overline{AB}$ sobre β, mede 4 cm. Qual é a medida de um ângulo agudo formado por α e β?

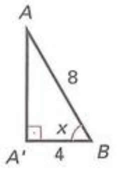


Resolução

Como A' é projeção ortogonal de A sobre β, temos que $\overline{AA'} \perp \beta$ e, portanto, $\overline{AA'} \perp r$.

Ora, se $r \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $r \perp \overline{AA'}$, então $r \perp \text{pl}(A, B, A')$.

Portanto a região angular $A\hat{B}A'$ é uma secção normal de um dos diedros formados pelos planos α e β. Assim, a medida x dessa secção normal é a medida de um ângulo agudo formado por α e β. Logo, temos:

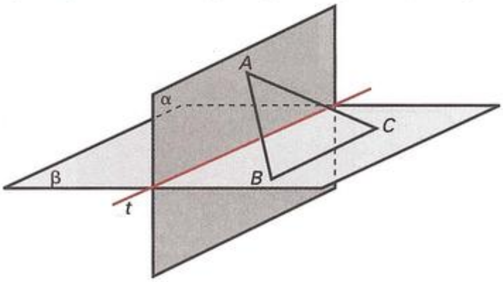


$$\cos x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°.$$

Portanto os planos α e β formam um ângulo agudo de medida 60°.

R.5 Dois planos α e β são perpendiculares entre si e a reta comum a ambos é t. Três pontos A, B e C são tais que $A \in \alpha$, $\{B, C\} \subset \beta$, $\overline{AB}$ mede 13 cm, $\overline{AC}$ mede 13 cm, $\overline{BC}$ mede 10 cm e a distância entre A e β é 6 cm.

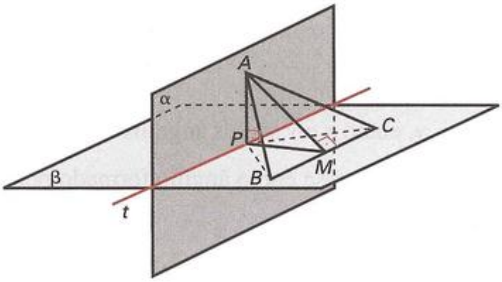
Calcular a medida de um ângulo agudo formado pelos planos pl(A, B, C) e β.



Resolução

O triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$, pois a altura e a mediana relativas à base de um triângulo isósceles coincidem.

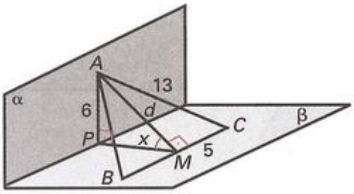
Seja P, $P \in t$, tal que $\overleftrightarrow{AP} \perp \beta$.



Vamos provar que $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

De fato, pelo caso especial de congruência de triângulos, temos que $\triangle APB \cong \triangle APC$, pois ambos são retângulos, têm um cateto comum $\overline{AP}$ e suas hipotenusas são congruentes. Dessa congruência, concluímos que $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ e que, portanto, o triângulo BPC é isósceles. Como M é ponto médio de $\overline{BC}$ e a mediana relativa à base de um triângulo isósceles coincide com a altura, temos que $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Ora, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PM}$; logo, $\overleftrightarrow{BC} \perp$ pl(A, P, M) e, portanto, o ângulo $A\hat{M}P$ é um ângulo agudo formado pelos planos pl(A, B, C) e β. Sendo x a medida desse ângulo e sendo d a medida do segmento $\overline{AM}$, temos:



$$\begin{cases} d^2 + 5^2 = 13^2 & \textbf{(I)} \\ \text{sen } x = \dfrac{6}{d}. & \textbf{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos $d = \pm 12$.

Como d é medida de um segmento, temos $d = 12$.

Substituindo $d = 12$ em (II):

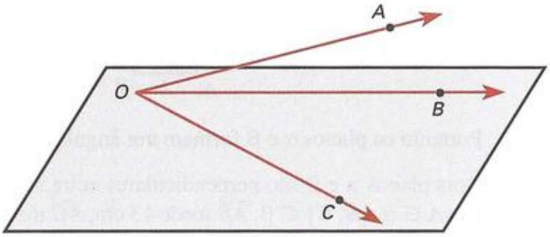
$$\text{sen } x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Como $A\hat{M}P$ é agudo, temos $x = 30°$.

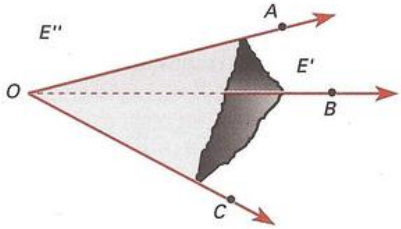
Logo, a medida de um ângulo agudo formado pelos planos pl(A, B, C) e β é 30°.

4. Triedros

Sejam três semi-retas, não-coplanares, de mesma origem O: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, conforme figura ao lado.



Seja G a reunião das regiões angulares limitadas por essas semi-retas.



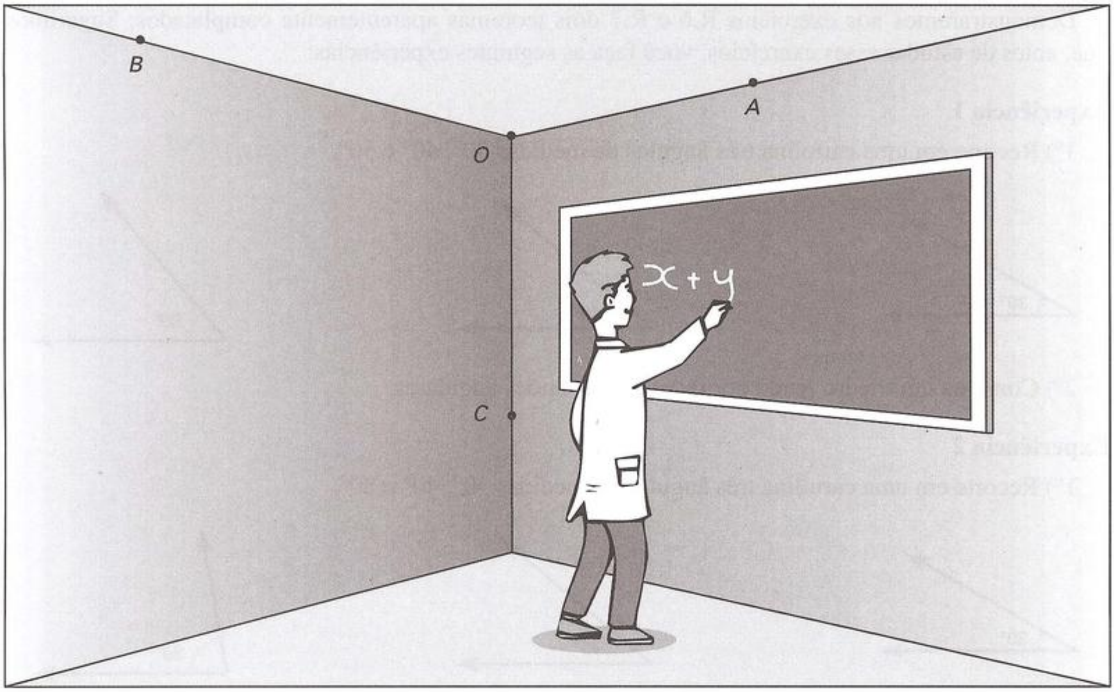
A região G separa o espaço E em duas regiões E' e E'' tais que:

I. E' é convexo e E'' não é convexo;
II. $E' \cap E'' = \varnothing$;
III. $E' \cup E'' \cup G = E$.

Chama-se "**triedro** de vértice O e arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$" o conjunto $G \cup E'$.

- Indicamos o triedro de vértice O e arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ pelo símbolo $(\hat{O}, A, B, C)$.
- As regiões angulares de G são chamadas de "**faces** do triedro".
- O conjunto G é chamado de "**superfície** do triedro".
- O conjunto E' é chamado de "**interior** do triedro".
- O conjunto E'' é chamado de "**exterior** do triedro".

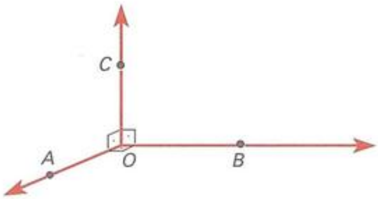
Para visualizar concretamente um triedro, observe em sua sala de aula um ponto O comum ao plano do teto e aos planos de duas paredes.



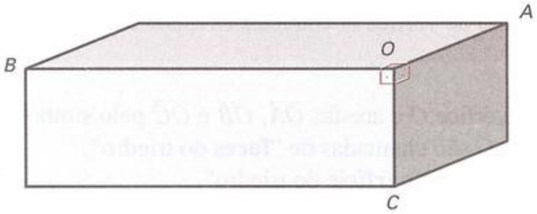
O ponto O é vértice de um triedro cujas arestas são $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

4.1. Triedro trirretângulo

Triedro trirretângulo é todo triedro cujas arestas são perpendiculares entre si.



Visualize esse tipo de triedro em uma caixa de sapatos:



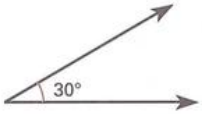
O triedro $(\hat{O}, A, B, C)$ é trirretângulo.

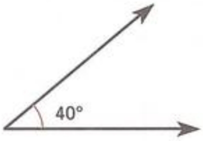
4.2. Experiências com o triedro

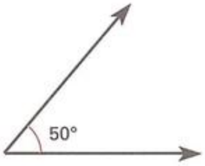
Demonstraremos nos exercícios R.6 e R.7 dois teoremas aparentemente complicados. Sugerimos que, antes de estudar esses exercícios, você faça as seguintes experiências:

Experiência 1

1º) Recorte em uma cartolina três ângulos de medidas 30°, 40° e 50°.



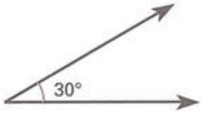


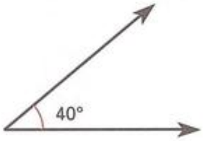


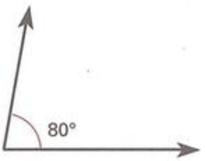
2º) Construa um triedro tendo por faces essas regiões angulares.

Experiência 2

1º) Recorte em uma cartolina três ângulos de medidas 30°, 40° e 80°.







2º) Construa um triedro tendo por faces essas regiões angulares.

Somente depois de realizar as duas experiências, responda:

I. Existe um triedro cujas faces tenham medidas 30°, 40° e 50°?

II. Existe um triedro cujas faces tenham medidas 30°, 40° e 80°?

III. Recortando as faces de um triedro qualquer e colocando-as num mesmo plano formando ângulos adjacentes, a soma das medidas dos ângulos será certamente menor do que x. Qual é o valor mínimo de x?

IV. Qual é a condição para que três medidas de ângulos possam ser medidas das faces de um triedro?

Exercícios resolvidos

R.6 Provar que "em todo triedro a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das outras duas".

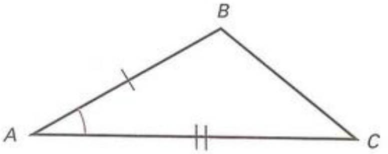
Nota: lembre-se de que cada face do triedro é uma região angular; assim, a medida de uma face é a medida de um ângulo.

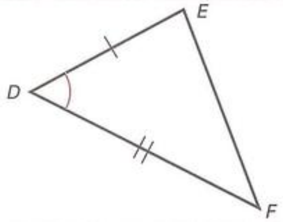
Resolução

Vamos usar nessa demonstração duas propriedades dos triângulos:

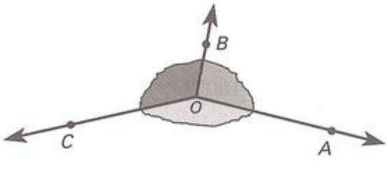
G.1 Cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

G.2 Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} < \overline{EF}$, então $B\hat{A}C < E\hat{D}F$.



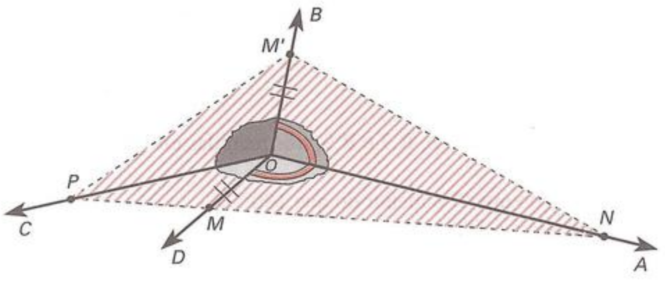


Consideremos um triedro de faces $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$ tais que $A\hat{O}C \geqslant B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C \geqslant A\hat{O}B$:



Seja a semi-reta $\overrightarrow{OD}$ contida na face $A\hat{O}C$ tal que $A\hat{O}D \cong A\hat{O}B$.

Sejam os pontos M e M' tais que $M \in \overrightarrow{OD}$, $M' \in \overrightarrow{OB}$ e $\overline{OM} \cong \overline{OM'}$. Consideremos um ponto N qualquer de $\overrightarrow{OA}$ de modo que o plano pl(M, N, M') seja secante à semi-reta $\overrightarrow{OC}$ em um ponto P:



Temos:

I. $\triangle ONM \cong \triangle ONM'$ pelo caso LAL. Logo $\overline{MN} \cong \overline{NM'}$.
II. $\overline{PN} < \overline{PM'} + \overline{NM'}$, pela propriedade G.1.
III. Como $\overline{PN} = \overline{PM} + \overline{MN}$, temos, de (II), $\overline{PM} + \overline{MN} < \overline{PM'} + \overline{NM'}$.

Por (I), temos que $\overline{MN} \cong \overline{NM'}$; logo, a desigualdade anterior pode ser escrita como:

$$\overline{PM} + \overline{NM'} < \overline{PM'} + \overline{NM'} \Rightarrow \overline{PM} < \overline{PM'}.$$

IV. Nos triângulos MOP e $M'OP$, temos que $\overline{OM} \cong \overline{OM'}$, $\overline{OP}$ é lado comum e $\overline{PM} < \overline{PM'}$. Assim, pela propriedade G.2, temos $M\hat{O}P < M'\hat{O}P$.
V. Somando o ângulo $N\hat{O}M$ a ambos os membros da desigualdade $M\hat{O}P < M'\hat{O}P$, obtemos:

$$M\hat{O}P + N\hat{O}M < M'\hat{O}P + N\hat{O}M.$$

Como $M\hat{O}P + N\hat{O}M = N\hat{O}P$ e $N\hat{O}M \cong N\hat{O}M'$, temos que:

$$N\hat{O}P < M'\hat{O}P + N\hat{O}M'.$$

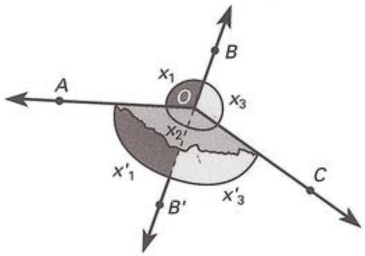
Ora, se a maior face de um triedro é menor do que a soma das outras duas, então qualquer face é menor do que a soma das outras duas.

(c.q.d.)

R.7 Provar que "em todo triedro a soma das medidas das três faces é menor que 360°".

Resolução

Consideremos o triedro de faces $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ com medidas respectivamente iguais a x_1, x_2 e x_3. Seja $\overrightarrow{OB'}$ a semi-reta oposta a $\overrightarrow{OB}$, conforme figura ao lado.



Temos que $x_1' = 180° - x_1$ e $x_3' = 180° - x_3$.
Pelo exercício anterior, temos, no triedro $(\hat{O}, A, B', C)$:

$$x_2 < x_1' + x_3', \text{ ou seja, } x_2 < 180° - x_1 + 180° - x_3.$$

Logo, $x_1 + x_2 + x_3 < 360°$.

(c.q.d.)

R.8 Existe triedro cujas faces meçam 70°, 80° e 160°?

Resolução

Não existe um triedro com essas medidas, pois uma das faces teria medida maior do que a soma das outras duas: $160° > 70° + 80°$.

R.9 Provar que, "se x_1, x_2 e x_3 são medidas das faces de um triedro, então $x_1 > |x_3 - x_2|$, $x_2 > |x_3 - x_1|$ e $x_3 > |x_2 - x_1|$".

Resolução

Vamos demonstrar apenas que $x_1 > |x_3 - x_2|$, pois as outras demonstrações são análogas.
De fato, pelo exercício R.6, temos que $x_3 < x_1 + x_2$ e $x_2 < x_1 + x_3$.
Logo, $x_3 - x_2 < x_1$ e $x_2 - x_3 < x_1$.
Portanto $x_1 > |x_3 - x_2|$.

Nota: de acordo com os exercícios R.6, R.7 e R.9, três medidas em graus x_1, x_2 e x_3 são medidas das faces de um triedro se, e somente se:

I. cada uma delas é maior do que 0° e menor do que 180°;
II. a soma delas é menor do que 360°;
III. $|x_3 - x_2| < x_1 < x_3 + x_2$.

R.10 Para que valores de x as medidas 50°, 80° e x podem ser medidas das faces de um triedro?

Resolução

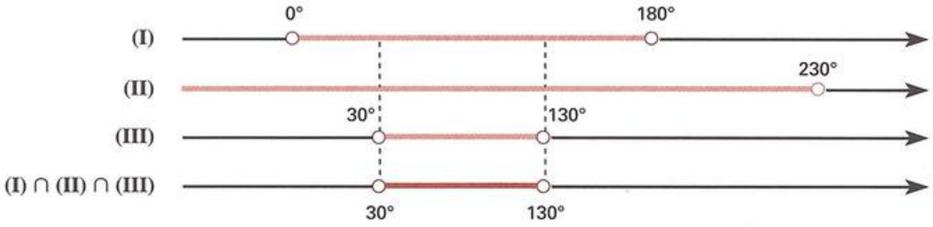
Devemos ter:

I. $0° < x < 180°$;

II. $50° + 80° + x < 360° \Rightarrow x < 230°$;

III. $|50° - 80°| < x < 50° + 80° \Rightarrow 30° < x < 130°$.

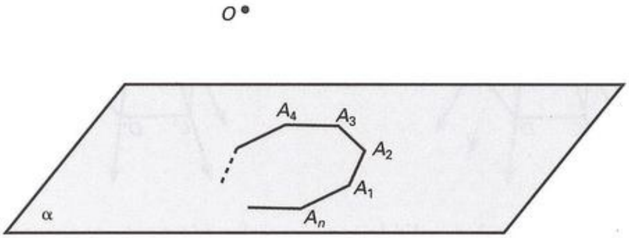
Fazendo a intersecção de (I), (II) e (III), temos:



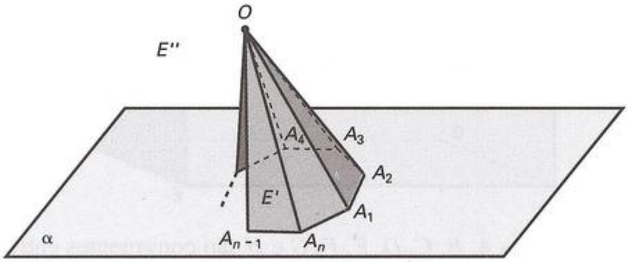
Logo, $30° < x < 130°$.

5. Ângulos poliédricos convexos

Seja um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$, $n \geqslant 3$, e seja O um ponto que não pertence ao plano desse polígono.



Seja G a reunião das regiões angulares $A_1\hat{O}A_2$, $A_2\hat{O}A_3$, $A_3\hat{O}A_4$, ..., $A_{n-1}\hat{O}A_n$:



A região G separa o espaço E em duas regiões E' e E'' tais que:

I. E' é convexa e E'' não é convexa;

II. $E' \cap E'' = \varnothing$;

III. $E' \cup E'' \cup G = E$.

Chama-se "**ângulo poliédrico convexo** de vértice O e arestas $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$" o conjunto $G \cup E'$.

- Indicamos o ângulo poliédrico de vértice O e arestas $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$ pelo símbolo $(\hat{O}, A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.
- As regiões angulares de G são chamadas de "**faces** do ângulo poliédrico".
- O conjunto G é chamado de "**superfície** do ângulo poliédrico".
- O conjunto E' é chamado de "**interior** do ângulo poliédrico".
- O conjunto E'' é chamado de "**exterior** do ângulo poliédrico".

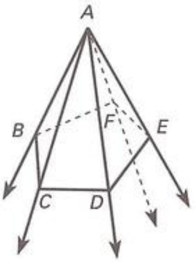
Nota: um triedro é um ângulo poliédrico de três arestas.

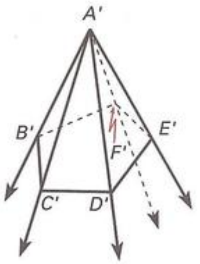
5.1. Ângulos poliédricos congruentes

Definição

Dois ângulos poliédricos são congruentes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das faces de um deles e o conjunto das faces do outro, de modo que:

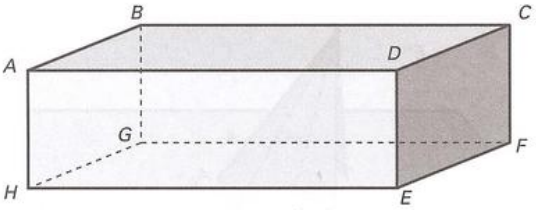
I. faces correspondentes são congruentes;
II. diedros formados por faces correspondentes são congruentes.





Se as faces e os diedros desses ângulos poliédricos são ordenadamente congruentes, então dizemos que os ângulos poliédricos são congruentes.

Visualize ângulos poliédricos congruentes em uma caixa de sapatos:



Os ângulos poliédricos de vértices A, B, C, D, E, F, G e H são congruentes entre si.

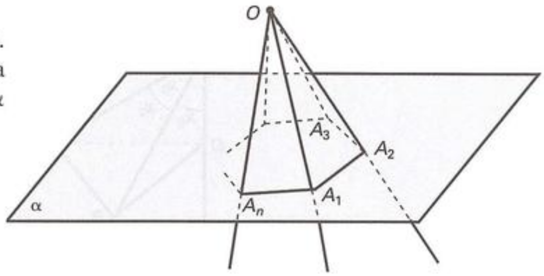
Intuitivamente, dois ângulos poliédricos são congruentes se for possível "encaixar" um no outro, de modo que o vértice e as arestas de um deles coincidam, respectivamente, com o vértice e as arestas do outro.

Exercícios resolvidos

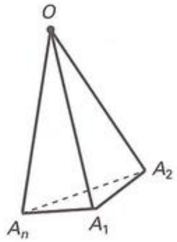
R.11 Provar que "a soma das medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo é menor do que 360°".

Resolução

Seja um ângulo poliédrico de vértice O e n arestas. Consideremos o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ obtido pela intersecção do ângulo poliédrico com um plano α secante a todas as arestas do ângulo poliédrico.



Em cada um dos triedros de vértices A_1, A_2, A_3, ..., A_n, a medida da face que contém o polígono é menor do que a soma das medidas das outras duas. Por exemplo:



$$A_n\hat{A}_1A_2 < O\hat{A}_1A_2 + O\hat{A}_1A_n$$

A soma das faces que contêm o polígono, em todos os triedros de vértices A_1, A_2, A_3, ..., A_n, é exatamente a soma dos ângulos internos do polígono, ou seja, $(n - 2)180°$. A soma de todas as demais faces desses triedros é a soma dos ângulos internos dos n triângulos A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$, exceto a soma S das medidas das faces do ângulo poliédrico do vértice O, ou seja, $180°n - S$.
Assim, temos que $(n - 2)180° < 180°n - S \Rightarrow S < 360°$.

(c.q.d.)

R.12 Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces tenham medidas 120°, 90°, 70° e 150°?

Resolução

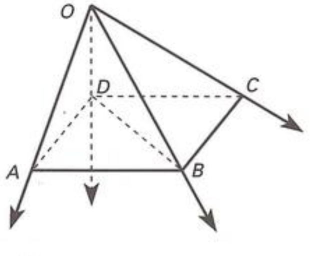
Não existe esse ângulo poliédrico, pois a soma das medidas das faces seria maior do que 360°:

$$120° + 90° + 70° + 150° = 430°.$$

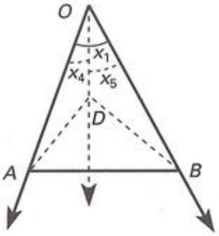
R.13 Provar que "em um ângulo poliédrico convexo de quatro faces a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das demais".

Resolução

Consideremos o ângulo poliédrico convexo cujas faces $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$ medem respectivamente x_1, x_2, x_3 e x_4.

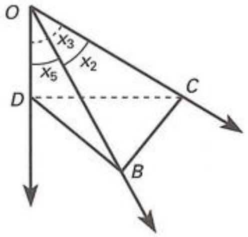


Seja x_5 a medida do ângulo $D\hat{O}B$. No triedro $(\hat{O}, A, B, D)$, temos que:



$$x_1 < x_4 + x_5 \quad \textbf{(I)}$$

No triedro ($\hat{O}, B, C, D$), temos que:



$$x_5 < x_2 + x_3 \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos $x_1 < x_4 + x_2 + x_3$.

(c.q.d.)

De modo análogo ao que fizemos no exercício R.12, prova-se o seguinte:

> Em todo ângulo poliédrico convexo, a medida de uma face é menor do que a soma das medidas das demais.

R.14 Existe um ângulo poliédrico de quatro faces, de modo que essas faces meçam 20°, 50°, 30° e 120°?

Resolução

Não existe esse ângulo poliédrico, pois teria a medida de uma face maior do que a soma das medidas das demais: $120° > 50° + 30° + 20°$.

6. Resumo dos teoremas

T.44 Dois planos paralelos entre si e secantes à aresta de um diedro determinam nesse diedro secções congruentes.

T.45 Em todo triedro a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das outras duas e é maior do que o módulo da diferença das medidas das outras duas.

T.46 Em todo triedro a soma das medidas das três faces é menor do que 360°.

T.47 Três medidas em graus x_1, x_2 e x_3 são medidas das faces de um triedro se, e somente se:
I. cada uma delas é maior do que 0° e menor do que 180°;
II. a soma delas é menor do que 360°;
III. $|x_3 - x_2| < x_1 < x_3 + x_2$.

T.48 A soma das medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo é menor do que 360°.

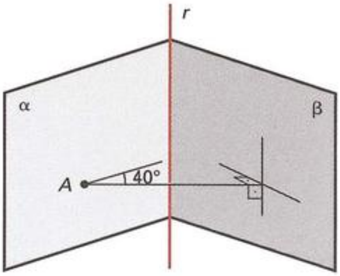
T.49 Em todo ângulo poliédrico convexo, a medida de uma face é menor do que a soma das medidas das demais.

Sugestões

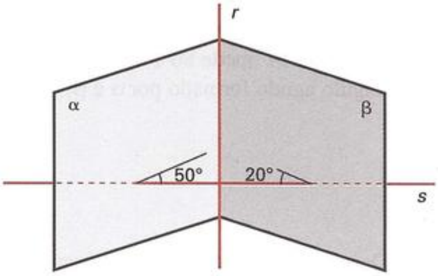
> Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.7, B.9 (a, b, c), B.10 (a, b), B.11 (a, b, c), C.1, C.2, C.6.
> Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, B.8, B.9 (d, e, f), B.10 (c, d), B.11 (d, e, f), B.12, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

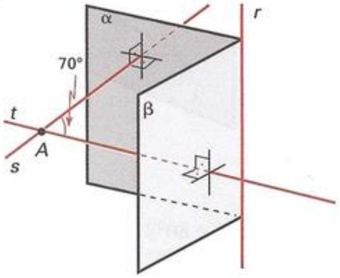
B.1 Um ponto A pertence à face α de um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e $A \notin r$. Uma reta s que passa por A é perpendicular a β. Um ângulo agudo que s forma com α mede 40°. Qual é a medida do diedro?



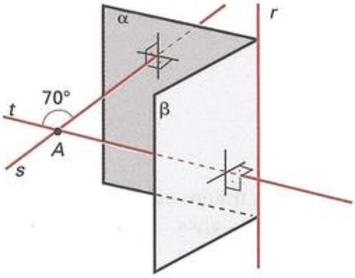
B.2 Uma reta s é secante às faces de um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e é ortogonal a r. Se os ângulos agudos que s forma com α e β, respectivamente, medem 50° e 20°, qual é a medida do diedro?



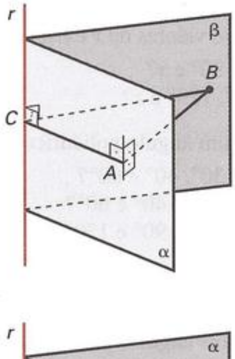
B.3 Por um ponto A, interior a um diedro $\alpha\hat{r}\beta$, passam duas retas s e t de modo que $s \perp \alpha$ e $t \perp \beta$. Um ângulo agudo formado por s e t mede 70°. Qual é a medida do diedro? **Atenção**, temos duas possibilidades:



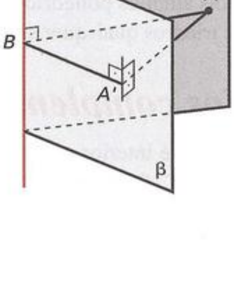
ou



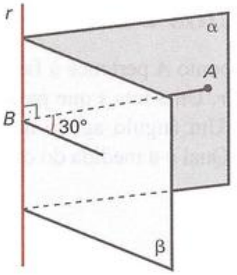
B.4 Sendo um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e três pontos distintos A, B e C tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\overleftrightarrow{AC} \perp r$, $\overleftrightarrow{CB} \perp r$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$ e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, calcule a medida do diedro.



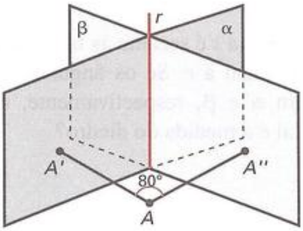
B.5 Sendo um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ e dois pontos distintos A e B tais que $A \in \alpha$, $B \in r$, $\overleftrightarrow{AB} \perp r$, $\overline{AB}$ mede 6 cm e a projeção ortogonal $\overline{A'B}$ de $\overline{AB}$ sobre β mede 3 cm, calcule a medida do diedro.



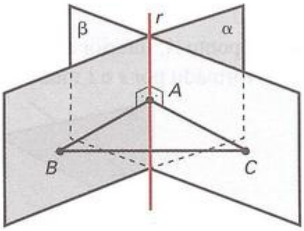
B.6 Sendo um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ de medida 30° e A e B dois pontos tais que $A \in \alpha$, $B \in r$, $\overline{AB} \perp r$ e $\overline{AB}$ mede 8 m, calcule a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre β.



B.7 Dois planos α e β são secantes. As projeções ortogonais de um ponto A, $A \notin \alpha$ e $A \notin \beta$, sobre α e β são respectivamente A' e A''. Sabendo que o ângulo $A'\hat{A}A''$ mede 80°, determine a medida de um ângulo agudo formado por α e β.



B.8 Dois planos α e β são secantes cuja reta comum é r. Três pontos distintos A, B e C são tais que $A \in r$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $r \perp \text{pl}(A, B, C)$ e $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$. Qual é a medida de um ângulo agudo formado por α e β?



B.9 Existe um triedro cujas faces tenham medidas:

a) 50°, 20° e 80°?
b) 70°, 90° e 40°?
c) 120°, 100° e 170°?
d) 40°, 50° e 80°?
e) 20°, 10° e 40°?
f) 150°, 120° e 100°?

B.10 Para que valores de x existe um triedro cujas faces meçam:

a) 40°, 80° e x?
b) 150°, 120° e x?
c) 10°, 20° e x?
d) 140°, 110° e x?

B.11 Existe um ângulo poliédrico convexo de quatro faces, de modo que as faces tenham medidas:

a) 20°, 30°, 40° e 60°?
b) 150°, 30°, 40° e 60°?
c) 100°, 80°, 90° e 150°?
d) 40°, 50°, 10° e 10°?
e) 120°, 30°, 40° e 10°?
f) 90°, 90°, 90° e 90°?

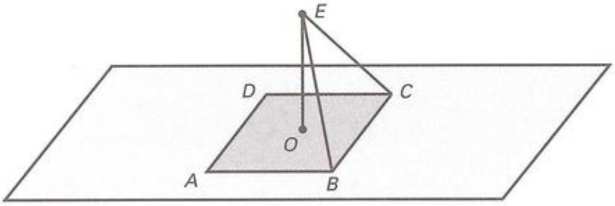
B.12 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes.

a) Se dois ângulos poliédricos são congruentes, então têm o mesmo número de faces.
b) Se dois ângulos poliédricos são congruentes, então têm o mesmo número de arestas.
c) Se dois ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas, então são congruentes.
d) Se dois ângulos poliédricos têm o mesmo número de faces, então são congruentes.
e) Dois triedros quaisquer são sempre congruentes.

Exercícios complementares

C.1 Um ponto A é interior a um diedro $\alpha\hat{r}\beta$. As projeções ortogonais de A sobre α e β são respectivamente os pontos A' e A''. Sabendo que $\overline{A'A} \perp \overline{A''A}$, determine a medida do diedro.

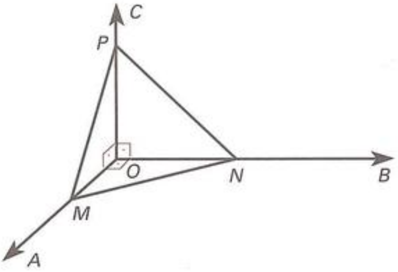
C.2 Cinco pontos não-coplanares A, B, C, D e E são tais que A, B, C e D são vértices de um quadrado de lado 2 cm e o ponto E pertence à reta que passa pelo centro O do quadrado e é perpendicular ao plano desse quadrado. Sabendo que $\overline{EO}$ mede $\sqrt{3}$ cm, determine a medida de um ângulo agudo que o plano pl(E, B, C) forma com o plano pl(A, B, C).



C.3 Um plano α é perpendicular à aresta $\overrightarrow{OA}$ de um triedro cujas faces $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ medem respectivamente 30° e 70°. Determine as medidas dos ângulos agudos que as arestas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ formam com o plano α.

C.4 Qual é o número máximo de faces que pode ter um ângulo poliédrico em que todas as faces têm medidas iguais a 70°?

C.5 Os pontos M, N e P pertencem respectivamente às arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ de um triedro trirretângulo. Sabendo que $\overline{MO} \cong \overline{NO} \cong \overline{PO}$, calcule a tangente do ângulo agudo que o plano pl(M, N, P) forma com o plano pl(O, A, B).



C.6 Prove que "um ponto P interior a um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ pertence ao bissetor desse diedro se, e somente se, P é equidistante de α e β".

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) Um diedro $\alpha\hat{r}\beta$ é reto. Um ponto A, $A \in \alpha$, dista 4 cm de β e um ponto B, $B \in \beta$, é tal que $\overline{BA}$ mede 5 cm e $\overrightarrow{BA}$ é ortogonal a r. A distância do ponto B ao plano α é:

a) 3 cm
b) 5 cm
c) 3,5 cm
d) $3\sqrt{2}$ cm
e) $3\sqrt{3}$ cm

V.2 (Cescem-SP) Um triedro pode ter as faces medindo:

a) 15°, 29° e 50°.
b) 120°, 140° e 10°.
c) 80°, 170° e 150°.
d) 100°, 90° e 80°.
e) 120°, 120° e 120°.

V.3 (FEI-SP) Duas faces de um triedro medem 45° cada uma e formam entre si um diedro reto. A outra face do triedro mede:

a) 30°.
b) 45°.
c) 60°.
d) 90°.
e) Nenhuma das anteriores.

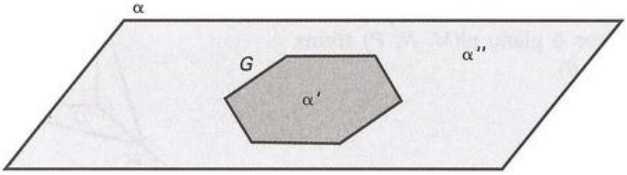
Capítulo 49

Poliedros

1. Região poligonal convexa

Consideremos um polígono G, contido em um plano α, separando esse plano em dois conjuntos α' e α'' tais que:

I. α' é convexo e α'' não é convexo;
II. $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$;
III. $\alpha' \cup \alpha'' \cup G = \alpha$.



Chama-se **região poligonal convexa** o conjunto $G \cup \alpha'$.

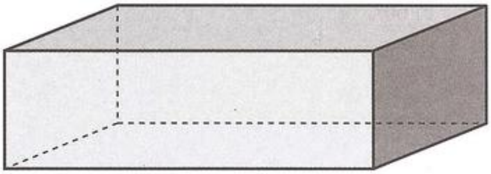
- O polígono G é chamado de "**polígono convexo**".
- O conjunto convexo α' é chamado de "**interior** do polígono G".
- O conjunto não-convexo α'' é chamado de "**exterior** do polígono G".
- Os lados e os vértices do polígono G são chamados, também, de "**lados** e **vértices** da região poligonal".

2. Poliedro convexo

Consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n, $n \geqslant 4$, regiões poligonais convexas tais que:

I. não há duas dessas regiões contidas em um mesmo plano;
II. cada lado de qualquer uma dessas regiões é lado de duas e somente duas delas;
III. o plano que contém qualquer uma dessas regiões deixa as demais em um mesmo semi-espaço.

Visualize, por exemplo, uma caixa de sapatos com a tampa e você terá um conjunto G obtido pela reunião de regiões poligonais, obedecendo as condições (I), (II) e (III).



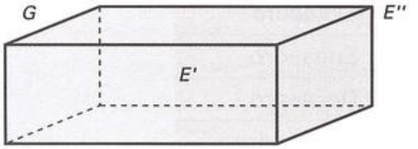
Todo conjunto G obtido pela reunião de regiões poligonais, satisfazendo às condições (I), (II) e (III), separa o espaço E em dois conjuntos E' e E'' tais que:

$$E' \text{ é convexo e } E'' \text{ não é convexo; } E' \cap E'' = \varnothing;\ E' \cup E'' \cup G = E.$$

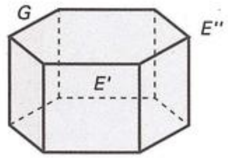
Chama-se **poliedro convexo** a reunião do conjunto G com o conjunto convexo E', ou seja, $G \cup E'$.

Exemplos

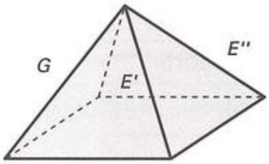
a)



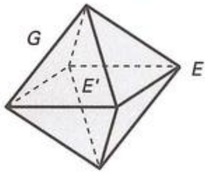
c)



b)

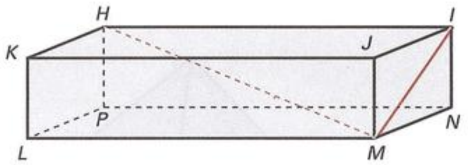


d)



- As regiões poligonais de G são chamadas de "**faces** do poliedro convexo".
- Cada lado de uma face qualquer é chamada de "**aresta** do poliedro convexo".
- Cada vértice de uma face qualquer é chamado de "**vértice** do poliedro convexo".
- **Diagonal de uma face** é qualquer diagonal do polígono dessa face.
- **Diagonal do poliedro** é qualquer segmento de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.
- O conjunto G é chamado de "**superfície** do poliedro convexo".
- O conjunto convexo E' é chamado de "**interior** do poliedro convexo".
- O conjunto não-convexo E'' é chamado de "**exterior** do poliedro convexo".

Exemplo



A região poligonal $HIJK$ é uma das seis faces do poliedro.

O segmento $\overline{JM}$ é uma das doze arestas do poliedro.

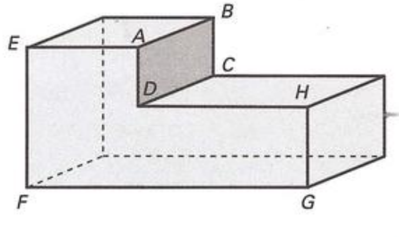
O ponto J é um dos oito vértices do poliedro.

O segmento $\overline{IM}$ é diagonal da face $INMJ$.

O segmento $\overline{HM}$ é diagonal do poliedro.

A reunião das seis faces é a superfície do poliedro.

Nota: existem poliedros não-convexos, como, por exemplo, o poliedro da figura ao lado. Isso porque o plano que contém a face $ABCD$ não deixa as demais faces num mesmo semi-espaço, ou porque a face $ADHGFE$ não é uma região poligonal convexa.



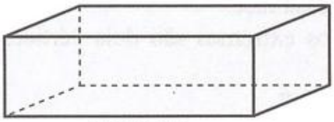
2.1. Nomenclatura

Os poliedros, convexos ou não, recebem nomes de acordo com o número de faces que possuem:

Número de faces	Nome
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
⋮	⋮
20	Icosaedro

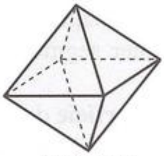
Exemplos

a)



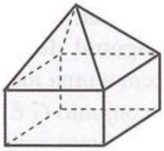
Hexaedro

b)



Octaedro

c)



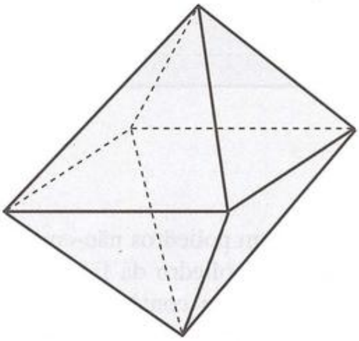
Eneaedro

Exercícios resolvidos

R.1 Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

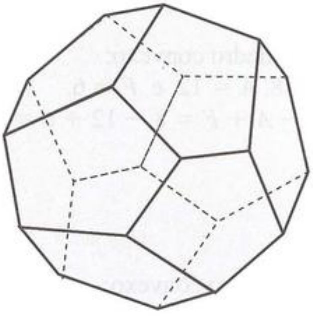
O poliedro possui oito faces e cada face possui três arestas. Multiplicando o número de faces pelo número de arestas de cada uma, $8 \cdot 3$, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta é lado de duas, e somente duas, faces; portanto no cálculo $8 \cdot 3$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas desse poliedro é $A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.



R.2 Um poliedro é constituído por vinte ângulos triédricos. Quantas arestas possui o poliedro?

Resolução

O poliedro possui vinte vértices. E de cada vértice partem três arestas. Multiplicando o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada vértice, $20 \cdot 3$, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta une dois, e apenas dois, vértices do poliedro; portanto no cálculo $20 \cdot 3$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$.



R.3 Um eneaedro convexo é constituído por quatro faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

Calculemos:

a) o produto do número de faces triangulares pelo número de arestas de cada uma dessas faces: $4 \cdot 3$;
b) e o produto do número de faces quadrangulares pelo número de arestas de cada uma dessas faces: $5 \cdot 4$.

A soma dos resultados obtidos em (a) e (b) é o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta é lado de duas, e somente duas, faces; portanto no cálculo $4 \cdot 3 + 5 \cdot 4$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16$.

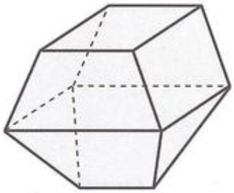
R.4 Um poliedro convexo é constituído por seis ângulos triédricos e quatro ângulos tetraédricos (quatro arestas). Quantas arestas possui o poliedro?

Resolução

Calculemos:

a) o produto do número de ângulos triédricos pelo número de arestas de cada um desses ângulos: $6 \cdot 3$;
b) o produto do número de ângulos tetraédricos (quatro arestas) pelo número de arestas de cada um desses ângulos: $4 \cdot 4$.

Somando os resultados obtidos em (a) e (b), obtemos o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta une dois, e somente dois, vértices do poliedro; portanto no cálculo $6 \cdot 3 + 4 \cdot 4$ cada aresta foi contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{2} = 17$.



3. Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação

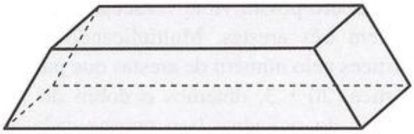
$$V - A + F = 2 \quad ,$$

onde:

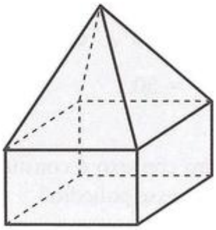
- V é o número de vértices do poliedro;
- A é o número de arestas do poliedro;
- F é o número de faces do poliedro.

Exemplos

a) No poliedro convexo:
temos $V = 8, A = 12$ e $F = 6$.
Assim, $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$.

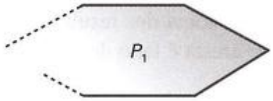


b) No poliedro convexo:
temos $V = 9, A = 16$ e $F = 9$.
Assim, $V - A + F = 9 - 16 + 9 = 2$.



3.1. Justificando a relação de Euler

Consideremos uma região poligonal P_1, em que o número de lados (arestas) é A_1 e o número de vértices é V_1. Para a superfície P_1, temos que:

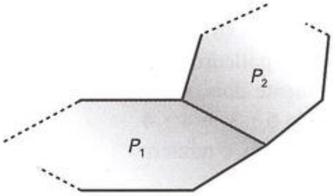


- o número de faces é $F_1 = 1$ (apenas uma região poligonal);
- o número de arestas A_1 é igual ao número de vértices V_1.

Assim, temos:

$$\underbrace{V_1 - A_1}_{} + \overbrace{F_1}^{} = 0 + 1 = 1 . \quad \textbf{(I)}$$

Seja a região poligonal P_2 com um lado comum com P_1 e não-coplanar com P_1:



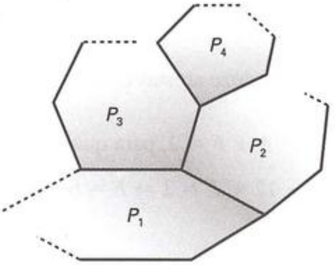
Se P_2 possui k lados (arestas) e, portanto, k vértices, então a superfície $P_1 \cup P_2$ terá:

- número de vértices $V_2 = V_1 + k - 2$;
- número de arestas $A_2 = A_1 + k - 1$;
- número de faces $F_2 = F_1 + 1$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} V_2 - A_2 + F_2 &= (V_1 + k - 2) - (A_1 + k - 1) + (F_1 + 1) = \\ &= V_1 + k - 2 - A_1 - k + 1 + F_1 + 1 = \\ &= \underbrace{V_1 - A_1 + F_1}_{\textbf{Por (I)}} = 1. \end{aligned}$$

Assim por diante, vamos acrescentando regiões poligonais à superfície em formação, com o objetivo de construir a superfície de um poliedro convexo.



Vamos supor que a superfície esteja com V_i vértices, A_i arestas e F_i faces ($i \geqslant 1$). Vamos supor também que unindo a essa superfície uma região poligonal P_{i+1}, sem fechar a superfície, obtemos uma nova superfície com V_{i+1} vértices, A_{i+1} arestas e F_{i+1} faces. Se a região poligonal P_{i+1} tiver n lados (arestas) e, portanto, n vértices, e r de seus vértices ($2 \leqslant r < n$) coincidirem com r vértices da superfície anterior, então a nova superfície, obtida com a inclusão de P_{i+1}, acrescentará à superfície anterior $n - r$ vértices, $n - r + 1$ arestas e uma face. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} V_{i+1} - A_{i+1} + F_{i+1} &= (V_i + n - r) - (A_i + n - r + 1) + (F_i + 1) = \\ &= V_i + n - r - A_i - n + r - 1 + F_i + 1 = V_i - A_i + F_i. \quad \textbf{(II)} \end{aligned}$$

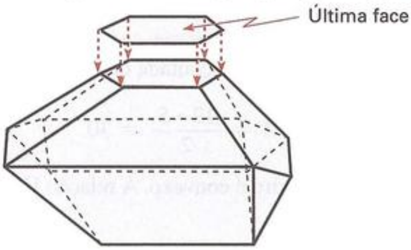
De (I) e (II):

$$\begin{aligned} &i = 1 \Rightarrow V_1 - A_1 + F_1 = 1; \\ &i = 2 \Rightarrow V_2 - A_2 + F_2 = 1; \\ &i = 3 \Rightarrow V_3 - A_3 + F_3 = 1; \\ &i = 4 \Rightarrow V_4 - A_4 + F_4 = 1; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja, para a superfície aberta, teremos:

$$V_{i+1} - A_{i+1} + F_{i+1} = 1, \forall i, i \in \mathbb{N}^*. \quad \textbf{(III)}$$

Finalmente, vamos admitir que falte apenas uma região poligonal para fechar a superfície.



Ao fechar a superfície com a última face, não acrescentaremos nenhuma aresta e nenhum vértice à superfície anterior. Acrescentaremos apenas uma face.

Assim, se a superfície fechada possui V vértices, A arestas e F faces, e a superfície sem a última face possui V_{i+1} vértices, A_{i+1} arestas e F_{i+1} faces, então:

$$\begin{aligned} V &= V_{i+1}; \\ A &= A_{i+1}; \\ F &= F_{i+1} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } V - A + F = \underbrace{V_{i+1} - A_{i+1} + F_{i+1}}_{\textbf{Por (III)}} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Exercícios resolvidos

R.5 Um poliedro convexo é constituído por doze arestas e oito vértices. Quantas faces possui esse poliedro?

Resolução

Pela relação de Euler, temos que $V - A + F = 2$, para qualquer poliedro convexo.

Como $V = 8$ e $A = 12$, obtemos $8 - 12 + F = 2 \Rightarrow F = 6$.

Logo, o poliedro possui seis faces.

R.6 Um poliedro convexo é constituído por seis arestas e o seu número de vértices é igual ao número de faces. Quantos vértices possui o poliedro?

Resolução

É dado que $A = 6$ e $V = F$. Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Assim, temos $V - 6 + V = 2 \Rightarrow V = 4$.

Logo, o poliedro possui quatro vértices.

R.7 Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui doze faces e cada face possui cinco arestas. O produto do número de faces pelo número de arestas de cada face, $12 \cdot 5$, é o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta é lado de duas e apenas duas faces; portanto no cálculo $12 \cdot 5$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

Temos então que $A = 30$, $F = 12$ e o dodecaedro é convexo. A relação de Euler nos garante que $V - A + F = 2$ para todo poliedro convexo: $V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$.

Portanto o dodecaedro possui vinte vértices.

R.8 Um poliedro convexo é constituído por doze vértices. E de cada vértice partem cinco arestas. Quantas faces possui o poliedro?

Resolução

O produto do número de vértices pelo número de arestas que partem de cada vértice, $12 \cdot 5$, é igual ao dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta une dois, e apenas dois, vértices do poliedro; portanto no cálculo $12 \cdot 5$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas é:

$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30.$$

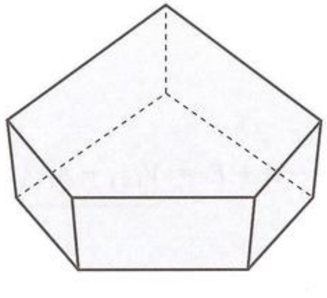
Temos então que $V = 12$, $A = 30$ e o poliedro é convexo. A relação $V - A + F = 2$ vale para todo poliedro convexo: $12 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 20$.

Portanto o poliedro possui vinte faces.

4. Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

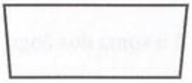
Consideremos um poliedro convexo com duas faces pentagonais e cinco faces quadrangulares. Para calcular a soma dos ângulos de suas faces, basta lembrar que a soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por:

$$S_i = (n - 2)180°.$$



Assim, temos que:

- a soma dos ângulos de uma face quadrangular é:



$S_i = (4 - 2)180° = 360°;$

- a soma dos ângulos de uma face pentagonal é:

$S_i = (5 - 2)180° = 540°.$

Como o poliedro possui cinco faces quadrangulares e duas pentagonais, a soma S dos ângulos das faces é $S = 360° \cdot 5 + 540° \cdot 2 = 2880°$.

Teorema

A soma S dos ângulos das faces de um poliedro convexo que possui V vértices é:

$$S = (V - 2)360°.$$

Demonstração

Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente. Enumeremos as faces de 1 a F. Sejam respectivamente $n_1, n_2, n_3, ..., n_F$ os números de lados das faces $1, 2, 3, ..., F$. Assim, a soma S dos ângulos das faces do poliedro é:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2)180° + (n_2 - 2)180° + (n_3 - 2)180° + ... + (n_F - 2)180° = \\ &= n_1 180° - 360° + n_2 180° - 360° + n_3 180° - 360° + ... + n_F 180° - 360° = \\ &= 180°(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F) - \underbrace{(360° + 360° + 360° + ... + 360°)}_{\textbf{\textit{F} parcelas}}. \end{aligned}$$

A soma dos números de lados das faces, $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F$, é igual ao dobro do número de arestas do poliedro, $2A$, pois cada lado de uma face é lado de duas, e somente duas, faces ao mesmo tempo e, portanto, nessa soma cada aresta foi contada duas vezes. Assim, temos:

$$S = 180° \cdot 2A - 360°F \Rightarrow S = 360°A - 360°F.$$

Logo, $S = (A - F)360°$. **(I)**

Pela relação de Euler, temos $V - A + F = 2$.
Logo, $A - F = V - 2$. **(II)**

Substituindo (II) em (I), temos $S = (V - 2)360°$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.9 Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por oito vértices?

Resolução
A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo com V vértices é dada por $S = (V - 2)360°$.

Logo, $S = (8 - 2)360° \Rightarrow S = 2\,160°$.

R.10 Um poliedro convexo é constituído por onze faces e 21 arestas. Qual é a soma dos ângulos das faces desse poliedro?

Resolução
Pela relação de Euler, temos que $V - A + F = 2$, para todo poliedro convexo.

Como $A = 21$ e $F = 11$, temos $V - 21 + 11 = 2 \Rightarrow V = 12$.

A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo com V vértices é $S = (V - 2)360°$.

Logo, $S = (12 - 2)360° \Rightarrow S = 3\,600°$.

R.11 Um poliedro convexo é constituído somente por faces triangulares e pentagonais. Sabendo que o número de arestas do poliedro é vinte e que a soma dos ângulos das faces é $2\,880°$, determinar quantas faces triangulares e quantas pentagonais possui o poliedro.

Resolução
Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente. Sejam t e p os números de faces triangulares e pentagonais do poliedro, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} t + p = F \\ 3t + 5p = 2A \\ V - A + F = 2 \\ (V - 2)360° = 2880° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + p = F \quad \textbf{(I)} \\ 3t + 5p = 40 \quad \textbf{(II)} \\ V - 20 + F = 2 \quad \textbf{(III)} \\ (V - 2)360° = 2\,880°. \quad \textbf{(IV)} \end{cases}$$

De (IV), temos que $V - 2 = \dfrac{2\,880°}{360°} \Rightarrow V - 2 = 8 \therefore V = 10$.

Substituindo $V = 10$ em (III), obtemos $10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$.

Substituindo $F = 12$ em (I) e resolvendo o sistema com (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} t + p = 12 \\ 3t + 5p = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -3t - 3p & = & -36 \\ 3t + 5p & = & 40 \\ \hline 2p & = & 4 \Rightarrow p = 2. \end{array} \oplus$$

Substituindo $p = 2$ em $t + p = 12$, concluímos que $t + 2 = 12 \Rightarrow t = 10$.

Logo, o poliedro possui duas faces pentagonais e dez faces triangulares.

5. Resumo dos teoremas

T.50 Em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.

T.51 A soma S dos ângulos das faces de um poliedro convexo com V vértices é $S = (V - 2)360°$.

Sugestões

Tarefa de classe: B.1, B.2, B.3, B.4, B.9, B.10, B.11, B.16, B.17, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: B.5, B.6, B.7, B.8, B.12, B.13, B.14, B.15, B.18, B.19, B.20, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.2 Um poliedro convexo é constituído por três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.3 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por doze ângulos triédricos, quantas arestas possui esse poliedro?

B.4 Dado que um poliedro convexo é constituído por cinco ângulos triédricos, cinco ângulos tetraédricos (quatro arestas) e um ângulo pentaédrico (cinco arestas), quantas arestas possui esse poliedro?

B.5 Qual é o número de arestas de um poliedro convexo constituído por catorze faces triangulares?

B.6 Obtenha o número de arestas de um poliedro convexo constituído por dez faces quadrangulares e duas pentagonais.

B.7 Determine o número de arestas de um poliedro convexo constituído por vinte ângulos triédricos.

B.8 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por dez ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos (quatro arestas), determine o número de arestas desse poliedro.

B.9 Existe poliedro convexo que possua vinte vértices, doze faces e dezoito arestas? Por quê?

B.10 Qual é o número de faces de um poliedro convexo constituído por dezesseis vértices e 24 arestas?

B.11 O número de faces de um poliedro convexo é igual ao número de vértices. Sabendo que esse poliedro é constituído por dez arestas, determine o seu número de vértices.

B.12 Calcule o número de arestas de um poliedro convexo constituído por treze faces e 22 vértices.

B.13 O número de arestas de um octaedro convexo é o dobro do número de vértices. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.14 Qual é o número de vértices de um poliedro convexo constituído por quatro faces triangulares e cinco quadrangulares?

B.15 Um poliedro convexo é constituído por dois ângulos pentaédricos (cinco arestas) e cinco ângulos tetraédricos (quatro arestas). Determine o número de faces desse poliedro.

B.16 Calcule a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por seis vértices.

B.17 Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por onze faces e 27 arestas?

B.18 Determine a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por dez faces e 24 arestas.

B.19 A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 6480°. Quantos vértices possui esse poliedro?

B.20 O número de arestas de um poliedro convexo é o dobro do número de faces. Sabendo que a soma dos ângulos de suas faces é 3600°, determine o seu número de faces.

Exercícios complementares

C.1 Existe poliedro convexo que possua o número de vértices igual ao número de arestas? Por quê?

C.2 Prove que, "se um poliedro convexo possui o número de vértices igual ao número de faces, então o número de arestas é par".

C.3 Existe poliedro convexo constituído por V vértices, A arestas e F faces, de modo que $V + A + F = 17$? Por quê?

C.4 Todas as faces de um poliedro convexo são quadrangulares. Sabendo que a soma dos ângulos dessas faces é 4320°, determine o número de arestas desse poliedro.

C.5 Um poliedro convexo é constituído apenas por faces quadrangulares e hexagonais. Sabendo que o poliedro possui dezoito arestas e que a soma dos ângulos de suas faces é 3600°, determine quantas faces quadrangulares e quantas hexagonais possui o poliedro.

C.6 Um poliedro convexo é constituído apenas por ângulos triédricos e ângulos tetraédricos (quatro arestas). Sabendo que esse poliedro possui vinte arestas e que a soma dos ângulos das faces é 3600°, determine quantos ângulos triédricos e quantos tetraédricos possui o poliedro.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) O número de vértices de um poliedro convexo constituído por doze faces triangulares é:
a) 4 b) 12 c) 10 d) 6 e) 8

V.2 (Cice-RJ) Um poliedro convexo P possui 7654 faces, todas triangulares. Entre as cinco afirmações seguintes, exatamente uma é correta. Assinale-a:

a) P tem 11482 arestas.
b) Um tal poliedro não pode existir.
c) Cada vértice de P pertence exatamente a duas faces.
d) P tem 3829 vértices.
e) As arestas de P têm todas o mesmo comprimento.

V.3 (Mackenzie-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem oito faces e que o número de vértices é maior do que seis e menor do que catorze. Então o número A de arestas é tal que:
a) $14 \leqslant A \leqslant 20$ b) $14 < A < 20$ c) $13 < A < 19$ d) $13 \leqslant A \leqslant 19$ e) $17 \leqslant A \leqslant 20$

V.4 (Fuvest-SP) Quantas faces tem um poliedro convexo com seis vértices e nove arestas? Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

Capítulo 50

Poliedros notáveis

1. Poliedros de Platão

Definição

Um poliedro é denominado **poliedro de Platão** se, e somente se, forem obedecidas as três condições:

I. todas as faces têm o mesmo número de arestas;

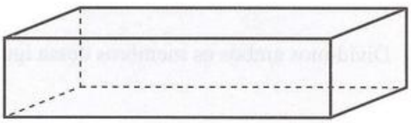
II. todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;

III. vale para o poliedro a relação de Euler, $V - A + F = 2$.

Platão (428 ou 427 a.C. - 348 ou 347 a.C.), filósofo grego. Era apaixonado por geometria, a tal ponto que acima das portas de sua escola se lia: "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui".

Exemplos

a) Considere o hexaedro convexo da figura.



Note que:

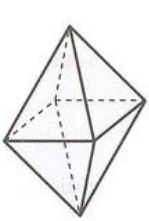
I. todas as faces têm quatro arestas;

II. todos os ângulos poliédricos têm três arestas;

III. vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, pois o poliedro é convexo.

Portanto, esse hexaedro é um poliedro de Platão.

b) Considere o octaedro convexo da figura.



Note que:

I. todas as faces têm três arestas;

II. todos os ângulos poliédricos têm quatro arestas;

III. vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, pois o poliedro é convexo.

Portanto, esse octaedro é um poliedro de Platão.

Exercícios resolvidos

R.1 Existe poliedro de Platão com faces pentagonais e ângulos tetraédricos (quatro arestas)?

Resolução

Se existir esse poliedro de Platão, com os números V, A e F de vértices, arestas e faces, respectivamente, então deveremos ter:

$$\begin{cases} 5F = 2A \\ 4V = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{2A}{5} \quad \textbf{(I)} \\ V = \dfrac{A}{2} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III):

$$\frac{A}{2} - A + \frac{2A}{5} = 2 \Rightarrow \frac{5A - 10A + 4A}{\cancel{10}} = \frac{20}{\cancel{10}}$$

$$\therefore -A = 20 \therefore A = -20. \ \textbf{(absurdo!)}$$

Essa última igualdade é absurda, porque A é número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 4$.

Logo, concluímos que não existe poliedro de Platão com faces pentagonais e ângulos triédricos.

R.2 Existe poliedro de Platão com faces hexagonais?

Resolução

Se existir esse poliedro de Platão, com os números V, A e F de vértices, arestas e faces, respectivamente, e com m arestas em cada ângulo poliédrico, então deveremos ter:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ 6F = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} \quad \textbf{(I)} \\ F = \dfrac{A}{3} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III):

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{A}{3} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{m} - \frac{2A}{3} = 2.$$

Dividimos ambos os membros dessa igualdade por $2A$:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \quad \textbf{(IV)}$$

Como m é número de arestas de cada ângulo poliédrico, deveremos ter:

$$m \geqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3} \therefore \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \leqslant 0. \ \textbf{(V)}$$

Substituímos (IV) em (V):

$$\frac{1}{A} \leqslant 0 \Rightarrow A < 0. \ \textbf{(absurdo!)}$$

Essa última desigualdade é absurda, pois A é número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 4$.

Logo, não existe poliedro de Platão com faces hexagonais.

R.3 Provar que, "se um poliedro é de Platão tal que cada uma de suas F faces possui n arestas ($n \geqslant 3$) e cada um de seus V ângulos poliédricos possui m arestas ($m \geqslant 3$), então $n = 3$ ou $m = 3$".

Resolução

Sendo A o número de arestas do poliedro, temos:

$$\begin{cases} nF = 2A \\ mV = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{2A}{n} \quad \textbf{(I)} \\ V = \dfrac{2A}{m} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III): $\dfrac{2A}{m} - A + \dfrac{2A}{n} = 2$.

Dividimos por $2A$ ambos os membros dessa igualdade:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \quad \textbf{(IV)}$$

Cada face tem no mínimo três arestas ($n \geqslant 3$) e cada ângulo poliédrico tem no mínimo três arestas ($m \geqslant 3$). Suponhamos que n e m assumissem, simultaneamente, valores maiores do que 3, ou seja:

$$\begin{cases} n \geqslant 4 \\ m \geqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Somamos membro a membro essas duas últimas desigualdades:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \leqslant 0. \quad \textbf{(V)}$$

Substituímos (IV) em (V): $\dfrac{1}{A} \leqslant 0 \Rightarrow A < 0$. **(absurdo!)**

Essa última desigualdade é absurda, porque A é número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 4$. Assim, n e m não podem ser simultaneamente maiores do que 3. Logo, $n = 3$ ou $m = 3$. Ou seja, todo poliedro de Platão ou tem faces triangulares ou tem ângulos triédricos.

(c.q.d.)

R.4 Provar que, "se um poliedro de Platão possui faces triangulares, então seus ângulos poliédricos são todos triédricos ou todos tetraédricos (quatro arestas) ou todos pentaédricos (cinco arestas)".

Resolução

Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces do poliedro de Platão, respectivamente, e seja m o número de arestas de cada ângulo poliédrico. Assim, temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ 3F = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} \quad \textbf{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{3} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III): $\dfrac{2A}{m} - A + \dfrac{2A}{3} = 2 \Rightarrow \dfrac{2A}{m} - \dfrac{A}{3} = 2$.

Dividimos ambos os membros dessa igualdade por $2A$: $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{A}$.

Como A é positivo, temos que $\frac{1}{A}$ também é. Logo, m só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \therefore \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Logo, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$. Ou seja, o poliedro tem todos os ângulos triédricos ou todos tetraédricos ou todos pentaédricos.

R.5 Provar que, "se um poliedro de Platão possui ângulos triédricos, então suas faces são todas triangulares ou todas quadrangulares ou todas pentagonais".

Resolução

Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces do poliedro de Platão e seja n o número de arestas de cada face. Assim, temos:

$$\begin{cases} 3V = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{3} & \textbf{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{n} & \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. & \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III): $\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{n} - \frac{A}{3} = 2.$

Dividimos por $2A$ ambos os membros dessa igualdade: $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}.$

Como A é positivo, temos que $\frac{1}{A}$ também é. Logo, n só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} > 0 \therefore \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

Logo, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$. Ou seja, o poliedro tem todas as faces triangulares ou todas quadrangulares ou todas pentagonais.

(c.q.d.)

R.6 De acordo com as propriedades demonstradas nos exercícios R.3, R.4 e R.5, determinar:

a) o número de arestas;
b) o número de vértices;
c) o número de faces de cada tipo de poliedro de Platão.

Resolução

Em um poliedro de Platão, sejam:

A o número de arestas;
V o número de vértices;
F o número de faces;
n o número de arestas de cada face;
m o número de arestas de cada ângulo poliédrico.

Temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} & \textbf{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{n} & \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. & \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \quad \textbf{(IV)}$$

Pelo exercício R.3: $m = 3$ ou $n = 3$.
Pelo exercício R.4: se $m = 3$, então $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.
Façamos agora todas as combinações possíveis.

- $m = 3$ e $n = 3$

  De (IV), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 6$.

  De (I), temos $V = \frac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 4$.

  De (II), temos $F = \frac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow F = 4$ (tetraedro).

- $m = 3$ e $n = 4$

  De (IV), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 12$.

  De (I), temos $V = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 8$.

  De (II), temos $F = \frac{2 \cdot 12}{4} \Rightarrow F = 6$ (hexaedro).

- $m = 3$ e $n = 5$

  De (IV), temos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30$.

  De (I), temos $V = \frac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow V = 20$.

  De (II), temos $F = \frac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12$ (dodecaedro).

Pelo exercício R.5 temos que, se $n = 3$, então $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$. Fazendo todas as combinações possíveis:

- $m = 3$ e $n = 3$

  Já vimos essa possibilidade.

- $m = 4$ e $n = 3$

  De (IV), temos $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 12$.

  De (I), temos $V = \frac{2 \cdot 12}{4} \Rightarrow V = 6$.

  De (II), temos $F = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow F = 8$ (octaedro).

- $m = 5$ e $n = 3$

  De (IV), temos $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30$.

  De (I), temos $V = \frac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow V = 12$.

  De (II), temos $F = \frac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow F = 20$ (icosaedro).

Nos exercícios R.3, R.4, R.5 e R.6 ficou demonstrado que:

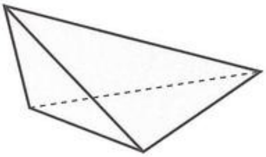
Existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

Podemos resumir o estudo dessas classes no seguinte quadro:

Poliedros de Platão					
Nome	**Número de faces (F)**	**Número de vértices (V)**	**Número de arestas (A)**	**Número de arestas por face (n)**	**Número de arestas por vértice (m)**
Tetraedro	4	4	6	3	3
Hexaedro	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

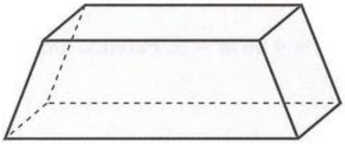
Exemplos

a)



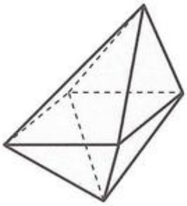
Tetraedro

b)



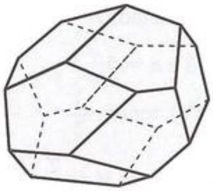
Hexaedro

c)



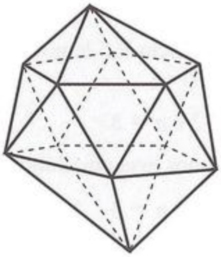
Octaedro

d)



Dodecaedro

e)



Icosaedro

2. Poliedros regulares

Definição

Um poliedro convexo é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:

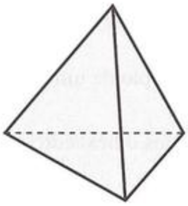
I. todas as suas faces são regiões poligonais regulares e congruentes entre si;

II. todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Exemplos

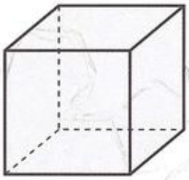
a) Um **tetraedro regular** possui:

- em todas as suas faces regiões poligonais triangulares regulares (triângulos equiláteros) congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos congruentes entre si.



b) Um **hexaedro regular**, ou **cubo**, possui:

- todas as faces quadradas e congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos trirretângulos.



Propriedade

Todo poliedro regular é de Platão.

Demonstração

Todas as faces de um **poliedro regular** são regulares e congruentes entre si; logo:

I. todas as faces do poliedro têm o mesmo número de arestas.

Todos os ângulos poliédricos de um **poliedro regular** são congruentes entre si; logo:

II. todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Todo **poliedro regular** é convexo; logo:

III. vale para o poliedro a relação de Euler, $V - A + F = 2$.

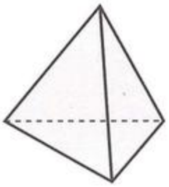
As condições (I), (II) e (III) caracterizam um poliedro de Platão. Logo, todo poliedro regular é de Platão. (c.q.d.)

Conseqüência

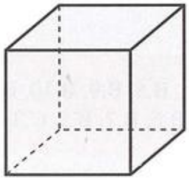
Provamos nos exercícios R.3, R.4, R.5 e R.6 que existem apenas cinco classes de poliedro de Platão. Como todo poliedro regular é de Platão, temos que existem **no máximo cinco classes de poliedro regular**. De cada classe de poliedro de Platão existem poliedros regulares. Logo, podemos afirmar o seguinte:

Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.

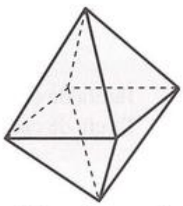
As cinco figuras seguintes mostram um exemplo de cada classe de poliedros regulares:



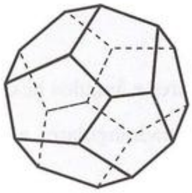
Tetraedro regular



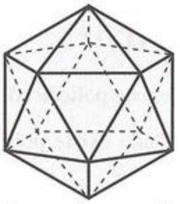
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



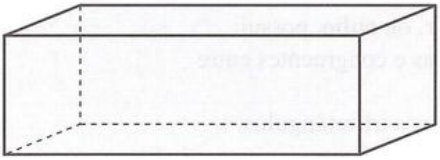
Icosaedro regular

Exercícios resolvidos

R.7 Dar um exemplo de um poliedro de Platão que não seja regular.

Resolução

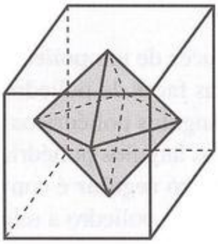
Consideremos o hexaedro convexo cujas faces não sejam quadradas:



Esse poliedro é de Platão e não é regular.

R.8 Qual é o poliedro cujos vértices são os centros das faces de um hexaedro regular?

Resolução



Os segmentos que unem os centros de duas faces adjacentes são congruentes. Logo, o poliedro cujos vértices são os centros das faces de um hexaedro regular tem, em todas as oito faces, triângulos equiláteros congruentes entre si. Esse poliedro é convexo e seus ângulos poliédricos são congruentes entre si. Portanto esse poliedro é um **octaedro regular**.

3. Resumo dos teoremas

T.52 Existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

T.53 Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.9, B.10, B.11, C.1, C.2, C.5, C.7, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, B.8, C.3, C.4, C.6, C.8, C.10, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Prove que "não existe poliedro de Platão com faces triangulares e ângulos hexaédricos (seis arestas)".

B.2 Demonstre que "não existe poliedro de Platão com faces quadrangulares e ângulos tetraédricos (quatro arestas)".

B.3 Justifique a seguinte afirmação: "não existe poliedro de Platão com faces heptagonais".

B.4 Prove que "não existe poliedro de Platão com faces octogonais".

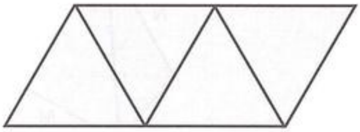
B.5 Qual é o poliedro de Platão que possui ângulos tetraédricos (quatro arestas)?

B.6 Um poliedro de Platão possui ângulos pentaédricos (cinco arestas). Que poliedro é esse?

B.7 Qual é o poliedro de Platão que possui faces pentagonais?

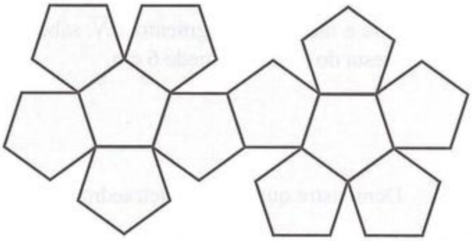
B.8 Desenhe em uma cartolina cada uma das figuras seguintes, com 5 cm de aresta. Recorte-as e construa cada um dos poliedros:

a)



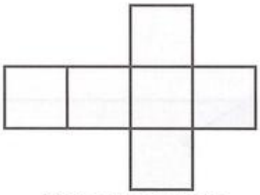
Tetraedro regular

d)



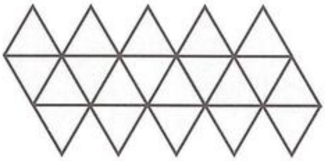
Dodecaedro regular

b)



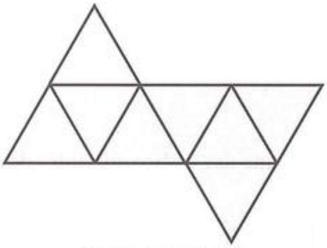
Hexaedro regular

e)



Icosaedro regular

c)



Octaedro regular

B.9 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:

a) Todo poliedro regular é de Platão.
b) Todo poliedro de Platão é regular.
c) Num poliedro regular todas as faces são congruentes entre si.
d) Se um poliedro possui as faces congruentes entre si, então esse poliedro é regular.
e) Num poliedro regular os ângulos poliédricos são congruentes entre si.
f) Se um poliedro possui os ângulos poliédricos congruentes entre si, então esse poliedro é regular.
g) As faces de um ângulo poliédrico de um poliedro regular são congruentes entre si.

B.10 Qual é o poliedro cujos vértices são os centros das faces de um octaedro regular?

B.11 Chama-se **centro de um poliedro regular** o ponto equidistante dos vértices. Se uma diagonal de um hexaedro regular mede 10 cm, qual é a distância do centro desse hexaedro a qualquer um dos vértices?

Exercícios complementares

C.1 Dê um exemplo de um hexaedro convexo que não seja de Platão.

C.2 Quantas arestas possui um dodecaedro de Platão?

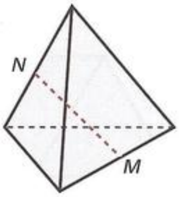
C.3 Quantos vértices possui um icosaedro de Platão?

C.4 Qual é o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular?

C.5 Qual é o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de duas faces opostas de um hexaedro regular?

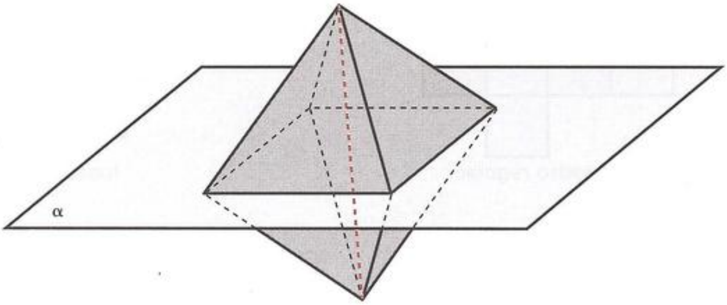
C.6 Qual é o poliedro cujos vértices são os centros das faces de um tetraedro regular?

C.7 M e N são pontos médios de duas arestas que não têm ponto comum, em um tetraedro regular. Calcule a medida do segmento $\overline{MN}$, sabendo que cada aresta do tetraedro mede 6 cm.



C.8 Demonstre que "em um tetraedro regular duas arestas que não têm ponto comum são ortogonais".

C.9 Justifique a seguinte afirmação: "se α é um plano que contém quatro vértices de um octaedro regular, então a diagonal do octaedro, que não está contida em α, é perpendicular a α".



C.10 Prove que "em um tetraedro regular o segmento de reta que une um vértice ao centro da face oposta é perpendicular ao plano dessa face".

C.11 Um tetraedro regular $ABCD$ tem centro O. Calcule a medida do diedro cujas faces são OAB e OAC.

Questões dos vestibulares

V.1 (E. E. S. C. U. S. P.) Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de:
a) um hexaedro regular.
b) um hexaedro não regular.
c) um octaedro regular.
d) um icosaedro regular.
e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

V.2 (PUC-SP) Um poliedro de Platão não pode ter:
a) faces triangulares.
b) faces quadrangulares.
c) faces pentagonais.
d) faces hexagonais.
e) ângulos pentaédricos.

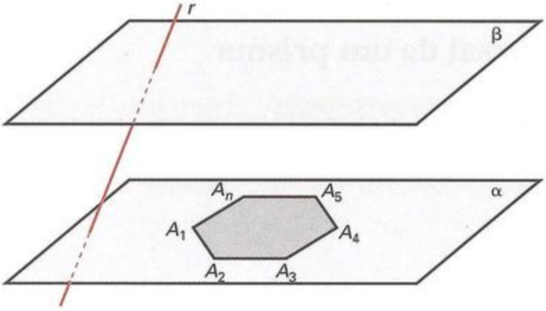
V.3 (Cescem-SP) Assinale a afirmação verdadeira:
a) Todo poliedro de Platão é regular.
b) Existe poliedro regular que não é de Platão.
c) A soma dos ângulos das faces de um hexaedro de Platão é 2160°.
d) Um octaedro regular possui oito vértices.
e) Todo hexaedro é de Platão.

Capítulo 51

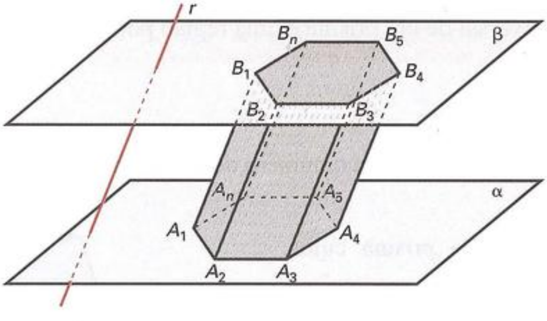
Prismas

1. Conceituação

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta r secante a esses planos e uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3...A_n$ contida em α.

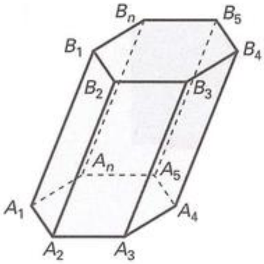

r
β
A_n
A_5
α
A_1
A_4
A_2
A_3

Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a r, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo pertencente a β.


r
B_n
B_5
β
B_1
B_4
B_2
B_3
A_n
A_5
α
A_1
A_4
A_2
A_3

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de **prisma limitado** ou simplesmente de **prisma**.

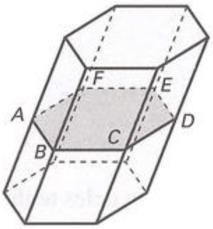
1.1. Elementos do prisma



- As regiões poligonais $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ são chamadas de "**bases** do prisma".
- Os polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ que limitam as bases são chamados de "**polígonos das bases** do prisma".
- As demais faces, exceto as bases, são chamadas de "**faces laterais** do prisma". Por exemplo, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ... são faces laterais.
- Os vértices das faces são chamados de "**vértices** do prisma". Por exemplo, A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... são vértices.
- Os lados das bases são chamados de "**arestas das bases** do prisma". Por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ..., são arestas das bases.
- As demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de "**arestas laterais** do prisma". Por exemplo, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, ... são arestas laterais.
- A distância entre os planos das bases é chamada de "**altura** do prisma".
- A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de "**área lateral** do prisma".
- A soma da área lateral com as áreas das duas bases é chamada de "**área total** do prisma".
- Todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma é chamado de "**diagonal** do prisma". Por exemplo, $\overline{B_1A_4}$ é uma diagonal do prisma.

1.2. Secção transversal de um prisma

Secção transversal de um prisma é qualquer intersecção não-vazia do prisma com um plano paralelo às suas bases.



ABCDEF é uma secção transversal do prisma.

Propriedade

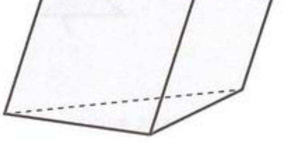
Toda secção transversal de um prisma é uma região poligonal congruente às bases.

1.3. Nomenclatura

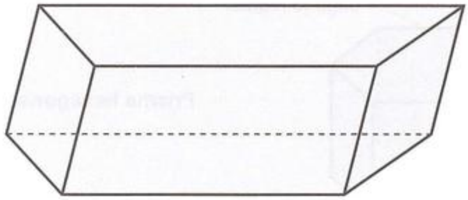
Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de uma base.

Exemplos

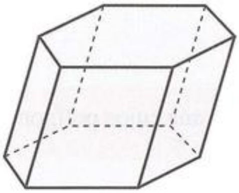
a) **Prisma triangular** é todo prisma cujos polígonos das bases são triângulos.



b) **Prisma quadrangular** é todo prisma cujos polígonos das bases são quadriláteros.



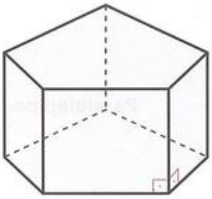
c) **Prisma hexagonal** é todo prisma cujos polígonos das bases são hexágonos.



1.4. Prisma reto

Um prisma é **reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

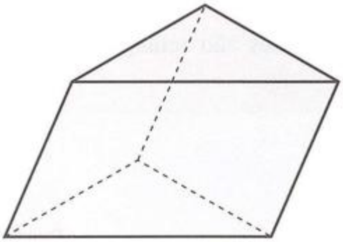
Exemplo



Prisma pentagonal reto

Nota: se um prisma não é reto, então é chamado de **prisma oblíquo**.

Exemplo

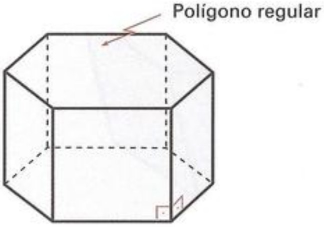


Prisma triangular oblíquo

1.5. Prisma regular

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e seus polígonos das bases são regulares.

Exemplo


Polígono regular

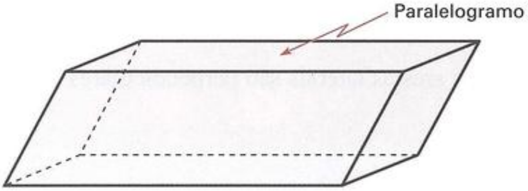
Prisma hexagonal regular

2. Paralelepípedo

Chama-se **paralelepípedo** todo prisma cujos polígonos das bases são **paralelogramos**.

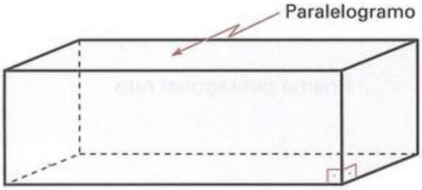
Exemplos

a)


Paralelogramo

Paralelepípedo oblíquo

b)


Paralelogramo

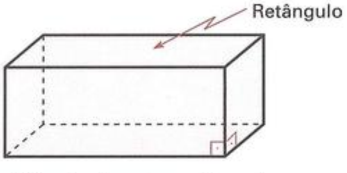
Paralelepípedo reto

2.1. Paralelepípedo reto-retângulo

Todo paralelepípedo reto cujos polígonos das bases são retângulos é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo**.

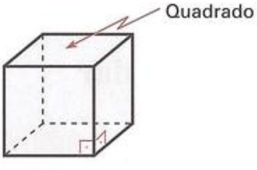
Exemplos

a)



Paralelepípedo reto-retângulo

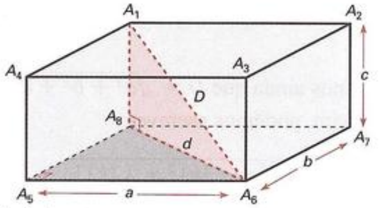
b)



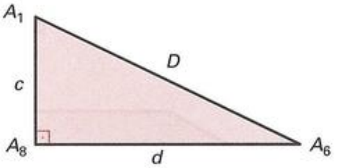
Cubo

Medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões comprimento, largura e altura sejam as medidas a, b e c. Sejam d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente:

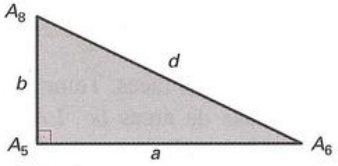


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_1A_8A_6$, temos:



$$D^2 = d^2 + c^2 \quad \textbf{(I)}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_5A_8A_6$, temos:



$$d^2 = a^2 + b^2 \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.}$$

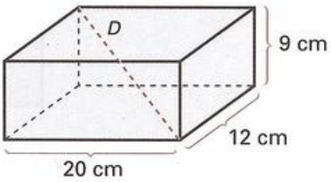
Exercícios resolvidos

R.1 As dimensões comprimento, largura e altura de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcular a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

Resolução

A medida D de uma diagonal é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das dimensões a, b e c, ou seja:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$



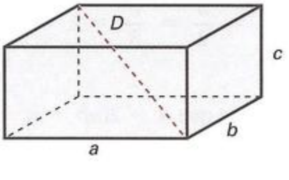
Logo, temos:

$$D = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2}\ \text{cm} \Rightarrow D = \sqrt{625}\ \text{cm} \ \therefore\ D = 25\ \text{cm}.$$

R.2 Sabe-se que um paralelepípedo reto-retângulo tem as dimensões diretamente proporcionais a 4, 3 e 2 e que sua diagonal mede $3\sqrt{29}$ cm. Determinar suas dimensões.

Resolução

Sejam a, b e c as medidas, em centímetros, das dimensões do paralelepípedo ao lado.



Temos que $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b = 3k \\ c = 2k. \end{cases}$

Temos ainda que $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $D = 3\sqrt{29}$.

Assim, podemos escrever:

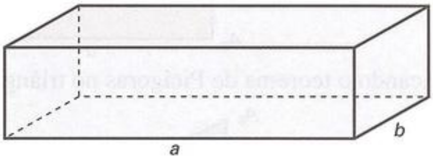
$$\sqrt{(4k)^2 + (3k)^2 + (2k)^2} = 3\sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{16k^2 + 9k^2 + 4k^2} = 3\sqrt{29} \therefore \sqrt{29k^2} = 3\sqrt{29}.$$

Como $k > 0$, podemos escrever $k\sqrt{29} = 3\sqrt{29} \therefore k = 3$.

Portanto as dimensões $4k$ cm, $3k$ cm e $2k$ cm são respectivamente 12 cm, 9 cm e 6 cm.

Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões comprimento, largura e altura sejam as medidas a, b e c.



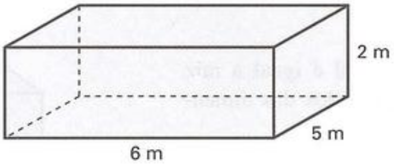
A área total desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces. Temos, dentre essas faces, duas regiões retangulares de áreas ab, duas de áreas ac e duas de áreas bc. Logo, a área total A_t desse paralelepípedo é:

$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc \quad \Rightarrow \quad A_t = 2(ab + ac + bc).$$

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular a área total de um paralelepípedo cujas dimensões comprimento, largura e altura são 6 m, 5 m e 2 m.

Resolução



$$A_t = 2(6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 2)\ \text{m}^2 \Rightarrow A_t = 104\ \text{m}^2.$$

R.4 Um paralelepípedo reto-retângulo tem área total igual a 198 cm² e suas dimensões são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3. Determinar a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

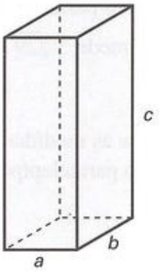
Resolução

Sejam a, b e c as medidas, em centímetros, das dimensões do paralelepípedo ao lado.

Temos que:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k \\ b = 2k \\ c = 3k. \end{cases}$$

Temos ainda que $A_t = 2(ab + ac + bc)$ e $A_t = 198$ cm².



Assim, podemos escrever:

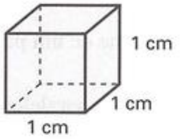
$$2(k \cdot 2k + k \cdot 3k + 2k \cdot 3k) = 198 \therefore 2(2k^2 + 3k^2 + 6k^2) = 198 \therefore 22k^2 = 198 \therefore k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3.$$

O valor de k deve ser positivo, pois, caso contrário, teríamos as dimensões do paralelepípedo representadas por números negativos, o que é absurdo. Assim, $k = 3$.

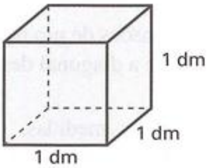
Portanto as dimensões do paralelepípedo são 3 cm, 6 cm e 9 cm. Logo, uma diagonal desse paralelepípedo tem medida D, calculada por $D = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2}$ cm $\Rightarrow D = 3\sqrt{14}$ cm.

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

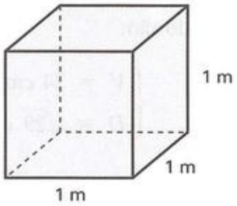
Consideremos um cubo (hexaedro regular) de aresta 1 cm. A porção do espaço ocupada por esse cubo é uma unidade de volume definida como 1 cm^3 (lê-se "um centímetro cúbico"). Analogamente definimos:



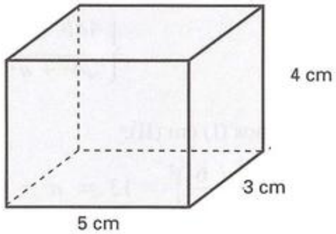
- 1 dm^3 (um decímetro cúbico) como sendo a porção do espaço ocupada por um cubo de aresta 1 dm;



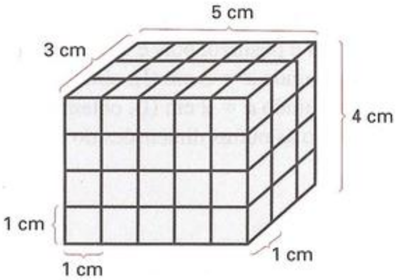
- 1 m^3 (um metro cúbico) como sendo a porção do espaço ocupada por um cubo de aresta 1 m;
- etc.



Vejamos como medir o volume, em centímetros cúbicos, de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 5 cm, 3 cm e 4 cm.



Devemos comparar o volume desse paralelepípedo com o volume de um cubo de aresta 1 cm, ou seja, devemos calcular a quantidade desses cubos necessária para formar um volume igual ao volume do paralelepípedo. Para isso, vamos formar, com cubos de 1 cm de aresta, um paralelepípedo com as dimensões 5 cm, 3 cm e 4 cm, conforme figura ao lado.

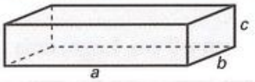


Pense nessa figura como sendo um prédio. No último andar podemos contar quinze cubos e em cada um dos outros andares há também quinze cubos. Como temos quatro andares com quinze cubos em cada um, o total de cubos é $15 \cdot 4 = 60$. Assim, o volume do paralelepípedo é 60 cm^3. Note, portanto, que o volume do paralelepípedo é calculado multiplicando-se suas dimensões:

$$V = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 60\text{ cm}^3.$$

De modo geral, temos o seguinte:

O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é o produto das três dimensões:



$$V = abc.$$

Exercícios resolvidos

R.5 Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 6 m, 3 m e 2 m.

Resolução

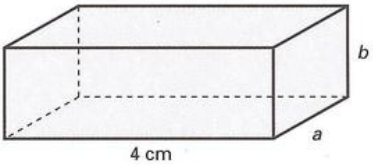
O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto de suas dimensões, ou seja:

$$V = 6\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot 2\text{ m} \Rightarrow V = 36\text{ m}^3.$$

R.6 Uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo é 4 cm. Determinar as outras dimensões, sabendo que o volume e a diagonal desse paralelepípedo medem, respectivamente, 24 cm³ e $\sqrt{29}$ cm.

Resolução

Sejam a e b as medidas, em centímetros, das dimensões desconhecidas do paralelepípedo. O volume V e a medida D de uma diagonal desse paralelepípedo são:



$$\begin{cases} V = 24\text{ cm}^3 \\ D = \sqrt{29}\text{ cm}. \end{cases}$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} 4ab = 24 \\ \sqrt{4^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{6}{a} \quad \textbf{(I)} \\ a^2 + b^2 = 13. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):

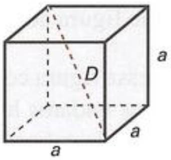
$$a^2 + \left(\frac{6}{a}\right)^2 = 13 \Rightarrow a^2 + \frac{36}{a^2} = 13 \therefore \frac{a^4 + 36}{a^2} = \frac{13a^2}{a^2} \therefore a^4 - 13a^2 + 36 = 0.$$

Fazemos $a^2 = y$: $y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow y = 9$ ou $y = 4$.

Logo, temos que $a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$ ou $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$.

Como a é positivo, pois é uma das dimensões do paralelepípedo, temos $a = 3$ ou $a = 2$.
Substituindo $a = 3$ em (I), obtemos $b = 2$.
Substituindo $a = 2$ em (I), obtemos $b = 3$.
Portanto as outras dimensões do paralelepípedo são 2 cm e 3 cm.

3. Cubo



O cubo (hexaedro regular) é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm todas a mesma medida a. As medidas de uma diagonal, da área total e do volume do cubo são obtidas pelas fórmulas do paralelepípedo reto-retângulo de arestas a, b e c:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad A_t = 2(ab + ac + bc), \quad V = abc,$$

fazendo $a = b = c$.

3.1. Medida da diagonal de um cubo cuja aresta mede *a*

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \quad \therefore \quad \boxed{D = a\sqrt{3}\,.}$$

3.2. Área total do cubo cuja aresta mede *a*

$$A_t = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \Rightarrow \quad \boxed{A_t = 6a^2.}$$

Nota: a área lateral do cubo é $\boxed{A_\ell = 4a^2.}$

3.3. Volume do cubo cuja aresta mede *a*

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \quad \boxed{V = a^3.}$$

Exercícios resolvidos

R.7 A medida de uma aresta de um cubo é 4 cm. Determinar:

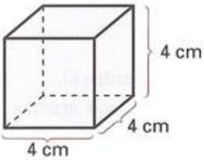
a) a medida de uma diagonal desse cubo;

b) a área total desse cubo;

c) a área lateral desse cubo;

d) o volume desse cubo.

Resolução



a) $D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 4\sqrt{3}$ cm.

b) $A_t = 6a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$.

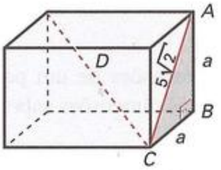
c) $A_\ell = 4a^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 64\ \text{cm}^2$.

d) $V = a^3 \Rightarrow V = 4^3\ \text{cm}^3 = 64\ \text{cm}^3$.

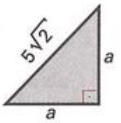
R.8 Uma diagonal de uma face de um cubo mede $5\sqrt{2}$ cm. Determinar a medida de uma diagonal desse cubo.

Resolução

Seja *a* a medida da aresta do cubo:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:



$$a^2 + a^2 = (5\sqrt{2}\,)^2 \Rightarrow 2a^2 = 50$$
$$\therefore a^2 = 25 \;\therefore a = \pm 5.$$

Como *a* deve ser positivo, pois é medida de uma aresta, temos que $a = 5$.

A medida *D* da diagonal do cubo é dada por $D = a\sqrt{3}$.

Logo, $D = 5\sqrt{3}$ cm.

4. Resumo dos teoremas

T.54 A medida D da diagonal, a área total A_t e o volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c são:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ ;\ A_t = 2(ab + ac + bc);\ V = abc.$$

T.55 A medida D da diagonal, a área lateral A_ℓ, a área total A_t, e o volume V de um cubo cuja aresta mede a são:

$$D = a\sqrt{3}\ ;\ A_\ell = 4a^2;\ A_t = 6a^2;\ V = a^3.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.6, B.10, B.11, B.13, B.14 C.3, C.4, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.7, B.8, B.12, B.15, B.16, B.17, C.1, C.2, C.5, C.6, C.7, C.8, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Classifique como V ou F cada uma das afirmações seguintes:

a) A medida de uma aresta lateral de um prisma é igual à medida da altura desse prisma.
b) A medida de uma aresta lateral de um prisma reto é igual à medida da altura desse prisma.
c) Os planos que contêm duas faces laterais distintas de um prisma qualquer não podem ser paralelos.
d) Um prisma regular é necessariamente reto e seus polígonos das bases são regulares.
e) A medida de uma aresta lateral de um prisma regular é igual à medida da altura desse prisma.
f) Os polígonos das bases de um prisma qualquer são congruentes.
g) As faces laterais de um prisma qualquer são regiões retangulares.
h) Um paralelepípedo possui quatro diagonais.
i) As diagonais de um paralelepípedo reto-retângulo são congruentes entre si.
j) A medida de uma diagonal de um cubo é igual à medida de uma de suas arestas.
k) Um prisma heptagonal possui 21 arestas.

B.2 As dimensões comprimento, largura e altura de um paralelepípedo reto-retângulo são 4 cm, $\sqrt{11}$ cm e 3 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

B.3 As medidas, em metros, das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo estão em progressão aritmética de razão igual a 1. Determine essas dimensões, sabendo que uma diagonal desse paralelepípedo mede $2\sqrt{5}$ m.

B.4 As medidas, em centímetros, das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo estão em progressão geométrica de razão 2. Determine essas dimensões sabendo que uma diagonal desse paralelepípedo mede $16\sqrt{21}$ cm.

B.5 Calcule a área total de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 5 m, 2 m e 1 m.

B.6 As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são diretamente proporcionais a 1, 2 e 4. Determine essas dimensões sabendo que a área total desse paralelepípedo é 252 cm².

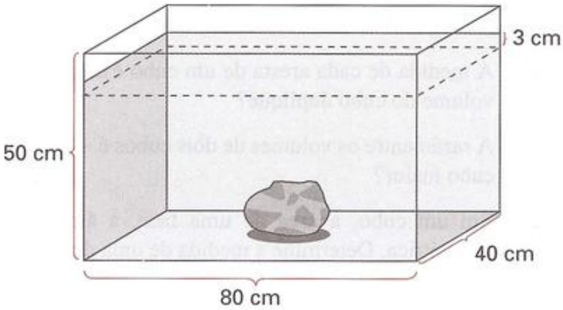
B.7 A área total de uma paralelepípedo reto-retângulo é 42 cm². Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo, sabendo que uma de suas dimensões é 2 cm e que as outras duas dimensões são iguais.

B.8 Uma das faces de um paralelepípedo reto-retângulo é uma região retangular cujos lados medem 12 cm e 3 cm. Calcule a área total desse paralelepípedo sabendo que sua diagonal mede 13 cm.

B.9 Calcule o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 2 cm.

B.10 Definição: "um litro é igual a um decímetro cúbico (1 litro = 1 dm^3)". Calcule a capacidade, em litros, de uma piscina cuja forma é de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 m, 10 m e 2 m.

B.11 Um recipiente tem forma de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 80 cm, 40 cm e 50 cm e contém água até um certo nível. Coloca-se, dentro desse recipiente, uma pedra que fica completamente submersa. Após a imersão da pedra, o nível de água sobe 3 cm. Calcule o volume dessa pedra.



B.12 As medidas, em centímetros, de duas dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são números inteiros consecutivos e a terceira dimensão é 6 cm. Calcule o volume desse paralelepípedo, sabendo que uma de suas diagonais mede 7 cm.

B.13 Uma aresta de um cabo mede 6 cm. Determine, desse cubo:

a) a medida de uma diagonal;
b) a área total;
c) a área lateral;
d) o volume.

B.14 Calcule o volume de um cubo cuja diagonal mede $\sqrt{6}$ cm.

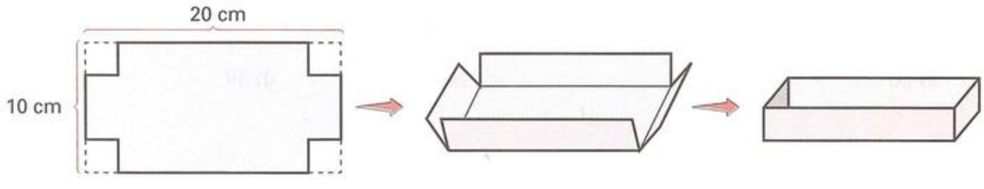
B.15 Calcule a área total de um cubo cuja diagonal mede 1 cm.

B.16 Uma diagonal de uma face de um cubo mede $\sqrt{2}$ m. Calcule a medida de uma diagonal desse cubo.

B.17 Sendo A_t, d e D as medidas da área total da diagonal de uma face e da diagonal de um cubo, respectivamente, determine a medida a da aresta desse cubo sabendo que $adD = \sqrt{A_t}$.

Exercícios complementares

C.1 Uma folha retangular de cartolina tem comprimento 20 cm e largura 10 cm. Recortam-se dessa folha quatro quadrados congruentes de modo que cada um deles tenha um dos vértices em um vértice da folha. A seguir, dobra-se essa folha, formando-se uma superfície aberta de um paralelepípedo reto-retângulo:



Qual é a medida do lado de cada quadrado retirado, sabendo que a medida de uma diagonal da "caixa" construída mede $6\sqrt{11}$ cm?

C.2 No exercício anterior, qual deve ser a medida do lado de cada quadrado retirado para que a área total da caixa seja máxima? **Cuidado!** A superfície da caixa é aberta, ou seja: é uma caixa sem tampa.

C.3 Duas das três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são iguais. Calcule o volume desse paralelepípedo, sabendo que as medidas, em metros, das arestas desse paralelepípedo são números inteiros, sua área é 10 m^2 e que uma de suas diagonais mede $\sqrt{6}$ m.

C.4 As medidas, em centímetros, do comprimento, da largura, da altura e de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão igual a 2. Calcule o volume desse paralelepípedo.

C.5 Prove que "as diagonais de um paralelepípedo interceptam-se num mesmo ponto que é o ponto médio de cada uma delas".

C.6 A medida da diagonal de um cubo é D. Calcule, em função de D, o volume desse cubo.

C.7 A diagonal de uma face de um cubo mede d. Calcule, em função de d, a medida da diagonal do cubo.

C.8 A medida de cada aresta de um cubo é a. Quanto se deve acrescentar à medida de cada aresta para que o volume do cubo duplique?

C.9 A razão entre os volumes de dois cubos é $\frac{1}{27}$. Qual a razão entre a medida da aresta do cubo menor e a do cubo maior?

C.10 Em um cubo, a área de uma face, a área total e o volume formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Determine a medida de uma diagonal desse cubo.

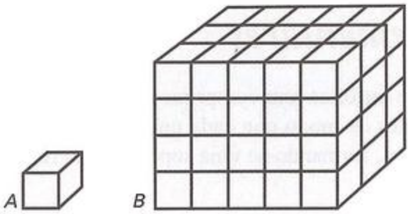
Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Um tanque em forma de um paralelepípedo reto-retângulo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 e 1,2 m. Um indivíduo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075 m. Então o volume do indivíduo, em metros cúbicos, é:
a) 0,066 b) 0,072 c) 0,096 d) 0,600 e) 1,000

V.2 (Vunesp) As faces de um paralelepípedo reto-retângulo têm por áreas 6 cm² 9 cm² e 24 cm². O volume desse paralelepípedo é:
a) 1296 cm³ b) 48 cm³ c) 39 cm³ d) 36 cm³ e) $6\sqrt{6}$ cm³

V.3 (Mackenzie-SP) Aumentando-se de 1 m cada aresta de um cubo, a sua área lateral aumenta de 164 m². O volume do cubo original é:
a) 6000 m³ b) 7000 m³ c) 8000 m³ d) 12000 m³ e) 16400 m³

V.4 (Vunesp) Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?



a) 60 b) 47 c) 94 d) 39 e) 48

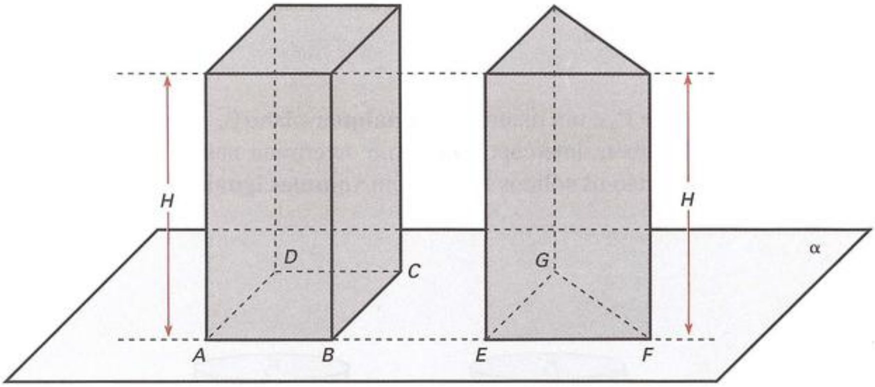
Capítulo 52

Comparação de volumes

1. Princípio de Cavalieri

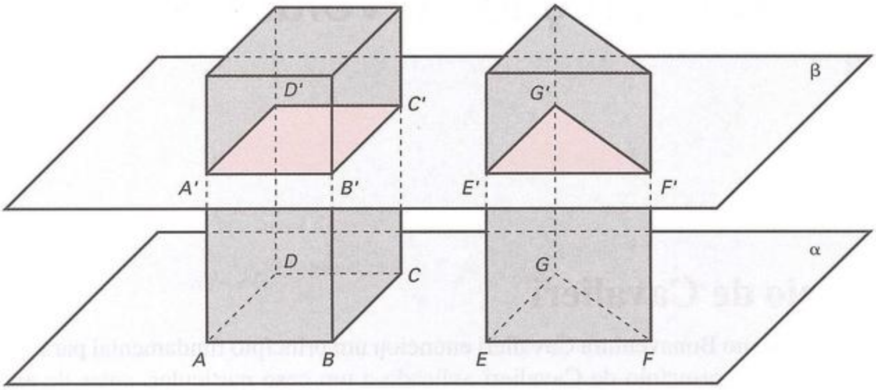
O matemático italiano Bonaventura Cavalieri enunciou um princípio fundamental para a comparação de volumes. Vejamos o princípio de Cavalieri aplicado a um caso particular, antes de enunciá-lo de modo geral.

Consideremos, em um semi-espaço de origem α, dois prismas de mesma altura H: um deles com base retangular $ABCD$ e o outro com base triangular EFG, de modo que essas bases estejam contidas em α e tenham a mesma área.



Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano, discípulo de Galileu. Publicou em 1635 um dos livros mais influentes do período moderno: *Geometria indivisibilibus continuorum.*

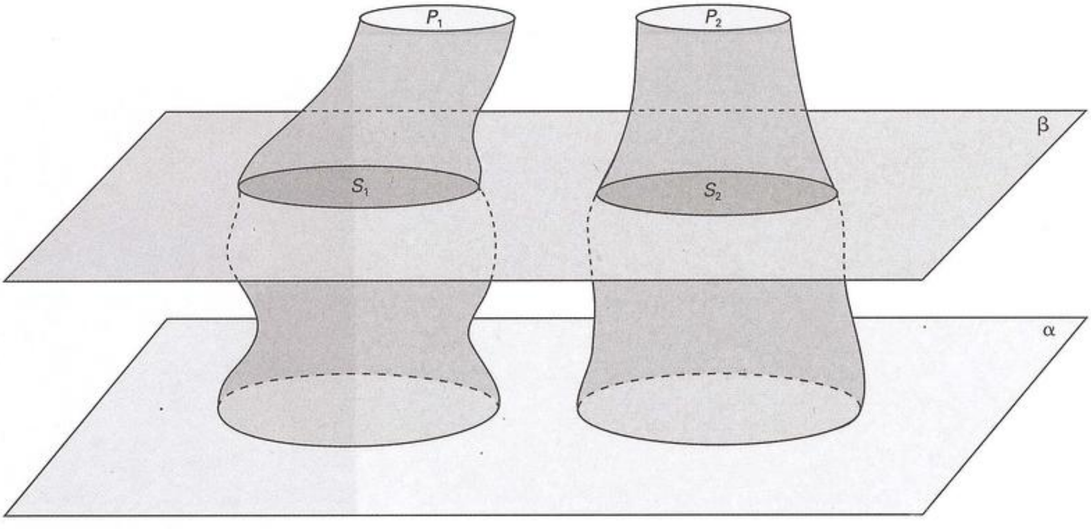
Note que qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos prismas também intercepta o outro.



Como qualquer secção transversal de um prisma é congruente às suas bases, temos que qualquer plano β, nas condições anteriores, determina nesses prismas **secções de mesma área**. O princípio de Cavalieri nos garante que, obedecidas essas condições, os prismas têm volumes iguais.

De modo geral, Cavalieri enunciou:

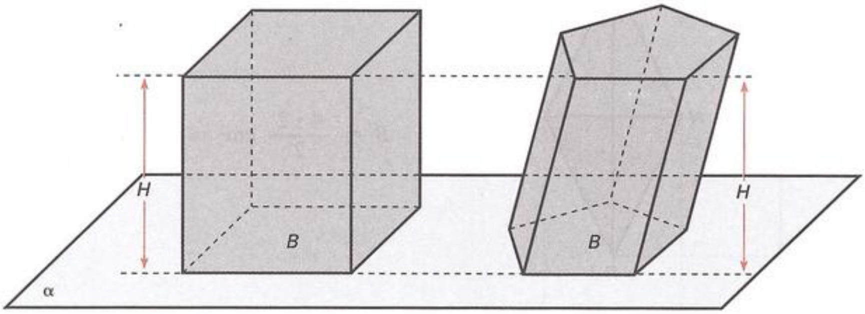
> Sejam dois sólidos P_1 e P_2 e um plano α. Se **qualquer** plano β, **paralelo a** α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos **secções de áreas iguais** ($S_1 = S_2$), então os sólidos P_1 e P_2 têm **volumes iguais**.



O princípio de Cavalieri nos auxilia a calcular o volume de um prisma qualquer a partir do volume do paralelepípedo reto-retângulo. É o que vamos fazer agora.

2. Volume de um prisma qualquer

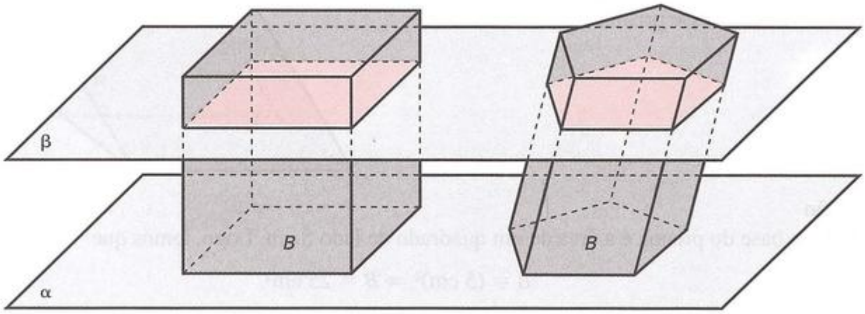
Consideremos em um semi-espaço de origem α um paralelepípedo reto-retângulo e um prisma de mesma altura H cujas bases estão contidas em α e têm mesma área B:



Se as arestas da base do paralelepípedo medem m e n, então o seu volume é $V = mnH$. Como $mn = B$ (área da base), temos que o volume do paralelepípedo é o produto da área da base (B) pela altura (H),

ou seja: $V = BH$.

Note que qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos prismas também intercepta o outro.



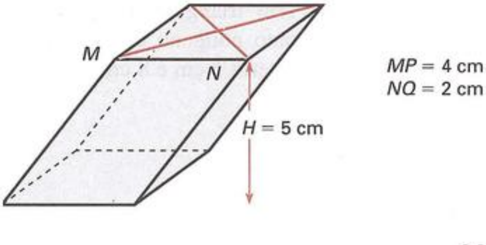
Toda secção transversal de um prisma é congruente às suas bases. Temos então que todo plano β, $\beta \parallel \alpha$, que intercepta esses prismas determina neles secções de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri temos que esses prismas têm o mesmo volume V. Como o volume do paralelepípedo reto-retângulo é $V = BH$, temos que o volume do outro prisma também é $V = BH$.

Desse modo, provamos o seguinte:

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base pela sua altura.

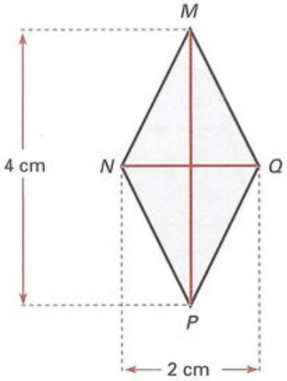
Exercícios resolvidos

R.1 Calcular o volume de um prisma de altura 5 cm cuja base é um losango de diagonais 4 cm e 2 cm.



Resolução

A área de um losango é igual ao semiproduto das diagonais. Logo, a área B da base do prisma é:

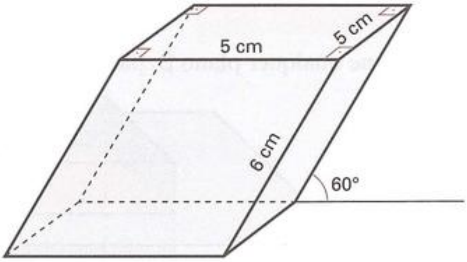


$$B = \frac{4 \cdot 2}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 4\ \text{cm}^2.$$

O volume do prisma é igual ao produto da área da base pela altura; logo, temos que:

$$V = BH \Rightarrow V = 4\ \text{cm}^2 \cdot 5\ \text{cm}\ \therefore\ V = 20\ \text{cm}^3.$$

R.2 O polígono de uma base de um prisma é um quadrado de lado 5 cm. Cada aresta lateral mede 6 cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°. Calcular o volume desse prisma.

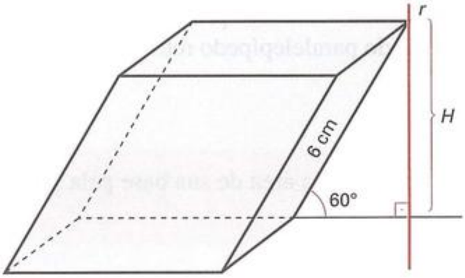


Resolução

A área B da base do prisma é a área de um quadrado de lado 5 cm. Logo, temos que:

$$B = (5\ \text{cm})^2 \Rightarrow B = 25\ \text{cm}^2.$$

Para calcular a altura desse prisma, vamos traçar por um dos vértices a reta r perpendicular às bases.

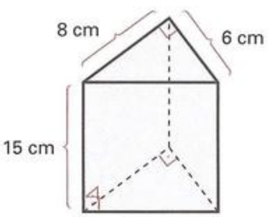


Temos que:

$$\text{sen}\ 60° = \frac{H}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{6}\ \therefore\ H = 3\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

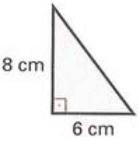
Assim, o volume V do prisma é dado por $V = BH \Rightarrow V = 25\ \text{cm}^2 \cdot 3\sqrt{3}\ \text{cm}\ \therefore\ V = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

R.3 Um prisma reto triangular de aresta lateral de 15 cm tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm. Calcular o volume desse prisma.



Resolução

Em todo prisma reto, a medida H da altura é a própria medida de uma aresta lateral. Logo, $H = 15$ cm.
A área B da base desse prisma é a área de um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm; logo, temos:



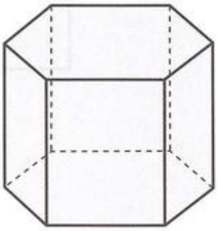
$$B = \frac{8 \cdot 6}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 24 \text{ cm}^2.$$

Portanto o volume V do prisma é $V = BH \Rightarrow V = 24 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} \therefore V = 360 \text{ cm}^3$.

3. Prismas regulares

Faremos agora um estudo sobre áreas e volumes de prismas regulares. Convém, portanto, recordarmos a definição desse tipo de poliedro.

Um prisma é regular se, e somente se, é **reto** e seus **polígonos das bases são regulares.**



Prisma regular hexagonal

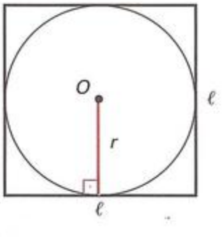
É importante recordarmos também o estudo de alguns polígonos regulares.

Quadrado

Apótema do quadrado

O apótema r (raio da circunferência inscrita) do quadrado mede metade do lado ℓ do quadrado:

$$r = \frac{\ell}{2}.$$

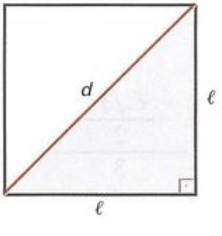


Diagonal do quadrado

Pelo teorema de Pitágoras:

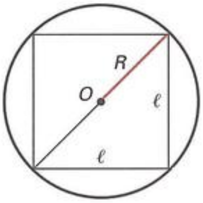
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2$$

$$\therefore \quad d = \ell\sqrt{2}.$$



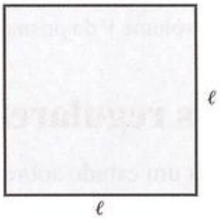
Raio da circunferência circunscrita ao quadrado

O raio R da circunferência circunscrita ao quadrado mede metade da diagonal d do quadrado:



$$R = \frac{d}{2} \Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}.$$

Área do quadrado



$$A = \ell^2.$$

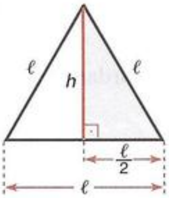
Perímetro do quadrado

$$\text{Perímetro} = 4\ell.$$

Triângulo equilátero

Altura do triângulo equilátero

Pelo teorema de Pitágoras:

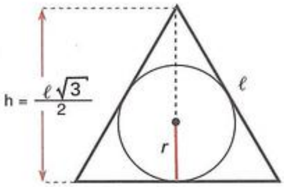


$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$\therefore\ h^2 = \frac{3\ell^2}{4}\ \therefore\ h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

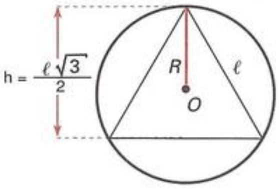
Apótema do triângulo equilátero

O apótema r (raio da circunferência inscrita) do triângulo equilátero mede $\frac{1}{3}$ da altura h:



$$r = \frac{h}{3} \Rightarrow r = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{3}\ \therefore\ r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}.$$

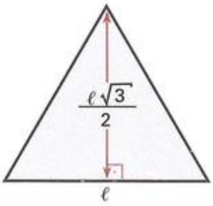
Raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero



O raio R da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero mede $\frac{2}{3}$ da altura h:

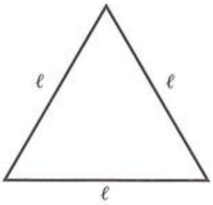
$$R = \frac{2h}{3} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{3} \quad \therefore \quad R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}.$$

Área do triângulo equilátero



$$A = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

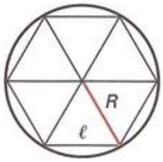
Perímetro do triângulo equilátero



Perímetro = 3ℓ.

Hexágono regular

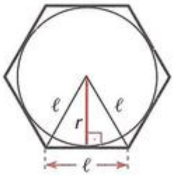
Raio da circunferência circunscrita ao hexágono regular



As diagonais do hexágono regular que passam pelo seu centro dividem-no em seis triângulos equiláteros. Logo, o raio da circunferência circunscrita tem a mesma medida do lado do hexágono regular:

$$R = \ell.$$

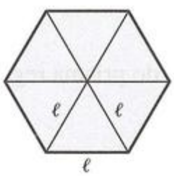
Apótema do hexágono regular



O apótema r (raio da circunferência inscrita) do hexágono regular de lado ℓ tem a medida da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ:

$$r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Área do hexágono regular

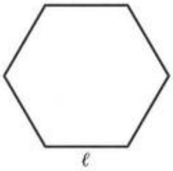


A área de um hexágono regular de lado ℓ é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

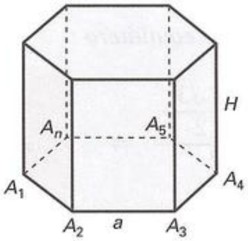
Perímetro do hexágono regular

$$\text{Perímetro} = 6\ell.$$



3.1. Estudo das medidas de um prisma regular

Consideremos um prisma regular de altura H tal que cada base possui n arestas de medida a.



Volume (V)

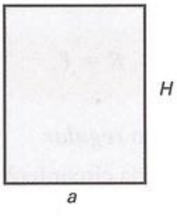
O volume V de qualquer prisma, regular ou não, é o produto da área B de sua base pela sua altura H:

$$V = BH.$$

Área de uma face lateral (A_f)

A área A_f de cada face lateral do prisma regular é a área de um retângulo onde um dos lados é uma aresta da base do prisma e o outro é uma aresta lateral. Logo, temos:

$$A_f = aH.$$



Área lateral (A_ℓ)

A área lateral A_ℓ do prisma regular é igual a n vezes a área A_f de uma face lateral:

$$A_\ell = nA_f.$$ **(n é o número de faces laterais)**

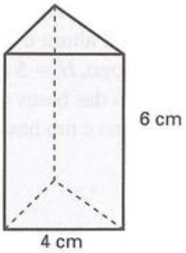
Área total (A_t)

A área total A_t do prisma regular é a soma da área lateral A_ℓ com duas vezes a área B de uma base:

$$A_t = A_\ell + 2B.$$

Exercícios resolvidos

R.4 Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 6 cm e arestas da base de 4 cm. Calcular o volume, a área lateral e a área total desse prisma.

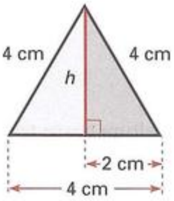


Resolução

Cálculo do volume

Todo prisma regular é **reto**. Logo, temos que a medida de uma aresta lateral é a própria medida H da altura do prisma. Assim, $H = 6$ cm.

Ainda pelo fato de o prisma ser regular, temos que o triângulo da base deve ser equilátero. Sendo h a altura do triângulo equilátero, temos pelo teorema de Pitágoras que:



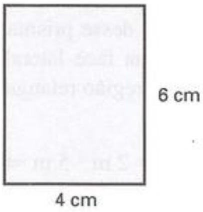
$$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 = 12 \therefore h = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Assim, a área B desse triângulo é $B = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Finalmente, o volume V do prisma é $V = BH \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} \therefore V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Cálculo da área lateral

A área lateral desse prisma é igual a três vezes a área A_f de uma face lateral. Cada face lateral do prisma é uma região retangular de lados 4 cm e 6 cm. Logo, temos:



$$A_f = 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \Rightarrow A_f = 24 \text{ cm}^2.$$

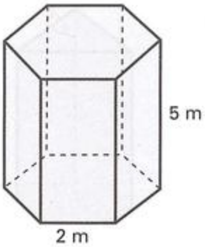
Portanto, a área lateral A_ℓ do prisma é $A_\ell = 3A_f \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 24 \text{ cm}^2 \therefore A_\ell = 72 \text{ cm}^2$.

Cálculo da área total

A área total é a soma da área lateral com duas vezes a área de uma base, ou seja:

$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 72 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad \therefore A_t = 8(9 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

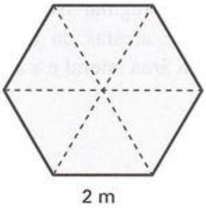
R.5 Um prisma regular hexagonal tem aresta da base com 2 m e aresta lateral com 5 m. Calcular o volume, a área lateral e a área total desse prisma.



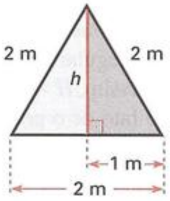
Resolução

Cálculo do volume

Como todo prisma regular é **reto**, temos que a medida H de sua altura é a própria medida de uma aresta lateral. Logo, $H = 5$ m. Em todo prisma regular, os polígonos das bases são regulares. Logo, cada base desse prisma é um hexágono regular.



A área desse hexágono é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 2 m.



Sendo h a altura desse triângulo equilátero, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ m}.$$

A área A desse triângulo é $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 \Rightarrow A = \sqrt{3} \text{ m}^2$.

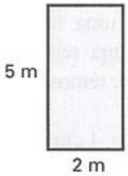
Logo, a área B da região hexagonal é $B = 6A \Rightarrow B = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$.

Temos então que o volume V do prisma é $V = BH \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ m} \therefore V = 30\sqrt{3} \text{ m}^3$.

Cálculo da área lateral

A área lateral desse prisma é igual a seis vezes a área A_f de uma face lateral. Cada face lateral do prisma é uma região retangular de lados 2 m e 5 m. Logo, temos:

$$A_f = 2 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow A_f = 10 \text{ m}^2.$$



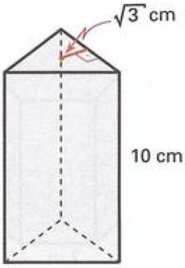
Sendo A_ℓ a área lateral do prisma, temos $A_\ell = 6A_f \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 10 \text{ m}^2 \therefore A_\ell = 60 \text{ m}^2$.

Cálculo da área total

A área total A_t é a soma da área lateral A_ℓ com duas vezes a área de uma base B, ou seja:

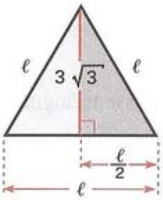
$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 60 \text{ m}^2 + 2 \cdot 6\sqrt{3} \text{ m}^2 \therefore A_t = 12(5 + \sqrt{3}) \text{ m}^2.$$

R.6 Em um prisma regular triangular, a altura mede 10 cm e o apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Calcular a área total desse prisma.



Resolução

O triângulo da base desse prisma é equilátero e seu apótema mede $\sqrt{3}$ cm. O apótema do triângulo equilátero mede um terço de sua altura h. Logo, $h = 3\sqrt{3}$ cm.

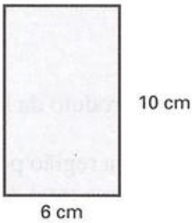


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow 27 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \quad \therefore 27 = \frac{3\ell^2}{4} \quad \therefore \ \ell^2 = 36 \ \therefore \ \ell = 6 \text{ cm}.$$

Podemos, então, calcular a área B da base do prisma: $B = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$ cm$^2 \Rightarrow B = 9\sqrt{3}$ cm^2.

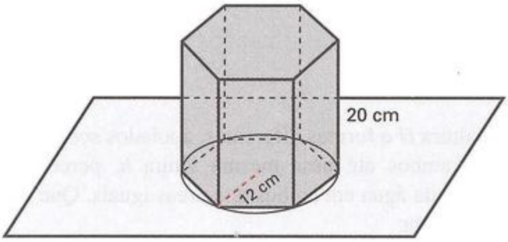
Cada face lateral do prisma é uma região retangular de lados 6 cm e 10 cm.
A área A_f de cada face lateral é $A_f = 6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow A_f = 60 \text{ cm}^2$.



Assim, a área lateral A_ℓ do prisma é $A_\ell = 3A_f \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 60 \text{ cm}^2 \therefore A_\ell = 180 \text{ cm}^2$.
Finalmente, podemos calcular a área total A_t do prisma:

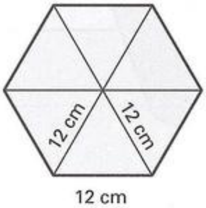
$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 180 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad \therefore \ A_t = 18(10 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

R.7 Em um prisma regular hexagonal, uma aresta lateral mede 20 cm e o raio da circunferência circunscrita a uma de suas bases mede 12 cm. Calcular o volume desse prisma.



Resolução

O raio da circunferência circunscrita a um hexágono regular tem a mesma medida do lado desse hexágono. Portanto a aresta da base desse prisma mede 12 cm.

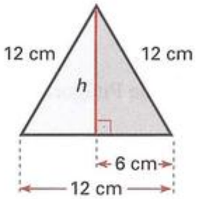


A área desse hexágono é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 12 cm. Sendo h a altura desse triângulo, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 108 \ \therefore \ h = 6\sqrt{3}\text{ cm}.$$

A área A desse triângulo é:

$$A = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2 \Rightarrow A = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$



Portanto a área B da base do hexágono é $B = 6A \Rightarrow B = 6 \cdot 36\sqrt{3}\text{ cm}^2 \ \therefore \ B = 216\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
Como o prisma é regular, a medida H de sua altura é a própria medida de uma aresta lateral. Logo, $H = 20$ cm. Finalmente, o volume V do prisma é:

$$V = BH \Rightarrow V = 216\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot 20\text{ cm} \ \therefore \ V = 4\,320\sqrt{3}\text{ cm}^3.$$

4. Resumo dos teoremas

T.56 O volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua base por sua altura.

T.57 Se uma base de um prisma regular é uma região poligonal de n lados e área B, e cada face lateral tem área A_f, então a área lateral A_ℓ e a área total A_t desse prisma são:

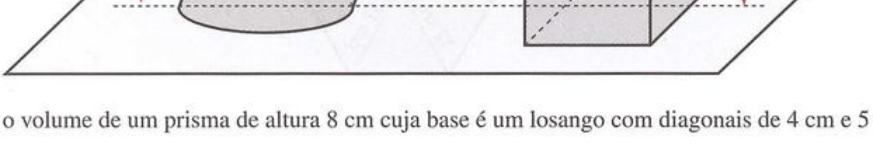
$$A_\ell = nA_f;\ A_t = nA_f + 2B.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8, B.9, B.11, C.1, C.6, C.8, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.10, B.12, C.2, C.3, C.4, C.5, C.7, C.10, C.11, C.12.

Exercícios básicos

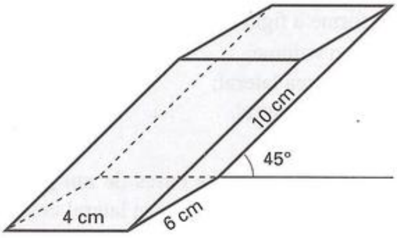
B.1 Dois vasos de mesma altura H e formas diferentes, apoiados sobre uma mesa, têm a seguinte propriedade: colocando-se água em ambos até uma mesma altura h, percebe-se que, para qualquer que seja h, $0 \leq h \leq H$, as superfícies da água em ambos têm áreas iguais. Que relação existe entre os volumes desses vasos? Justifique sua resposta.



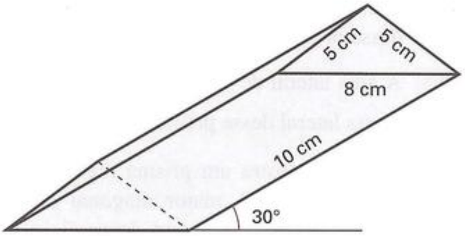
B.2 Calcule o volume de um prisma de altura 8 cm cuja base é um losango com diagonais de 4 cm e 5 cm.

B.3 O polígono da base de um prisma reto é um losango em que uma das diagonais mede 8 cm e um lado mede 5 cm. Calcule o volume desse prisma, sabendo que cada aresta lateral mede 6 cm. (**Sugestão:** lembre-se de que o losango tem os quatro lados congruentes entre si e de que suas diagonais são perpendiculares entre si pelos respectivos pontos médios.)

B.4 O polígono da base de um prisma é um retângulo de lados 6 cm e 4 cm. Cada aresta lateral mede 10 cm e forma com os planos das bases ângulos de 45°. Calcule o volume desse prisma.



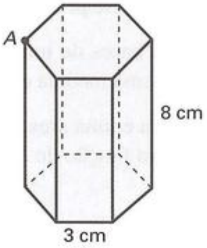
B.5 Um prisma possui como polígono da base um triângulo isósceles de lados 8 cm, 5 cm e 5 cm. Cada aresta lateral do prisma mede 10 cm e forma com os planos das bases ângulos de 30°. Calcule o volume desse prisma.



B.6 Um prisma reto de aresta lateral 10 m tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 5 m e 12 m. Calcule o volume desse prisma.

B.7 Um prisma reto de aresta lateral 8 cm tem como polígono da base um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa 4 cm. Calcule o volume desse prisma.

B.8 A figura mostra um prisma regular hexagonal de altura 8 cm e aresta da base 3 cm.



a) Quantas diagonais possui esse prisma?

b) Qual é a medida da maior diagonal que passa pelo vértice A?

B.9 Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 10 cm e arestas da base de 6 cm. Calcule, desse prisma:

a) o volume; b) a área lateral; c) a área total.

B.10 Um prisma regular triangular tem todas as nove arestas congruentes entre si. Calcule a área total desse prisma, sabendo que seu volume é $16\sqrt{3}$ dm^3.

B.11 Um prisma regular hexagonal tem arestas laterais de 5 cm e arestas da base de 2 cm. Calcule, desse prisma:

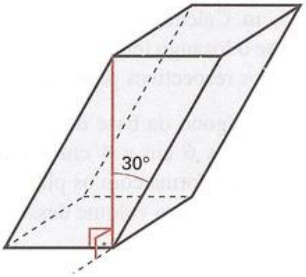
a) o volume; b) a área lateral; c) a área total.

B.12 Um prisma regular hexagonal possui todas as dezoito arestas congruentes entre si. Calcule o volume desse prisma, sabendo que sua área lateral é 96 m^2.

Exercícios complementares

C.1 Os polígonos das bases de um prisma são quadrados de lado 5 cm. Uma diagonal de face é perpendicular aos planos das bases e forma ângulo de 30º com uma aresta lateral, conforme a figura. Calcule, desse prisma:

a) o volume;
b) a área lateral;
c) a área total.



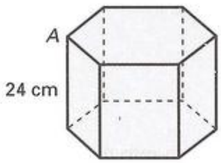
C.2 Os polígonos das bases de um prisma reto são trapézios isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 8 cm e 14 cm. Sabendo que uma aresta lateral desse prisma mede 6 cm, calcule:

a) o volume do prisma;
b) a área lateral do prisma;
c) a área total do prisma.

C.3 Em um prisma regular triangular, cada aresta lateral mede o dobro de uma aresta da base. Calcule o volume desse prisma, sabendo que sua área lateral é igual a 24 cm^2.

C.4 A área lateral de um prisma regular triangular é o dobro da área de uma de suas bases. Sabendo que uma aresta lateral desse prisma mede $2\sqrt{3}$ m, calcule seu volume.

C.5 A figura mostra um prisma regular hexagonal de altura 24 cm. A maior diagonal do prisma que passa pelo vértice A tem dezesseis centímetros a mais do que a maior diagonal da base que passa por A. Calcule:



a) o volume do prisma;
b) a área lateral do prisma;
c) a área total do prisma.

C.6 A medida de uma aresta lateral de um prisma regular hexagonal é o triplo do apótema de uma das bases. Calcule a área total desse prisma sabendo que seu volume é igual a 54 cm^3.

C.7 Um cubo cuja aresta mede a tem o mesmo volume de um prisma regular triangular cuja aresta da base também mede a. Calcule a medida da altura desse prisma.

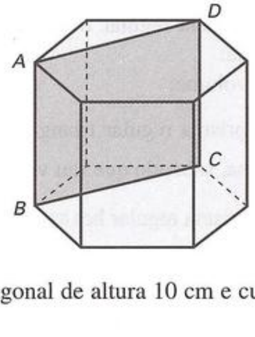
C.8 A circunferência circunscrita a uma das bases de um prisma regular triangular tem raio de medida 2 cm. Sabendo que cada aresta lateral tem a mesma medida de uma aresta da base, calcule o volume desse prisma.

C.9 Em um prisma regular triangular, a altura e uma aresta da base têm medidas iguais. Sabendo que a área da base desse prisma é igual a B, calcule, em função de B:

a) a medida de uma aresta da base;
b) a área lateral do prisma;
c) a área total do prisma;
d) o volume do prisma.

C.10 A altura e uma aresta da base de um prisma regular triangular têm medidas respectivamente iguais à altura e a uma aresta da base de um prisma regular hexagonal. Qual é a razão do volume menor para o maior?

C.11 Definição: **secção diagonal de um prisma** é a intersecção do prisma com um plano que contém duas arestas laterais que não estão contidas em uma mesma face. Exemplo: a região poligonal $ABCD$ contém as arestas laterais AB e CD, que não estão numa mesma face. Logo, $ABCD$ é uma secção diagonal do prisma.



Calcule a área da maior secção diagonal de um prisma regular hexagonal de altura 10 cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm.

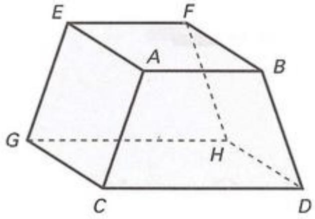
C.12 Calcule a área da menor secção diagonal de um prisma regular hexagonal de altura 8 m e aresta da base $\sqrt{3}$ cm.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Na figura:

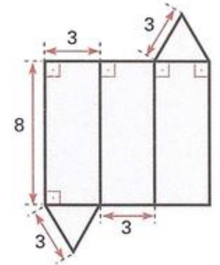
a) *ABCD* e *EFGH* são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;
b) os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;
c) as retas *AE*, *BF*, *DH* e *CG* são paralelas.

Calcule o volume do sólido.



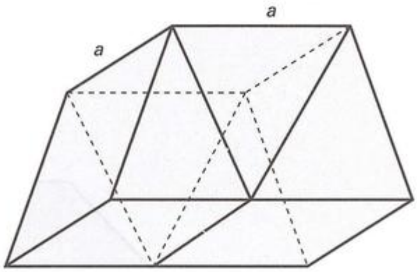
V.2 (Fatec-SP) Temos na figura a planificação de um sólido cujo volume é:

a) $6\sqrt{3}$
b) $12\sqrt{3}$
c) 24
d) $18\sqrt{3}$
e) 72

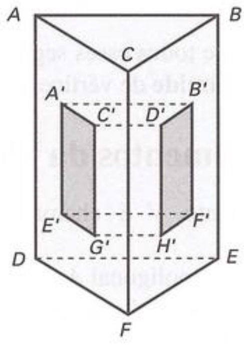


V.3 (UFMG) Dois prismas oblíquos, de mesma altura *h*, têm um quadrado de lado *a* como base superior comum, e suas bases inferiores têm apenas uma aresta em comum. O volume do sólido formado pela intersecção dos dois prismas é:

a) $\frac{1}{3}a^2h$
b) $\frac{1}{2}a^2h$
c) a^2h
d) $\frac{1}{3}h^2a$
e) $\frac{1}{2}h^2a$



V.4 (Vunesp) *ABCDEF* é um prisma reto de base triangular. Dois planos paralelos às bases dividem a aresta *AD* em três segmentos iguais. Dois planos paralelos à face *ABED* dividem a aresta *AC* em três segmentos iguais. Forma-se assim um prisma *A'B'C'D'E'F'G'H'* contido em *ABCDEF* conforme figura ao lado.



Então a razão do volume de *A'B'C'D'E'F'G'H'* para o volume de *ABCDEF* é:

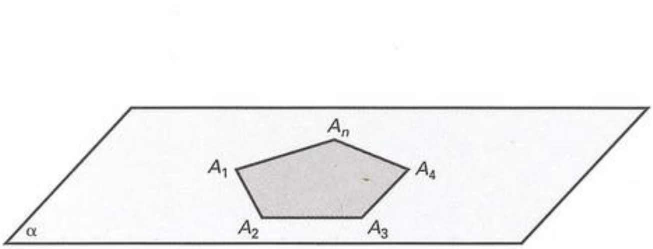
a) $\frac{1}{27}$
b) $\frac{2}{9}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{9}$
e) $\frac{2}{3}$

Capítulo 53

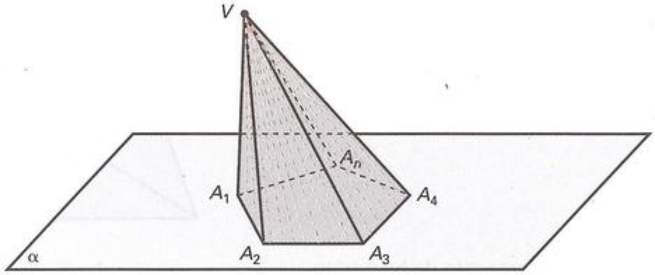
Pirâmides

1. Conceituação

Sejam uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3...A_n$, contida em um plano α, e um ponto V, não-pertencente a α.



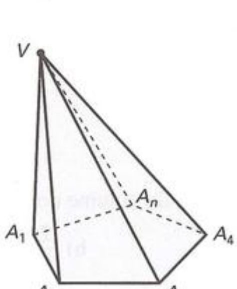
Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo V:



A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de **pirâmide limitada** ou simplesmente "**pirâmide** de vértice V e base $A_1A_2A_3...A_n$". Indicamos essa pirâmide por $VA_1A_2A_3...A_n$.

1.1. Elementos da pirâmide

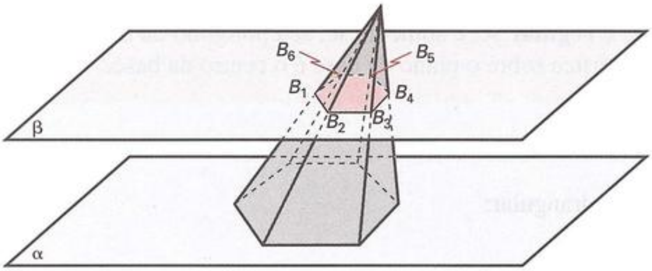
- O ponto V é chamado de "**vértice** da pirâmide".
- A região poligonal $A_1A_2A_3...A_n$ é chamada de "**base** da pirâmide", sendo A_1, A_2, A_3, ..., A_n os "**vértices** da base".
- O polígono $A_1A_2A_3...A_n$ que limita a base é chamado de "**polígono da base** da pirâmide".



- As demais faces, exceto a base, são chamadas de "**faces laterais** da pirâmide". Por exemplo, os triângulos A_1VA_2, A_2VA_3, A_3VA_4, ... são faces laterais.
- Os lados da base são chamados de "**arestas da base** da pirâmide". Por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... são arestas da base.
- As demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de "**arestas laterais** da pirâmide". Por exemplo, $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, ... são arestas laterais.
- A distância entre o vértice V e o plano da base é chamada de "**altura** da pirâmide".
- A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de "**área lateral** da pirâmide".
- A soma da área lateral com a área da base é chamada de "**área total** da pirâmide".

1.2. Secção transversal de uma pirâmide

Secção transversal de uma pirâmide é qualquer intersecção não-vazia e não-unitária da pirâmide com um plano paralelo à sua base.



Sendo $\alpha \parallel \beta$, a região poligonal $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ é uma secção transversal da pirâmide.

Propriedade

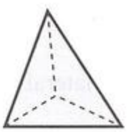
Toda secção transversal da pirâmide é uma região poligonal semelhante à base.

1.3. Nomenclatura

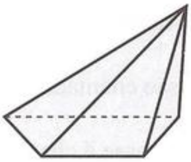
Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base.

Exemplos

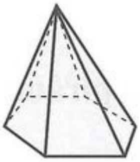
a) **Pirâmide triangular** é toda pirâmide cujo polígono da base é um triângulo.



b) **Pirâmide quadrangular** é toda pirâmide cujo polígono da base é um quadrilátero.



c) **Pirâmide hexagonal** é toda pirâmide cujo polígono da base é um hexágono.

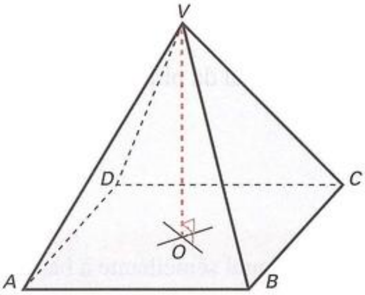


1.4. Pirâmide regular

Uma pirâmide é **regular** se, e somente se, seu polígono da base é regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro da base.

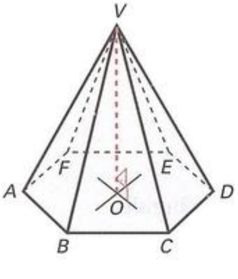
Exemplos

a) Pirâmide regular quadrangular:



O ponto *O* é o centro do quadrado *ABCD*.

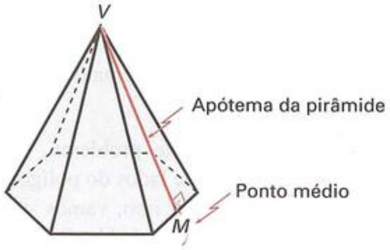
b) Pirâmide regular hexagonal:



O ponto *O* é o centro do hexágono regular *ABCDEF*.

Note que em toda pirâmide regular as arestas laterais são congruentes entre si e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

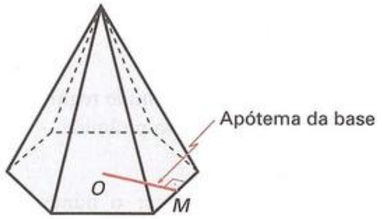
Apótema de uma pirâmide regular



Chama-se "**apótema** de uma pirâmide regular" todo segmento de reta cujos extremos são o vértice da pirâmide e o ponto médio de um dos lados da base.

Note que o apótema da pirâmide regular é a altura de um triângulo isósceles que é face lateral da pirâmide.

Apótema da base de uma pirâmide regular

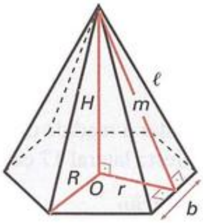


O apótema do polígono da base da pirâmide regular é chamado de "**apótema da base** da pirâmide".

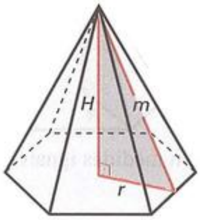
O teorema de Pitágoras e a pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, sejam:

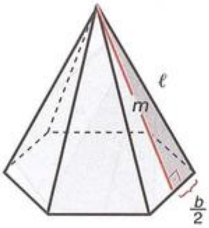
- H a medida da altura;
- m a medida do apótema da pirâmide;
- r a medida do apótema da base;
- b a medida de uma aresta da base;
- ℓ a medida de uma aresta lateral;
- R o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.



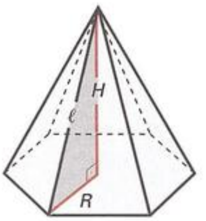
Pelo teorema de Pitágoras, temos:



$$H^2 + r^2 = m^2$$



$$m^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \ell^2$$



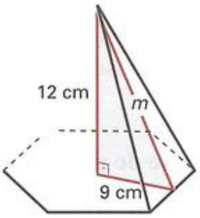
$$H^2 + R^2 = \ell^2$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a medida do apótema de uma pirâmide regular de altura 12 cm cujo apótema da base mede 9 cm.

Resolução

Para a resolução deste problema, não é preciso conhecer o número de lados do polígono regular da base da pirâmide. Por isso, vamos supor que esse polígono regular tenha n lados. Sendo m a medida do apótema da pirâmide regular, temos, pelo teorema de Pitágoras: $m^2 = 12^2 + 9^2 \therefore m = 15$ cm.

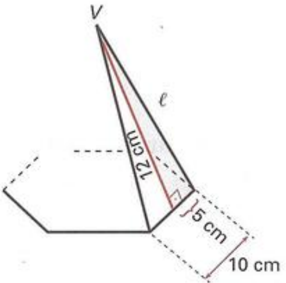


R.2 O apótema de uma pirâmide regular mede 12 cm e uma aresta da base mede 10 cm. Calcular a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide.

Resolução

Não é preciso conhecer o número de lados do polígono regular da base dessa pirâmide. Vamos supor que esse polígono regular tenha n lados.
Sendo ℓ a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide regular, temos, pelo teorema de Pitágoras:

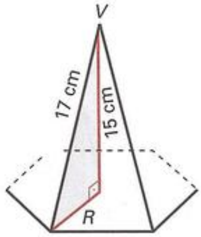
$$\ell^2 = 12^2 + 5^2 \therefore \ell = 13 \text{ cm}.$$



R.3 Calcular a medida do raio da circunferência circunscrita à base de uma pirâmide regular de altura 15 cm e de aresta lateral 17 cm.

Resolução

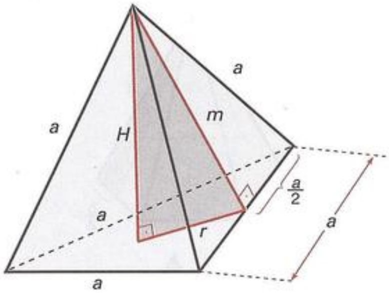
Sendo R a medida do raio da circunferência circunscrita à base dessa pirâmide regular, temos, pelo teorema de Pitágoras: $R^2 + 15^2 = 17^2 \therefore R = 8$ cm.



R.4 Calcular a medida H da altura de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a a.

Resolução

Um **tetraedro regular** é uma pirâmide regular triangular cujas arestas são congruentes entre si; logo, as quatro faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros.



Pelo teorema de Pitágoras, temos: $m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ **(I)**

e $H^2 + r^2 = m^2$. **(II)**

De (I), temos: $m^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \therefore m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

O apótema r da base mede $\frac{1}{3}$ da altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de um triângulo equilátero de lado a, ou seja:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

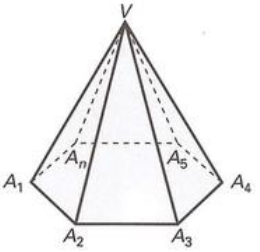
Substituindo $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ em (II), temos:

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$\therefore\ H^2 = \frac{27a^2}{36} - \frac{3a^2}{36}\ \therefore\ H^2 = \frac{24a^2}{36}\ \therefore\ H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Área lateral e área total de uma pirâmide regular

Se o polígono da base de uma pirâmide regular possui n lados, então a pirâmide possui como faces laterais n triângulos isósceles congruentes entre si.



Sendo A_f a área de uma face lateral e B a área da base dessa pirâmide, temos que sua área lateral A_ℓ e sua área total A_t são dadas por:

$$A_\ell = nA_f \quad \text{e} \quad A_t = A_\ell + B.$$

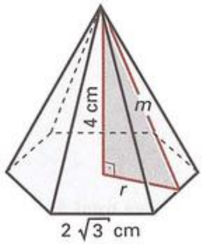
Exercícios resolvidos

R.5 Calcular a área lateral (A_ℓ) de uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 4 cm e uma aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm.

Resolução

Sendo m a medida do apótema da pirâmide e r a medida do apótema da base, temos, pelo teorema de Pitágoras:

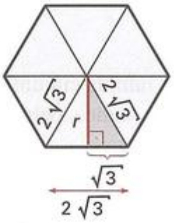
$$4^2 + r^2 = m^2. \quad \textbf{(I)}$$



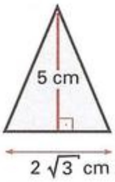
O apótema da base (r) é a altura de um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow r^2 + 3 = 12\ \therefore\ r = 3 \text{ cm}.$$



Substituindo $r = 3$ em (I), obtemos: $4^2 + 3^2 = m^2 \therefore m = 5$ cm.
Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base $2\sqrt{3}$ cm e altura 5 cm.
Sendo A_f a área de uma face lateral, temos:



$$A_f = \frac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_f = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

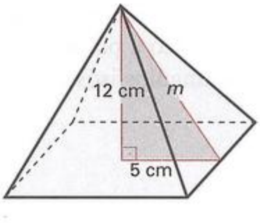
A área lateral A_ℓ é igual a seis vezes a área de uma face lateral A_f, ou seja:

$$A_\ell = 6 \cdot 5\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

R.6 Calcular a área total de uma pirâmide regular quadrangular cuja altura mede 12 cm e o apótema da base mede 5 cm.

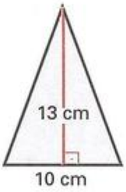
Resolução
Sendo m a medida do apótema da pirâmide, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$12^2 + 5^2 = m^2 \therefore m = 13 \text{ cm}.$$



O apótema da base mede metade da medida b de uma aresta da base. Logo, $b = 10$ cm.
Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base 10 cm e altura $m = 13$ cm.
Sendo A_f a área de uma face lateral, temos:

$$A_f = \frac{10 \cdot 13}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_f = 65 \text{ cm}^2.$$

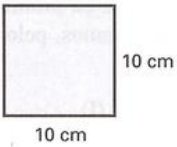


A área lateral A_ℓ é igual a quatro vezes a área de uma face lateral A_f, ou seja:

$$A_\ell = 4 \cdot 65 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 260 \text{ cm}^2.$$

A área B da base da pirâmide é a área de um quadrado de lado 10 cm:

$$B = 100 \text{ cm}^2.$$

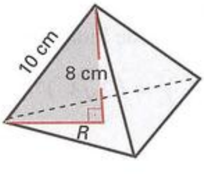


Portanto, a área total A_t da pirâmide é: $A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 260 \text{ cm}^2 + 100 \text{ cm}^2 \therefore A_t = 360 \text{ cm}^2$.

R.7 Calcular a área da base de uma pirâmide regular triangular cuja altura mede 8 cm e uma aresta lateral mede 10 cm.

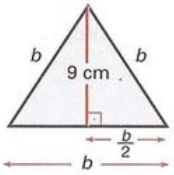
Resolução
Sendo R o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$8^2 + R^2 = 10^2 \therefore R = 6 \text{ cm}.$$

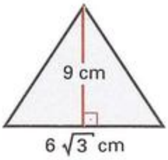


O raio R da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero mede $\frac{2}{3}$ da altura h desse triângulo. Logo, $h = 9$ cm.

Sendo b a medida de uma aresta da base da pirâmide, temos, pelo teorema de Pitágoras:



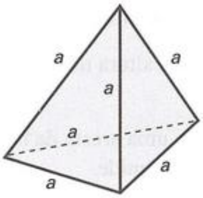
$$b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 9^2 \Rightarrow b^2 - \frac{b^2}{4} = 81 \quad \therefore \quad \frac{3b^2}{4} = 81 \Rightarrow b^2 = 108 \quad \therefore \quad b = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$



Assim, a área B da base da pirâmide é $B = \frac{6\sqrt{3} \cdot 9}{2}$ cm² $\Rightarrow B = 27\sqrt{3}$ cm².

R.8 Calcular a área total de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a a.

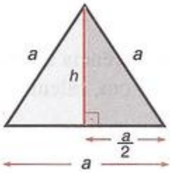
Resolução



Todas as faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros. Sendo h a medida da altura do triângulo equilátero, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore \ h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \therefore \ h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Assim, a área A desse triângulo é $A = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

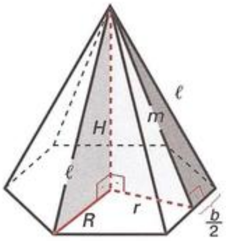
A área total A_t do tetraedro regular é igual a quatro vezes a área A, ou seja:

$$A_t = 4A \Rightarrow A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore \ A_t = a^2\sqrt{3}.$$

2. Resumo dos teoremas

T.58 Se a altura, o apótema da base, a aresta da base, a aresta lateral, o raio da circunferência circunscrita à base e o apótema de uma pirâmide regular medem, respectivamente, H, r, b, ℓ, R e m, então:

$$H^2 + r^2 = m^2;\ m^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \ell^2;\ H^2 + R^2 = \ell^2.$$



T.59 Se a base de uma pirâmide regular é uma região poligonal de n lados com área B, e cada face lateral tem área A_f, então a área lateral A_ℓ e a área total A_t dessa pirâmide são:

$$A_\ell = nA_f;\ A_t = nA_f + B.$$

T.60 A área total A_t de um tetraedro regular cuja aresta mede a é $A_t = a^2\sqrt{3}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.9, B.13, C.1, C.4, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, B.10, B.11, B.12, B.14, C.2, C.3, C.6, C.7, C.8, C.9, C.10, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a medida do apótema de uma pirâmide regular de altura 20 cm cujo apótema da base mede 15 cm.

B.2 O apótema de uma pirâmide regular e a altura medem, respectivamente, 13 m e 12 m. Calcule a medida do apótema da base dessa pirâmide.

B.3 O apótema de uma pirâmide regular e uma aresta da base medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm. Calcule a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide.

B.4 Calcule a medida de uma aresta da base de uma pirâmide regular, sabendo que uma aresta lateral mede 13 cm e que o apótema da pirâmide mede 12 cm.

B.5 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita à base de uma pirâmide regular de altura 12 cm e com aresta lateral de 15 cm.

B.6 O raio da circunferência circunscrita à base de uma pirâmide regular mede 2 cm. Sabendo que a altura da pirâmide mede 4 cm, calcule a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide.

B.7 Calcule a medida da altura de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a 3 cm.

B.8 A altura de um tetraedro regular mede $2\sqrt{6}$ cm. Calcule:
a) o apótema do tetraedro;
b) o apótema da base.

B.9 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 6 cm e uma aresta da base mede $3\sqrt{3}$ cm.

B.10 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular quadrangular em que a altura mede 8 cm e o apótema da base mede 6 cm.

B.11 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular triangular de altura $\sqrt{6}$ cm e aresta da base 6 cm.

B.12 A altura e o apótema de uma pirâmide regular hexagonal medem, respectivamente, 4 cm e 5 cm. Calcule a área total dessa pirâmide.

B.13 Calcule a área total de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a 2 cm.

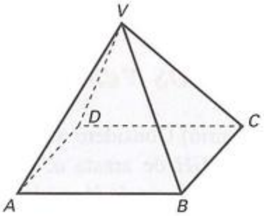
B.14 A área total de um tetraedro regular é $25\sqrt{3}$ cm². Calcule a medida de uma aresta desse tetraedro.

Exercícios complementares

C.1 Em uma pirâmide regular a altura mede $5\sqrt{3}$ dm e o apótema da base mede 15 dm. Calcule a medida do ângulo que uma face lateral forma com a base.

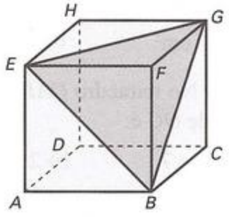
C.2 O apótema de uma pirâmide regular hexagonal mede 12 cm e uma aresta de sua base mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do ângulo que uma face lateral forma com a base.

C.3 A figura mostra uma pirâmide regular quadrangular de altura 9 cm e apótema da base $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do ângulo formado pelas faces *VAD* e *VBC*.

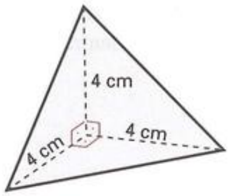


C.4 As áreas totais de um cubo e de uma pirâmide regular quadrangular são iguais. As medidas da aresta do cubo e de uma aresta da base da pirâmide são, respectivamente, $\sqrt{26}$ m e 6 m. Calcule a medida da altura da pirâmide.

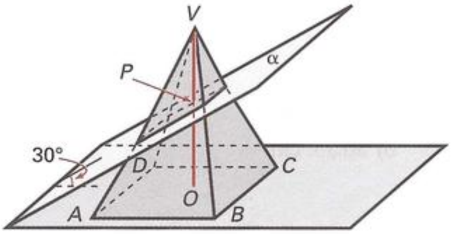
C.5 A figura representa um cubo de aresta 4 cm. Retirando-se desse cubo a pirâmide *FBGE*, qual é a área total do poliedro remanescente?



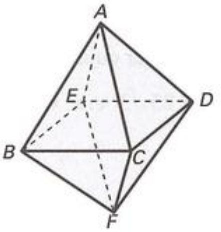
C.6 Chama-se "tetraedro trirretângulo" toda pirâmide triangular que possui um ângulo triédrico trirretângulo. Calcule a área total de um tetraedro trirretângulo cuja arestas do triedro trirretângulo medem 4 cm.



C.7 Uma pirâmide regular quadrangular *VABCD* de altura $\overline{VO}$ é seccionada por um plano α que forma um ângulo de 30° com o plano de sua base e intercepta $\overline{VO}$ em um ponto *P* tal que $VP = 8$ cm (conforme a figura). Calcule a distância do ponto *V* ao plano α.



C.8 Calcule a área total de um octaedro regular cujas arestas medem 2 cm.



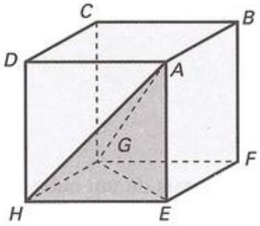
C.9 No octaedro regular do exercício anterior, calcule a distância entre os vértices opostos A e F.

C.10 A medida de uma aresta de um cubo é a. Calcule a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces desse cubo.

C.11 Qual é a medida do ângulo formado por duas arestas de um octaedro regular que têm em comum um vértice e não estão contidas em uma mesma face desse poliedro?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) Considere a pirâmide $AEGH$ no cubo $ABCDEFGH$ de aresta a, como se vê na figura. Então a distância de H ao plano AEG vale:



a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{a}{2}$
b) $\frac{2a}{3}$
d) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

V.2 (UFPA) Uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm e a altura é igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base tem área total igual a:

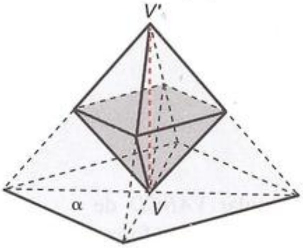
a) $96\sqrt{3}$ cm²
b) 252 cm²
c) 288 cm²
d) $84\sqrt{3}$ cm²
e) 576 cm²

V.3 (Fei-SP) No tetraedro $OABC$, o triedro de vértice O é trirretângulo. Sendo $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{AC} = 7$, a medida de $\overline{OC}$ é:

a) $\sqrt[3]{5 \cdot 6 \cdot 7}$
b) $2\sqrt{5}$
c) 5
d) 6,5
e) Nenhuma das respostas anteriores.

V.4 (Cesesp-PE) Considere um octaedro regular cuja aresta mede 6 cm e um de seus vértices V repousa sobre um plano α perpendicular ao eixo que contém V (ver figura). Prolongando-se as quatro arestas que partem do outro vértice V', que está na perpendicular a α em V, até interceptar o plano α, forma-se uma pirâmide regular de base quadrangular.

Assinale, então, dentre as alternativas a seguir, a única que corresponde à área total dessa pirâmide assim construída:



a) $9\sqrt{3}$ cm²
c) $144(\sqrt{3} + 1)$cm²
e) $108\sqrt{3}$ cm²
b) $36\sqrt{3}$ cm²
d) $144\sqrt{3}$ cm²

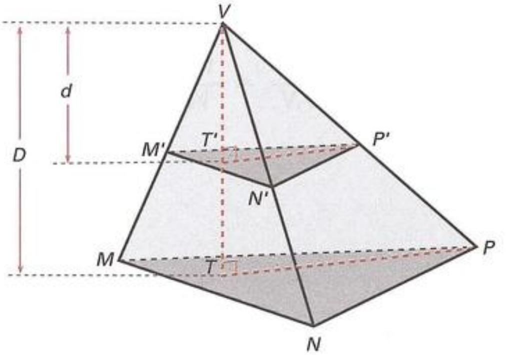
Capítulo 54

Volume de uma pirâmide

1. Razão entre a área de uma secção transversal e a área da base de uma pirâmide triangular

Para calcular o volume de uma pirâmide, devemos conhecer a seguinte propriedade:

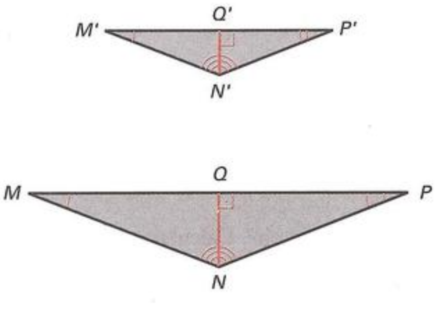
> Se uma pirâmide triangular de altura D possui base com área B, uma secção transversal dessa pirâmide tem área b e o plano que contém essa secção está a uma distância d do vértice, então:
>
> $$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$



Área $(MNP) = B$;
Área $(M'N'P') = b$;
$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Demonstração

- Os triângulos $M'N'P'$ e MNP são semelhantes, pois têm lados respectivamente paralelos e, portanto, seus ângulos internos são respectivamente congruentes. Sendo $\overline{N'Q'}$ e $\overline{NQ}$ as alturas desses triângulos em relação aos lados $\overline{M'P'}$ e $\overline{MP}$ respectivamente, podemos escrever a proporção:

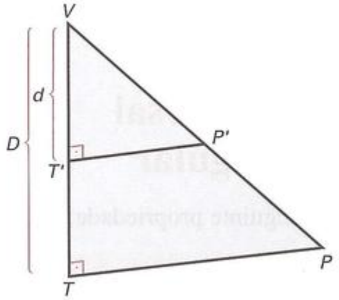


$$\frac{M'P'}{MP} = \frac{M'N'}{MN} = \frac{N'P'}{NP} = \frac{N'Q'}{NQ}. \quad \textbf{(I)}$$

Sendo b e B as áreas dos triângulos $M'N'P'$ e MNP, respectivamente, temos:

$$\frac{b}{B} = \frac{\frac{1}{2}M'P' \cdot N'Q'}{\frac{1}{2}MP \cdot NQ} = \frac{M'P'}{MP} \cdot \frac{N'Q'}{NQ}. \quad \textbf{(II)}$$

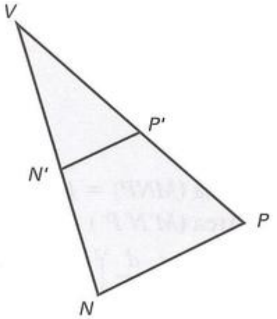
• Os triângulos $VT'P'$ e VTP são semelhantes, pois $V\hat{T}'P' \cong V\hat{T}P$ (retos) e $V\hat{P}'T' \cong V\hat{P}T$ (correspondentes). Assim, temos a proporção:



$$\frac{d}{D} = \frac{VT'}{VT} = \frac{VP'}{VP} = \frac{T'P'}{TP}. \quad \textbf{(III)}$$

• Os triângulos $VN'P'$ e VNP são semelhantes pois $V\hat{N}'P' \cong V\hat{N}P$ (correspondentes) e $V\hat{P}'N' \cong V\hat{P}N$ (correspondentes).

Assim, temos a proporção:



$$\frac{VN'}{VN} = \frac{VP'}{VP} = \frac{N'P'}{NP}. \quad \textbf{(IV)}$$

De (III), (IV) e (I), respectivamente, temos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{D} &= \frac{VP'}{VP} \\ \frac{VP'}{VP} &= \frac{N'P'}{NP} \\ \frac{N'P'}{NP} &= \frac{M'P'}{MP} = \frac{N'Q'}{NQ} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{M'P'}{MP} = \frac{N'Q'}{NQ} = \frac{d}{D}. \quad \textbf{(V)}$$

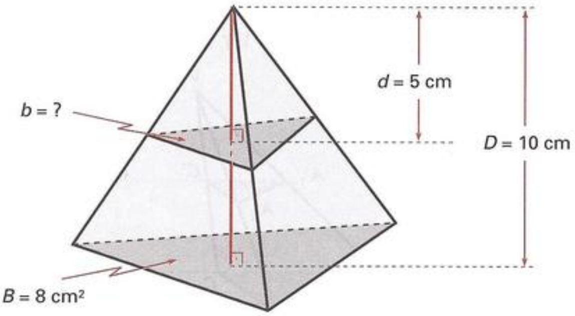
Substituindo (V) em (II), temos: $\frac{b}{B} = \frac{d}{D} \cdot \frac{d}{D} \Rightarrow \frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Uma pirâmide triangular de altura 10 cm tem a área da base igual a 8 cm². Calcular a área de sua secção transversal determinada por um plano que dista 5 cm de seu vértice.

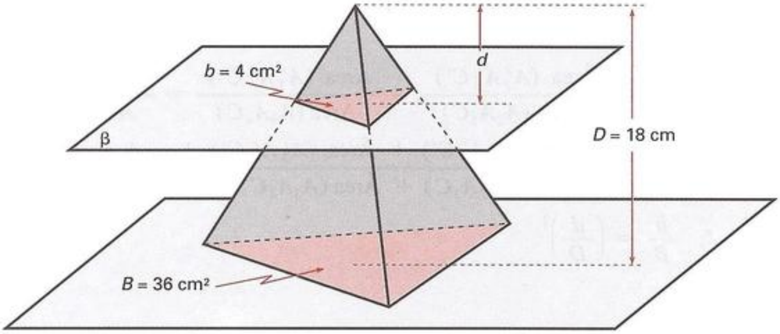
Resolução



Devemos ter: $\dfrac{b}{B} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{b}{8} = \left(\dfrac{5}{10}\right)^2 \therefore b = 2\ \text{cm}^2$.

R.2 Uma pirâmide triangular tem altura 18 cm e área da base 36 cm². Um plano β, paralelo ao plano da base, determina nessa pirâmide uma secção de área 4 cm². Calcular a distância do plano β ao vértice dessa pirâmide.

Resolução



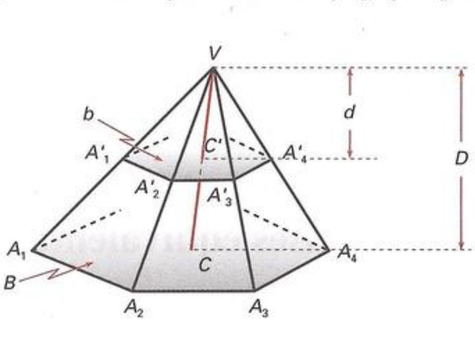
Devemos ter:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{36} = \left(\frac{d}{18}\right)^2 \therefore \frac{1}{9} = \left(\frac{d}{18}\right)^2 \therefore \frac{1}{3} = \frac{d}{18} \therefore d = 6\ \text{cm}.$$

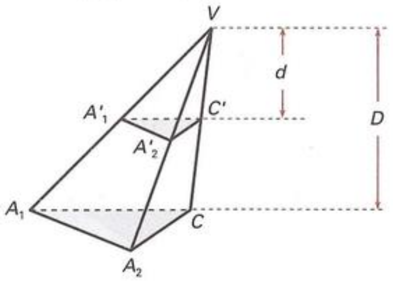
R.3 Prove que, "se uma pirâmide **qualquer** de altura D possui base com área B e uma secção transversal dessa pirâmide tem área b e está a uma distância d do vértice, então $\dfrac{b}{B} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$".

Resolução

Provamos essa propriedade para pirâmides triangulares. Vamos agora generalizar para qualquer pirâmide. Consideremos uma pirâmide de altura D cuja base é uma região poligonal $A_1A_2A_3...A_n$ de n lados e área B. Consideremos, ainda, nessa pirâmide uma secção transversal $A'_1\ A'_2\ A'_3\ ...A'_n$ de área b que fica a uma distância d do vértice V.



Seja o segmento de reta com um extremo V e o outro extremo num ponto C interior ao polígono da base, de modo que $\overline{VC}$ intercepta a secção transversal em C'.
Observemos as pirâmides triangulares VA_1A_2C e $VA'_1A'_2C'$:



Para pirâmides triangulares já provamos que: $\dfrac{\text{Área }(A'_1A'_2C')}{\text{Área }(A_1A_2C)} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$.

Raciocinando de maneira análoga para as pirâmides:

$$(VA_2A_3C,\ VA'_2A'_3C'),\ (VA_3A_4C,\ VA'_3A'_4C'),\ \ldots,\ (VA_{n-1}A_nC,\ VA'_{n-1}A'_nC')$$

teremos:

$$\frac{\text{Área }(A'_1A'_2C')}{\text{Área }(A_1A_2C)} = \frac{\text{Área }(A'_2A'_3C')}{\text{Área }(A_2A_3C)} = \frac{\text{Área }(A'_3A'_4C')}{\text{Área }(A_3A_4C)} = \frac{\text{Área }(A'_{n-1}A'_nC')}{\text{Área }(A_{n-1}A_nC)} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

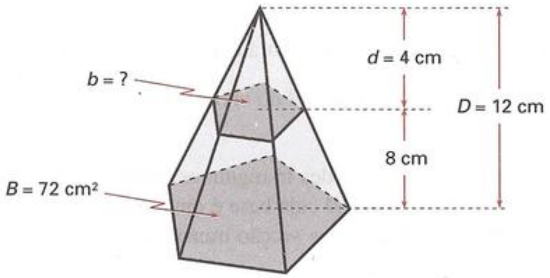
$$\therefore\ \frac{\text{Área }(A'_1A'_2C') + \text{Área }(A'_2A'_3C') + \text{Área }(A'_3A'_4C') + \ldots + \text{Área }(A'_{n-1}A'_nC')}{\text{Área }(A_1A_2C) + \text{Área }(A_2A_3C) + \text{Área }(A_3A_4C) + \ldots + \text{Área }(A_{n-1}A_nC)} =$$

$$= \left(\frac{d}{D}\right)^2\ \therefore\ \frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

(c.q.d.)

R.4 Uma pirâmide tem altura 12 cm e base pentagonal de área 72 cm². Qual é a área da secção transversal determinada por um plano que dista 8 cm de sua base?

Resolução



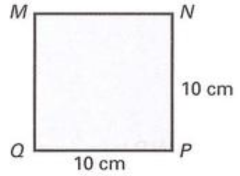
Pelo exercício R.3, devemos ter: $\dfrac{b}{B} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{b}{72} = \left(\dfrac{4}{12}\right)^2\ \therefore\ \dfrac{b}{72} = \dfrac{1}{9}\ \therefore\ b = 8\text{ cm}^2.$

2. Relação entre volumes de pirâmides de mesma altura e bases equivalentes

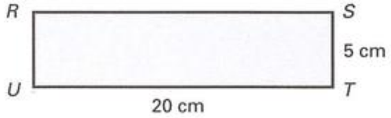
Duas regiões poligonais são equivalentes se, e somente se, têm áreas iguais.

Exemplo

O quadrado $MNPQ$ e o retângulo $RSTU$ limitam regiões poligonais equivalentes:



Área ($MNPQ$) = 100 cm^2



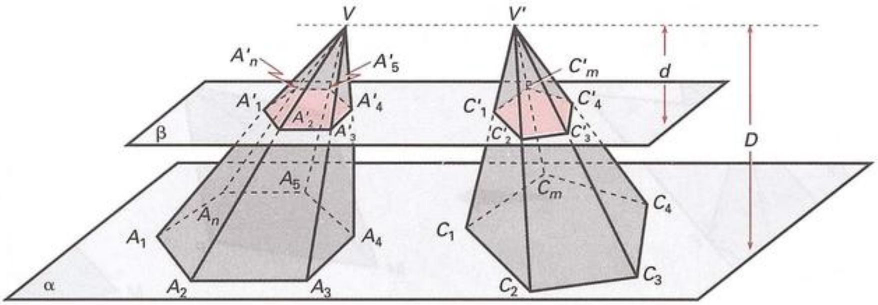
Área ($RSTU$) = 100 cm^2

Teorema

Duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.

Demonstração

Consideremos duas pirâmides $VA_1A_2A_3...A_n$ e $V'C_1C_2C_3...C_m$ de mesma altura D, de bases equivalentes e contidas num mesmo plano α. Suponhamos ainda que essas pirâmides estejam contidas no mesmo semi-espaço de origem α.



Todo plano paralelo a α que secciona uma das pirâmides também secciona a outra. Seja β um plano paralelo a α que passa a uma distância d do vértice V (ou V') e determina nessas pirâmides as secções transversais $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ e $C'_1C'_2C'_3...C'_m$.

Sejam:

$$\text{Área } (A_1A_2A_3...A_n) = B_A;\ \text{Área } (A'_1A'_2A'_3...A'_n) = b_A;$$
$$\text{Área } (C_1C_2C_3...C_m) = B_C;\ \text{Área } (C'_1C'_2C'_3...C'_m) = b_C.$$

Provamos, no capítulo anterior, que: $\dfrac{b_A}{B_A} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$ e $\dfrac{b_C}{B_C} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$.

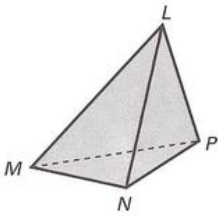
Logo, $\dfrac{b_A}{B_A} = \dfrac{b_C}{B_C}$. Como as pirâmides têm bases equivalentes, isto é, $B_A = B_C$, temos que: $b_A = b_C$.

Assim sendo, qualquer plano β, $\beta \parallel \alpha$, que intercepta uma das pirâmides, também intercepta a outra, determinando nelas secções de mesma área. Pelo **princípio de Cavalieri**, temos que essas pirâmides têm volumes iguais.

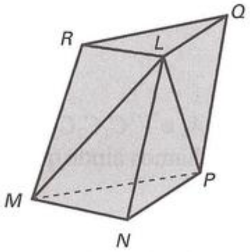
(c.q.d.)

3. Volume de uma pirâmide triangular

Consideremos uma pirâmide triangular *LMNP* de altura *H* cuja base *MNP* tem área *B*:

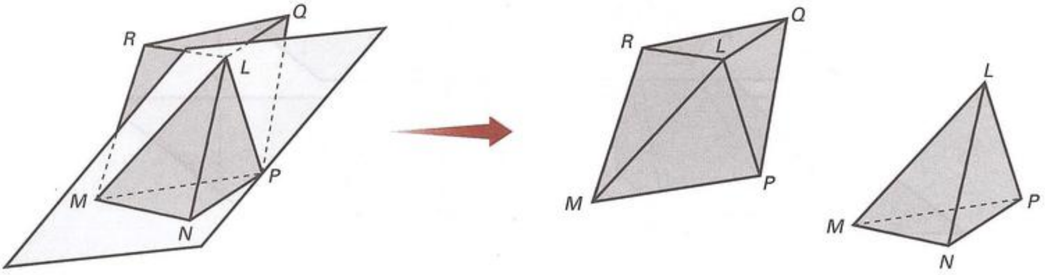


Seja o prisma triangular *MNPLQR*:

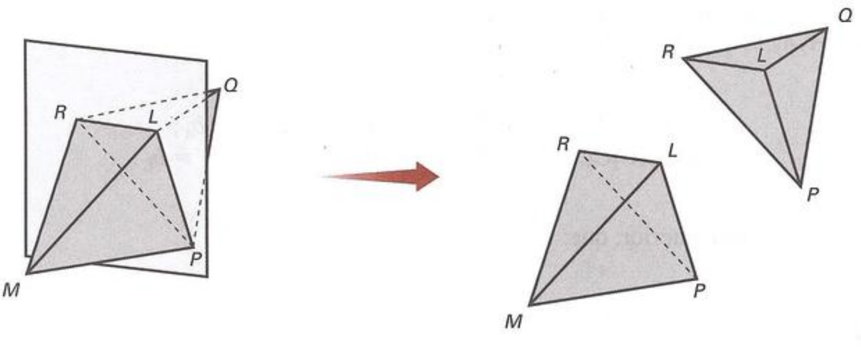


Vamos provar que o volume desse prisma é o triplo do volume da pirâmide *LMNP*.

De fato, separando desse prisma a pirâmide *LMNP*, temos:



Separemos o poliedro *MPLQR* em duas pirâmides:



I. As pirâmides *LMNP* e *PLQR* têm volumes iguais, pois:

- $\triangle MNP \cong \triangle RLQ$ (bases do prisma *MNPLQR*);
- a altura do prisma *MNPLQR* é também altura de cada uma dessas pirâmides em relação às bases *MNP* e *RLQ*.

Assim, as pirâmides *LMNP* e *PLQR* têm a mesma altura em relação às bases equivalentes *MNP* e *LQR* e, portanto, têm volumes iguais.

II. As pirâmides *LRQP* e *LRMP* têm volumes iguais, pois:

- $\overline{RP}$ é diagonal do paralelogramo *MRQP* e, portanto, $\triangle RPQ \cong \triangle RPM$.
- suas alturas relativas às bases *RPQ* e *RPM* são iguais à distância do ponto *L* ao plano do paralelogramo *MRQP*.

Assim, as pirâmides *LRQP* e *LRMP* têm a mesma altura em relação às bases equivalentes *RPQ* e *RPM* e, portanto, têm volumes iguais.

Por (I) e (II) temos que as pirâmides *LMNP*, *PLQR* e *LRMP* têm o mesmo volume *V*.

Provamos, desse modo, que o prisma triangular *MNPLQR* é composto por três pirâmides de volumes iguais. Sendo *H* a altura do prisma e *B* a área de sua base, concluímos que o volume *V* de cada uma dessas pirâmides é dado por:

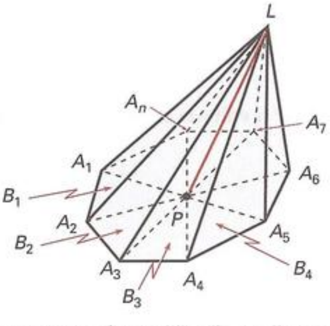
$$V = \frac{1}{3}\,BH.$$

Portanto temos:

O volume de uma **pirâmide triangular** é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

4. Volume de uma pirâmide qualquer

Consideremos uma pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ de altura *H* e área da base *B*. Seja *P* um ponto interior à base $A_1A_2A_3...A_n$. Essa pirâmide é composta pelas *n* pirâmides triangulares, LA_1A_2P, LA_2A_3P, LA_3A_4P, ..., LA_nA_1P, cujas áreas das bases são B_1, B_2, B_3, ..., B_n, respectivamente.



Note que todas as pirâmides LA_1A_2P, LA_2A_3P, ..., LA_nA_1P têm a mesma altura *H* e $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n = B$. Sendo V_1, V_2, V_3, ..., V_n os volumes dessas pirâmides triangulares, respectivamente, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3}\,B_1H;\; V_2 = \frac{1}{3}\,B_2H;\; V_3 = \frac{1}{3}\,B_3H; ...\; V_n = \frac{1}{3}\,B_nH.$$

Assim, temos:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = \frac{1}{3}\,B_1H + \frac{1}{3}\,B_2H + \frac{1}{3}\,B_3H + ... + \frac{1}{3}\,B_nH = \frac{1}{3}\,H(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{1}{3}\,HB.$$

A soma $V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ é igual ao volume V da pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$, ou seja:

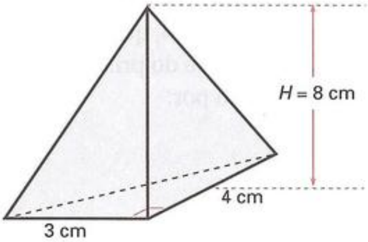
$$V = \frac{1}{3}\ BH.$$

Portanto temos:

O volume de uma **pirâmide qualquer** é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

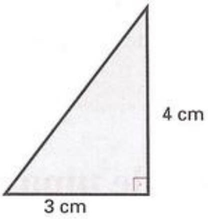
Exercícios resolvidos

R.5 Uma pirâmide de altura 8 cm tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm. Calcular o volume dessa pirâmide.



Resolução

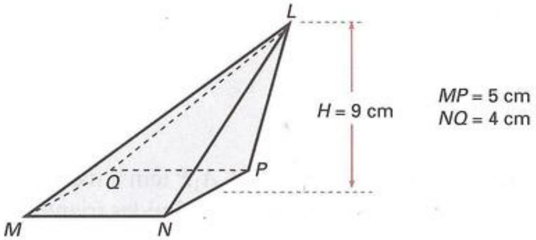
A área B da base da pirâmide é:



$$B = \frac{3 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 6\ \text{cm}^2.$$

Assim, o seu volume V é: $V = \frac{1}{3}\ BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8\ \text{cm}^3\ \therefore\ V = 16\ \text{cm}^3.$

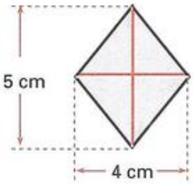
R.6 Calcular o volume de uma pirâmide de altura 9 cm cujo polígono da base é um losango de diagonais 4 cm e 5 cm.



Resolução

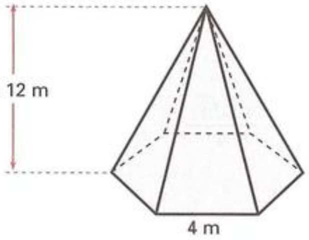
A área B da base da pirâmide é:

$$B = \frac{5 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 10\ \text{cm}^2.$$



Assim, o seu volume V é: $V = \frac{1}{3}\ BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 9\ \text{cm}^3\ \therefore\ V = 30\ \text{cm}^3.$

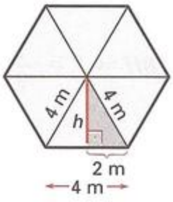
R.7 Calcular o volume de uma pirâmide regular hexagonal de altura 12 m e aresta da base 4 m.



Resolução

A área B da base da pirâmide é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 4 m.

Sendo h a altura do triângulo equilátero, temos, pelo teorema de Pitágoras:



$$h^2 + 2^2 = 4^2 \ \therefore\ h = 2\sqrt{3}\ \text{m}.$$

A área A do triângulo equilátero é: $A = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ m^2 \ \therefore\ A = 4\sqrt{3}\ \text{m}^2$.

Logo, a área B do hexágono é: $B = 6A \Rightarrow B = 6 \cdot 4\sqrt{3}\ m^2 \ \therefore\ B = 24\sqrt{3}\ \text{m}^2$.

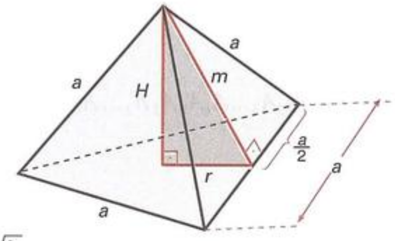
Assim, o volume V da pirâmide é: $V = \dfrac{1}{3}\ BH \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 12\ \text{m}^3 \ \therefore\ V = 96\sqrt{3}\ \text{m}^3$.

R.8 Calcular o volume V de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a a.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \ \textbf{(I)}\ \text{e}$$
$$H^2 + r^2 = m^2.\ \textbf{(II)}$$



De (I), temos: $m^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow m^2 = \dfrac{3a^2}{4} \ \therefore\ m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

O apótema r, da base, mede $\dfrac{1}{3}$ da altura $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ de um triângulo equilátero de lado a, ou seja:

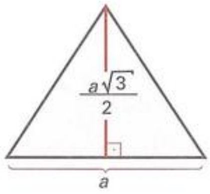
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Substituindo $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ em (II), temos:

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$
$$\therefore H^2 = \frac{27a^2}{36} - \frac{3a^2}{36} \Rightarrow H^2 = \frac{24a^2}{36} \ \therefore\ H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} \ \therefore\ H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

A área B da base do tetraedro é a área de um triângulo equilátero de lado a:

$$B = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

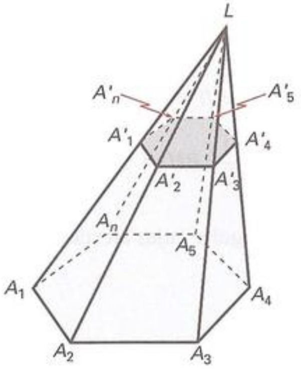


Assim, o volume V do tetraedro regular é:

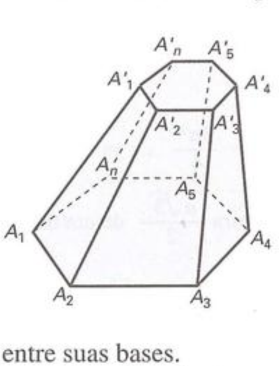
$$V = \frac{1}{3}\,BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \therefore \quad V = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} \quad \therefore \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

5. Tronco de pirâmide de bases paralelas

Consideremos uma pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ e uma de suas secções transversais $A'_1A'_2A'_3...A'_n$:



O poliedro $A_1A_2A_3...A_nA'_1A'_2A'_3...A'_n$ é chamado de "**tronco de pirâmide** de bases paralelas $A_1A_2A_3...A_n$ e $A'_1A'_2A'_3...A'_n$".

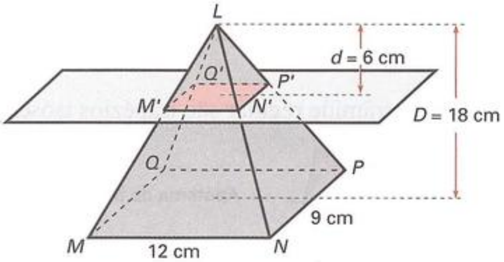


- A altura H do tronco é a distância entre suas bases.
- As demais faces, exceto as bases, são as faces laterais do tronco. Por exemplo, $A_1A_2A'_2A'_1$ é uma face lateral.
- A área lateral A_ℓ do tronco é a soma das áreas de todas as faces laterais.
- Sendo B e b as áreas das bases maior e menor do tronco, respectivamente, a área total A_t do tronco é $A_t = A_\ell + B + b$.
- O volume V do tronco é a diferença entre os volumes das pirâmides $LA_1A_2A_3...A_n$ e $LA'_1A'_2A'_3...A'_n$, nessa ordem.

Exercício resolvido

R.9 Uma pirâmide de altura 18 cm tem como polígono da base um retângulo de lados 12 cm e 9 cm. Um plano paralelo à base dessa pirâmide e distante 6 cm de seu vértice separa-a em dois sólidos. Calcular o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

Resolução



Sejam B e b as áreas da base $MNPQ$ e da secção $M'N'P'Q'$, respectivamente. Temos que:

$$B = 12 \cdot 9 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 108 \text{ cm}^2.$$

Temos, ainda: $\dfrac{b}{B} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$.

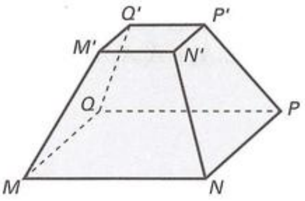
Logo, $\dfrac{b}{108} = \left(\dfrac{6}{18}\right)^2 \therefore b = 12 \text{ cm}^2$.

Sendo V o volume da pirâmide $LMNPQ$ e V' o volume da pirâmide $LM'N'P'Q'$, temos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 18 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 648 \text{ cm}^3; \; V' = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 \text{ cm}^3 \Rightarrow V' = 24 \text{ cm}^3.$$

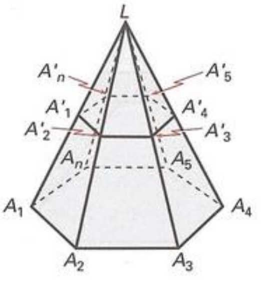
O volume V_T do tronco é:

$$V_T = V - V' \Rightarrow V_T = 648 \text{ cm}^3 - 24 \text{ cm}^3 \quad \therefore V_T = 624 \text{ cm}^3.$$

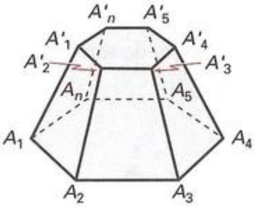


5.1. Tronco de pirâmide regular de bases paralelas

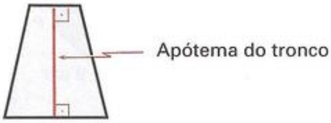
Consideremos uma **pirâmide regular** $LA_1A_2A_3...A_n$ e uma de suas secções transversais, $A'_1A'_2A'_3...A'_n$.



O poliedro $A_1A_2A_3 \ldots A_nA'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ é chamado de "**tronco de pirâmide regular** de bases paralelas".



- As faces laterais do tronco de pirâmide regular são trapézios isósceles equivalentes (mesma área).



- O segmento de reta cujos extremos são os pontos médios das bases de cada um desses trapézios é chamado de "**apótema** do tronco de pirâmide regular".
- Se cada uma das n faces laterais do tronco de pirâmide regular tem área A_f então a área lateral A_ℓ do tronco é:

$$A_\ell = nA_f.$$

- Se B e b são as áreas da base maior e da menor, respectivamente, então a área total A_t do tronco é:

$$A_t = A_\ell + B + b.$$

- O volume do tronco é a diferença entre os volumes das pirâmides $LA_1A_2A_3 \ldots A_n$ e $LA'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$.
- Os apótemas dos polígonos $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ são chamados de "**apótemas das bases** do tronco de pirâmide regular".

Exercício resolvido

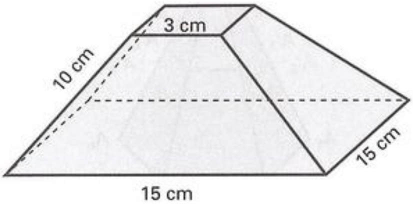
R.10 Um tronco de pirâmide regular de bases paralelas e quadradas tem arestas laterais com 10 cm, arestas da base maior com 15 cm e arestas da base menor com 3 cm. Calcular:

a) a área lateral do tronco;

b) a área total do tronco;

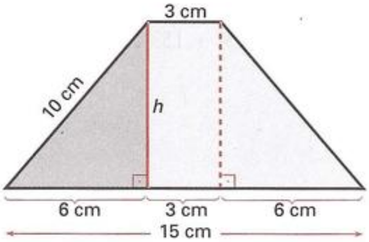
c) o volume do tronco.

Resolução



a) Cada face lateral desse tronco é um trapézio isósceles de lados 10 cm, 10 cm, 15 cm e 3 cm. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 64 \therefore h = 8$ cm.



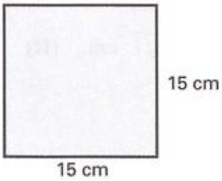
Face lateral

A área A_f de cada face lateral do tronco é: $A_f = \frac{(15 + 3)\,8}{2}$ cm² = 72 cm².

Assim, a área lateral A_ℓ do tronco é: $A_\ell = 4A_f \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 72$ cm² $\therefore A_\ell = 288$ cm².

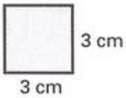
b) As áreas B e b das bases do tronco são:

$B = 15^2$ cm² $\Rightarrow B = 225$ cm²



e

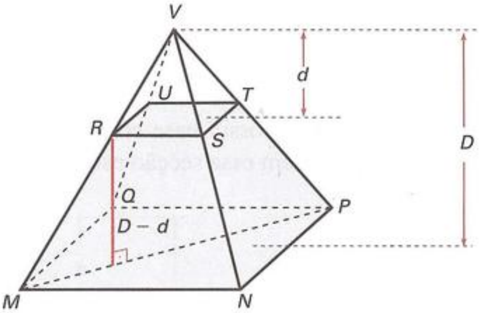
$b = 3^2$ cm² $\Rightarrow b = 9$ cm².



Assim, a área total A_t do tronco é:

$$A_t = A_\ell + B + b \Rightarrow A_t = 288 \text{ cm}^2 + 225 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2 \quad \therefore A_t = 522 \text{ cm}^2.$$

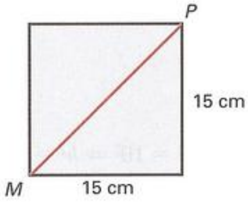
c) Para calcular o volume do tronco, vamos prolongar as arestas laterais, construindo assim uma pirâmide regular:



Sejam b, B, d e D, respectivamente, a área da base menor do tronco, a área da base maior do tronco, a altura da pirâmide $VRSTU$ e a altura da pirâmide $VMNPQ$. Desse modo, temos:

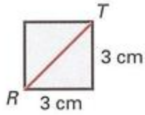
$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{225} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \therefore \frac{d}{D} = \frac{3}{15} \therefore \frac{d}{D} = \frac{1}{5} \therefore D = 5d. \quad \text{(I)}$$

Os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{RT}$ são as diagonais da base maior e da menor do tronco, respectivamente:



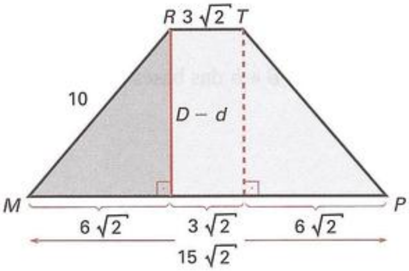
$(MP)^2 = 15^2 + 15^2 \therefore MP = 15\sqrt{2}$ cm

e



$(RT)^2 = 3^2 + 3^2 \therefore RT = 3\sqrt{2}$ cm.

O quadrilátero *RTPM* é um trapézio isósceles:



$$(D-d)^2 + (6\sqrt{2})^2 = 10^2$$
$$\therefore (D-d)^2 = 28$$
$$\therefore D-d = 2\sqrt{7} \text{ cm.} \quad \textbf{(II)}$$

Temos, assim, o sistema: $\begin{cases} D = 5d & \textbf{(I)} \\ D - d = 2\sqrt{7}. & \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II) obtemos: $5d - d = 2\sqrt{7} \Rightarrow 4d = 2\sqrt{7} \therefore d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ cm. **(III)**

Substituindo (III) em (I) obtemos: $D = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ cm.

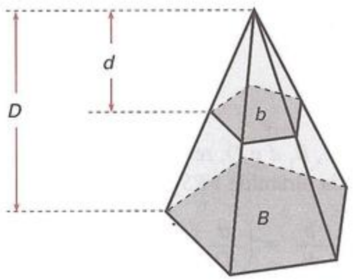
Assim, o volume *V* do tronco é:

$$V = \frac{1}{3}\,BD - \frac{1}{3}\,bd \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 225 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{3}\cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \therefore \boxed{V = 186\sqrt{7}\ \text{cm}^3.}$$

6. Resumo dos teoremas

T.61 Se uma pirâmide **qualquer** de altura *D* possui base com área *B*, uma secção transversal dessa pirâmide tem área *b* e o plano que contém essa secção está a uma distância *d* do vértice, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

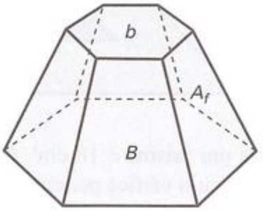


T.62 Duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.

T.63 O volume de uma pirâmide **qualquer** é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

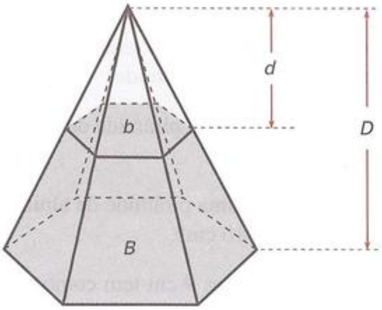
T.64 Se um tronco de pirâmide regular tem bases paralelas com áreas b e B e cada uma das n faces laterais tem área A_f, então a área lateral A_ℓ e a área total A_t desse tronco são:

$$A_\ell = nA_f;$$
$$A_t = nA_f + B + b.$$



T.65 Se uma pirâmide de altura D tem área da base B, e o plano que contém sua secção transversal de área b está a uma distância d do vértice, então o volume V_T do tronco da pirâmide limitado por sua base e por essa secção é:

$$VT = \frac{1}{3}\ (BD - bd).$$



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, B.6, B.7, B.9, B.12, B.15, B.18, B.19, C.1, C.3, C.4, C.6.

Tarefa de casa: exercícios B.3, B.8, B.10, B.11, B.13, B.14, B.16, B.17, B.20, C.2, C.5, C.7, C.8, C.9, C.10.

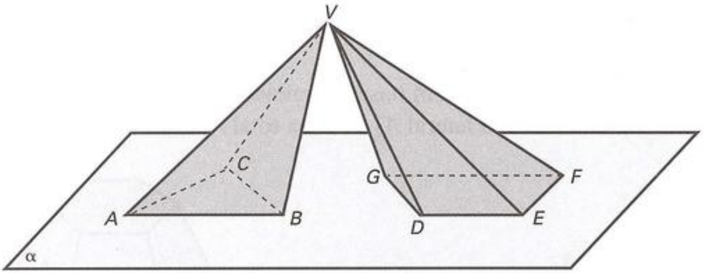
Exercícios básicos

B.1 Uma pirâmide triangular de altura 18 cm tem área da base igual a 54 cm². Calcule a área de sua secção transversal que dista 6 cm de seu vértice.

B.2 A altura e a área da base de uma pirâmide triangular medem 24 dm e 128 dm², respectivamente. Um plano β, paralelo ao plano da base, determina nessa pirâmide uma secção de 18 dm². Calcule a distância do plano β ao vértice da pirâmide.

B.3 Uma pirâmide de altura 15 cm tem área da base igual a 75 cm². Um plano β, paralelo ao plano da base, determina nessa pirâmide uma secção de área 27 cm². Calcule a distância do plano β à base da pirâmide.

B.4 Considere um triângulo ABC e um quadrilátero $DEFG$ equivalentes contidos em um mesmo plano α. Sendo V um ponto que não pertence a α, qual é a relação entre os volumes das pirâmides $VABC$ e $VDEFG$? Por quê?



B.5 O volume de um prisma é 18 cm³. Qual é o volume de uma pirâmide cuja base coincide com uma base desse prisma e cujo vértice pertence à outra base do prisma?

B.6 Um prisma tem altura 12 cm. Uma pirâmide cuja base coincide com uma base desse prisma e cujo vértice é um ponto interior ao prisma tem volume igual a $\frac{1}{6}$ do volume do prisma. Calcule a altura dessa pirâmide.

B.7 Uma pirâmide de altura 10 cm tem como polígono da base um retângulo de lados 5 cm e 4 cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.8 Uma pirâmide de altura 8 dm tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 2 dm e 4 dm. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.9 Calcule o volume de uma pirâmide de altura 6 cm cujo polígono da base é um triângulo isósceles de lados 13 cm, 13 cm e 10 cm.

B.10 Qual é o volume de uma pirâmide de altura 15 cm, cujo polígono da base é um trapézio isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 4 cm e 10 cm?

B.11 Uma pirâmide de altura 9 cm tem como polígono da base um trapézio $ABCD$ retângulo em A e B tal que $AB = 8$ cm, $\overline{BC}$ é base menor, $BC = 8$ cm e $CD = 10$ cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.12 As medidas da altura e de uma aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal são, respectivamente, 6 cm e 2 cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.13 Uma pirâmide regular triangular tem altura 9 m e o apótema da base 2 m. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.14 A medida da altura de uma pirâmide regular quadrangular é igual à medida de uma diagonal de sua base. Sabendo que o apótema da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide.

B.15 O apótema de um tetraedro regular mede 3 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

B.16 O apótema da base de um tetraedro regular mede 2 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

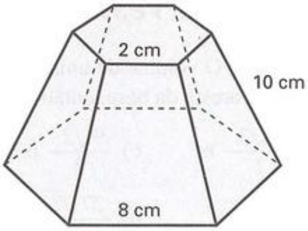
B.17 Um tetraedro regular tem arestas de 6 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

B.18 Uma pirâmide de altura 9 cm tem como polígono da base um retângulo de lados 6 cm e 4,5 cm. Um plano paralelo à base dessa pirâmide e distante 3 cm de seu vértice separa-a em dois sólidos. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

B.19 Uma pirâmide regular quadrangular de altura 8 cm e aresta da base 4 cm é seccionada por um plano paralelo à base e distante 2 cm de seu vértice. Calcule o volume, a área lateral e a área total do tronco de pirâmide assim determinado.

B.20 Um tronco de pirâmide regular de bases paralelas e hexagonais tem arestas laterais com 10 cm, arestas da base maior com 8 cm e arestas da base menor com 2 cm.
Calcule:

a) a área lateral (A_ℓ) desse tronco;
b) a área total (A_t) desse tronco;
c) o volume (V) desse tronco.

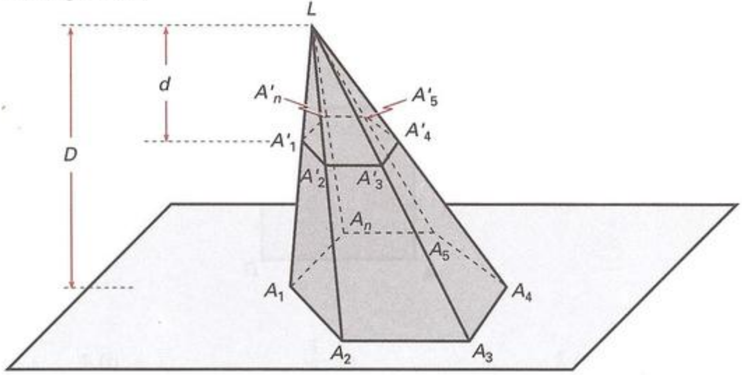


Exercícios complementares

C.1 Dois sólidos são **equivalentes** se, e somente se, têm volumes iguais. Uma pirâmide regular quadrangular, cujas arestas das bases têm medidas iguais a 3 cm, é equivalente a um cubo cujas arestas medem 4 cm. Qual é a altura dessa pirâmide?

C.2 Uma das faces de um tetraedro trirretângulo tem os três lados de medidas iguais a $6\sqrt{2}$ cm. Calcule o volume desse tetraedro.

C.3 Considere uma pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ de altura D e uma de suas secções transversais $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ cuja distância ao vértice L é igual a d.



Sendo V o volume da pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ e V' o volume da pirâmide $LA'_1A'_2A'_3...A'_n$, calcule, em função de D e d, a razão $\frac{V}{V'}$.

C.4 Seja $LA_1A_2A_3...A_n$ uma pirâmide de altura 8 cm e seja $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ uma de suas secções transversais distante 4 cm de seu vértice. Calcule o volume V da pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ sabendo que o volume V' da pirâmide $LA'_1A'_2A'_3...A'_n$ é igual a 2 cm^3. **Sugestão:** use o resultado do exercício anterior.

C.5 Uma secção transversal de uma pirâmide de altura 12 cm separa-a em dois sólidos de volumes iguais. Calcule a distância do plano dessa secção transversal ao vértice da pirâmide.

C.6 As arestas da base de uma pirâmide regular hexagonal medem 4 cm. A área lateral dessa pirâmide é o dobro da área da base. Calcule o volume da pirâmide.

C.7 Calcule o volume de um octaedro regular cujas arestas medem 6 cm.

C.8 Calcule o volume do poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de arestas 4 cm.

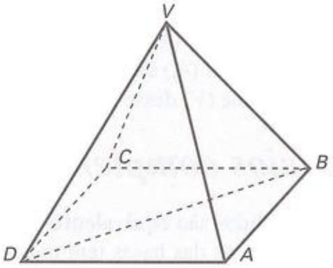
C.9 Seja P um ponto interior de um tetraedro regular de altura 9 cm. Calcule a soma das distâncias de P às quatro faces do tetraedro.

C.10 Calcule o volume de uma pirâmide regular triangular em que as arestas da base medem 8 cm e cada face lateral forma com a base ângulo de 60°.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-PA) O volume de uma pirâmide regular quadrangular $VABCD$ é $27\sqrt{3}$ m³. Se a altura da pirâmide é igual à aresta da base, então a área do triângulo VBD vale:

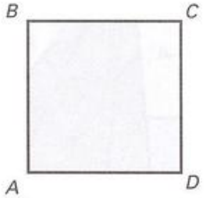
a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ m²
b) $27\sqrt{2}$ m²
c) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ m²
d) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ m²
e) $27\sqrt{3}$ m²



V.2 (Fuvest-SP) Qual é a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?

a) $\sqrt{1}$
b) $\sqrt{1{,}5}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2{,}5}$
e) $\sqrt{3}$

V.3 (Fuvest-SP) O quadrado $ABCD$ é face de um cubo e I é o centro da face oposta. Sendo α a medida do ângulo entre os planos ABI e CDI, calcule $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.



a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) $\frac{1}{3}$
d) 4
e) $\frac{1}{4}$

V.4 (Vunesp) É dada uma pirâmide de altura H, $H = 9$ cm, e volume V, $V = 108$ cm³. Um plano paralelo à base dessa pirâmide corta-a determinando um tronco de pirâmide de altura h, $h = 3$ cm. O volume do tronco de pirâmide resultante é:

a) 36 cm³
b) 38 cm³
c) 54 cm³
d) 72 cm³
e) 76 cm³

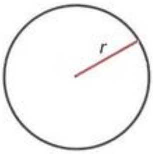
Capítulo 55

Cilindro

1. Circunferência e círculo – revisão

Para o estudo do cilindro circular, convém recordarmos as fórmulas do perímetro de uma circunferência e da área de um círculo.

O perímetro de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.

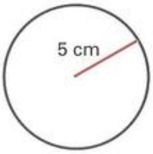


Perímetro = $2\pi r$

Exercício resolvido

R.1 Calcular o perímetro de uma circunferência de raio 5 cm.

Resolução



Perímetro = $2\pi \cdot 5$ cm = 10π cm.

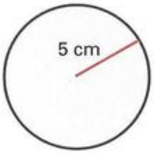
A área de um círculo de raio r é igual a πr^2.

Área = πr^2

Exercício resolvido

R.2 Calcular a área de um círculo de raio 5 cm.

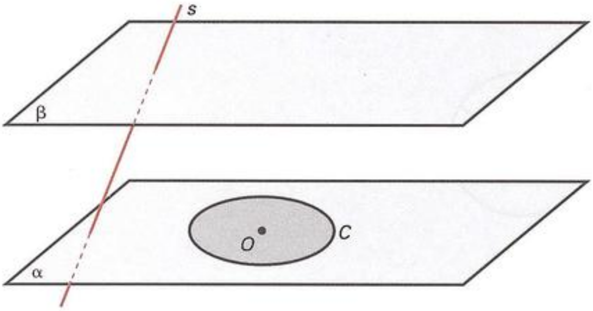
Resolução



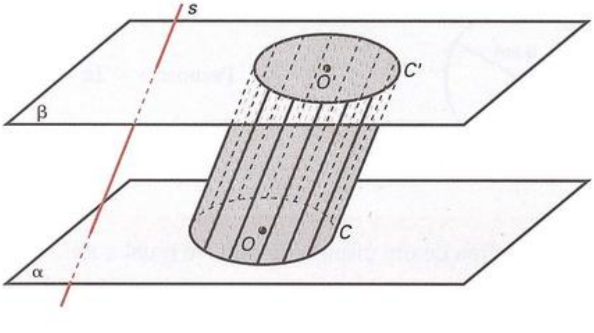
Área $= \pi \cdot 5^2\ \text{cm}^2 = 25\pi\ \text{cm}^2$.

2. Cilindro circular

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α.



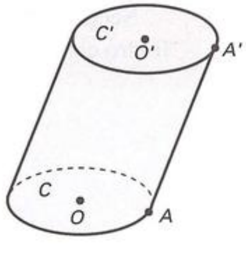
Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β.



A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de "**cilindro circular limitado** de bases C e C'" ou simplesmente **cilindro circular.**

Nota: há outros tipos de cilindro (por exemplo, o cilindro de bases elípticas), porém trataremos neste curso apenas dos cilindros circulares; por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circulares", chamando-os simplesmente de "cilindros".

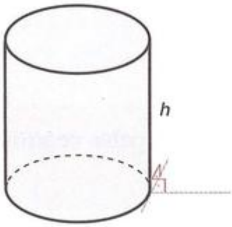
2.1. Elementos do cilindro circular



- Os círculos C e C' de centros O e O', respectivamente, são chamados de "**bases** do cilindro".
- A reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é chamada de "**eixo** do cilindro".
- A distância entre as bases é chamada de "**altura** do cilindro".
- Todo segmento de reta paralelo ao eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ que tem extremidades pertencentes às **circunferências** das bases é chamado de "**geratriz** do cilindro". Por exemplo, $\overline{AA'}$.
- Chama-se "**área lateral** A_ℓ do cilindro" a área da superfície obtida pela reunião de todas as geratrizes.
- Chama-se "**área total** A_t do cilindro" a soma da área lateral com as áreas das bases.

2.2. Cilindro circular reto

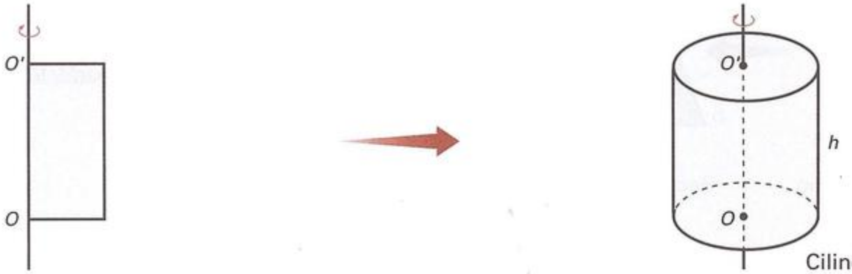
Cilindro circular reto é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.



Cilindro circular reto

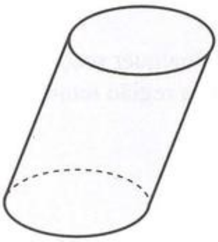
Em todo cilindro circular reto a medida h de uma geratriz é a altura do cilindro.

O cilindro circular reto também é conhecido por **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de uma região retangular em torno de um eixo que contém um de seus lados.



Cilindro de revolução

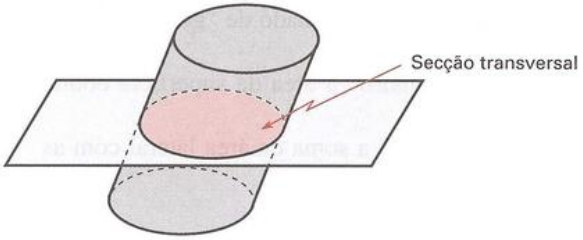
Nota: cilindro circular oblíquo é todo aquele que não é reto.



Cilindro circular oblíquo

2.3. Secção transversal de um cilindro circular

Secção transversal de um cilindro circular é qualquer intersecção não-vazia do cilindro com um plano paralelo às suas bases.

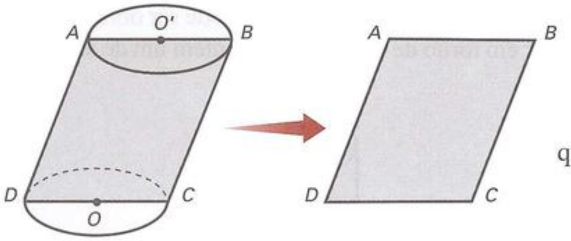


Propriedade

Toda secção transversal de um cilindro circular é um **círculo congruente** às bases.

2.4. Secção meridiana de um cilindro circular

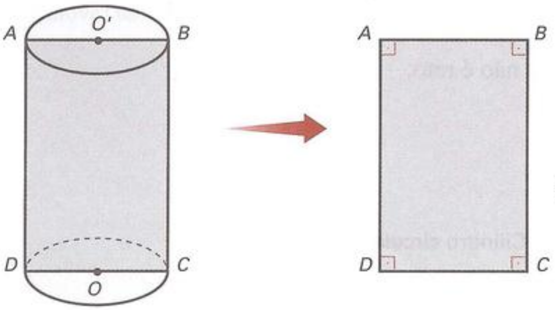
A intersecção de um cilindro circular com um plano que passa pelos centros de suas bases é chamada de "**secção meridiana** do cilindro".



Cilindro circular oblíquo

Secção meridiana

Qualquer secção meridiana de um cilindro oblíquo é uma região limitada por um paralelogramo.



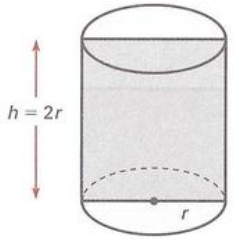
Cilindro circular reto

Secção meridiana

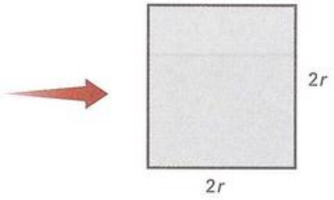
Qualquer secção meridiana de um cilindro reto é uma região retangular.

2.5. Cilindro equilátero

Todo cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas é chamado de **cilindro equilátero**.



Cilindro equilátero



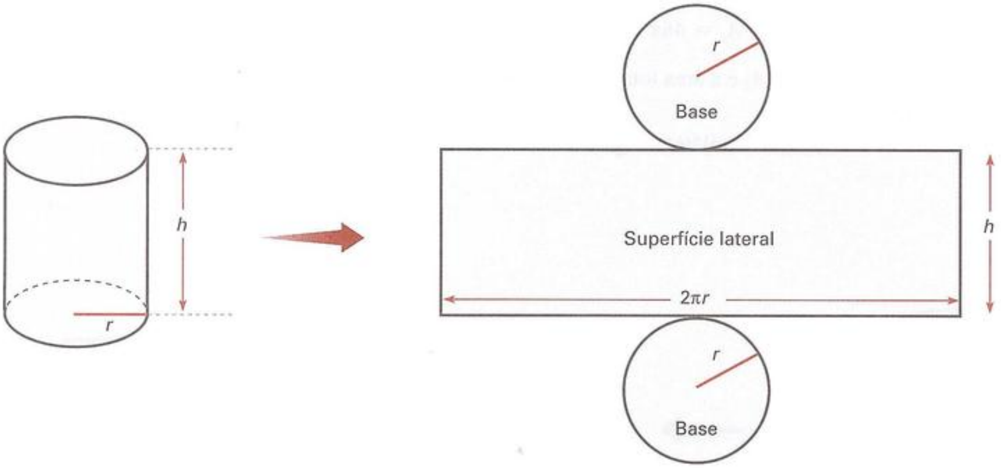
Secção meridiana

No cilindro equilátero a altura é igual ao diâmetro da base:

$$h = 2r.$$

2.6. Área lateral e área total de um cilindro circular reto

A superfície de um cilindro circular reto de altura h e raio da base r é **equivalente** à reunião de uma região retangular, de lados $2\pi r$ e h, com dois círculos de raio r. Para entender essa afirmação, retire as bases de um cilindro, corte sua superfície lateral sobre uma geratriz e, por fim, planifique (coloque sobre um plano) as três regiões obtidas.



A área do retângulo equivalente à superfície lateral do cilindro é a **área lateral** A_ℓ do cilindro, ou seja:

$$A_\ell = 2\pi rh.$$

A área total A_t do cilindro é igual à soma da área lateral A_ℓ com as áreas das duas bases, ou seja:

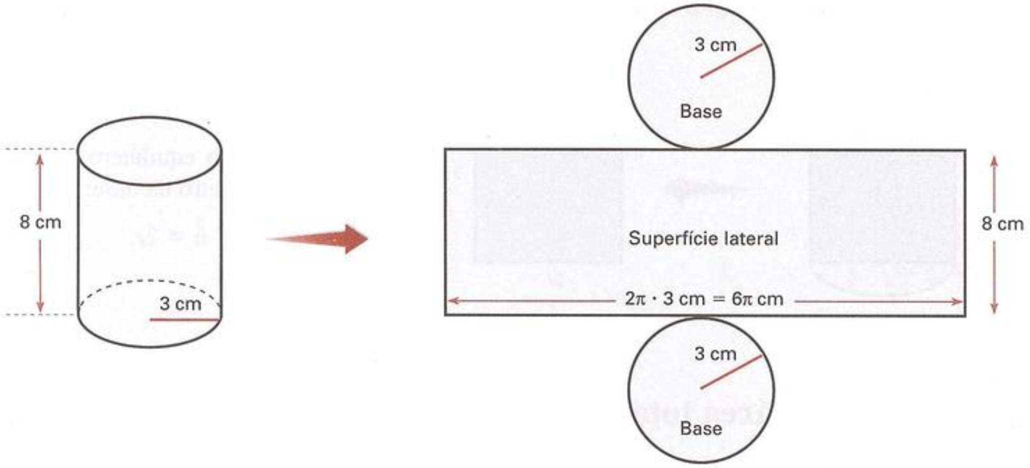
$$A_t = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\therefore \quad A_t = 2\pi r\,(h + r)\,.$$

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular a área lateral A_ℓ e a área total A_t de um cilindro circular reto de altura 8 cm e raio da base 3 cm.

Resolução


8 cm
3 cm
3 cm
Base
Superfície lateral
$2\pi \cdot 3$ cm = 6π cm
8 cm
3 cm
Base

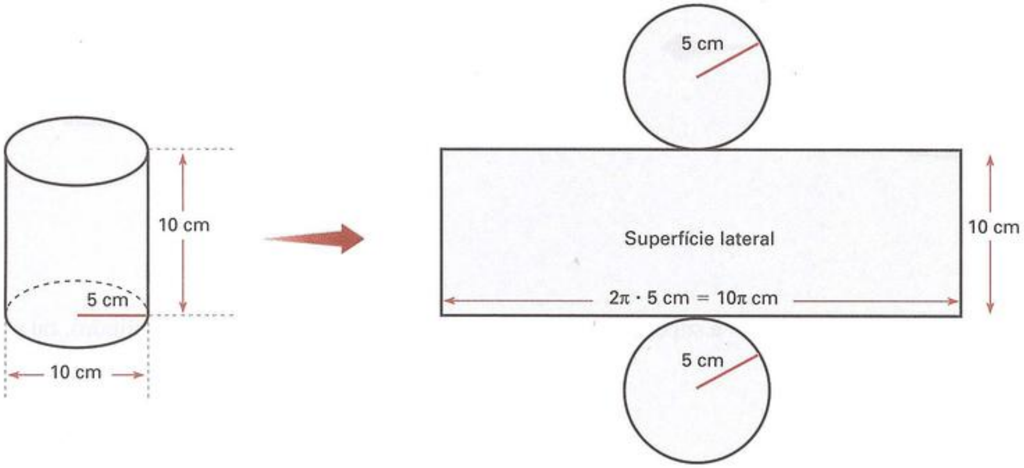
A área lateral A_ℓ é a área do retângulo de lados 6π cm e 8 cm: $A_\ell = 6\pi \cdot 8 \text{ cm}^2$ $\therefore A_\ell = 48\pi \text{ cm}^2$.
A área B de cada base é a área de um círculo de raio 3 cm: $B = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2$ $\therefore B = 9\pi \text{ cm}^2$.
A área total A_t é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$$A_t = 48\pi \text{ cm}^2 + 9\pi \text{ cm}^2 + 9\pi \text{ cm}^2 \quad \therefore A_t = 66\pi \text{ cm}^2.$$

R.4 Calcular a área lateral A_ℓ e a área total A_t de um cilindro equilátero de raio da base 5 cm.

Resolução

A altura de um cilindro equilátero é igual ao diâmetro da base, logo:

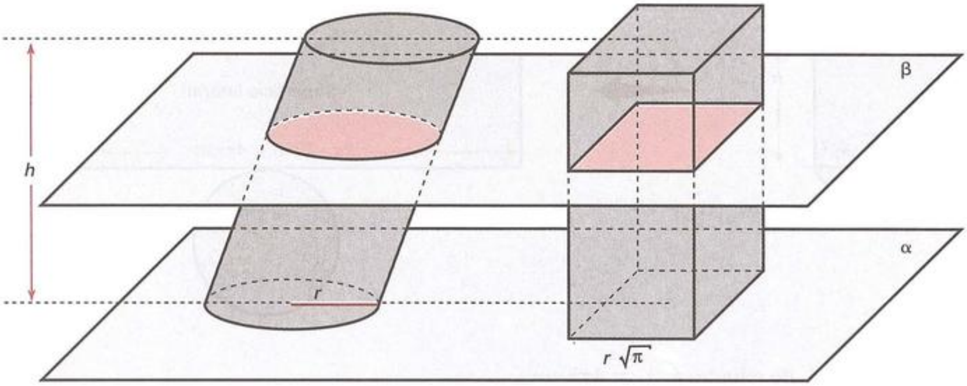

10 cm
5 cm
10 cm
5 cm
Superfície lateral
$2\pi \cdot 5$ cm = 10π cm
10 cm
5 cm

A área lateral A_ℓ é a área do retângulo de lados 10π cm e 10 cm: $A_\ell = 10\pi \cdot 10 \text{ cm}^2$ $\therefore A_\ell = 100\pi \text{ cm}^2$.
A área B de cada base é a área de um círculo de raio 5 cm: $B = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2$ $\therefore B = 25\pi \text{ cm}^2$.
A área total A_t é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$$A_t = 100\pi \text{ cm}^2 + 25\pi \text{ cm}^2 + 25\pi \text{ cm}^2 \quad \therefore A_t = 150\pi \text{ cm}^2.$$

2.7. Volume do cilindro circular

Consideremos um cilindro de altura h com raio da base r e um prisma de mesma altura h cujo polígono da base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semi-espaço de origem num plano α e que suas bases estejam contidas em α.



Note que a área da base do cilindro, πr^2, é igual à área da base do prisma, $(r\sqrt{\pi})^2 = \pi r^2$.

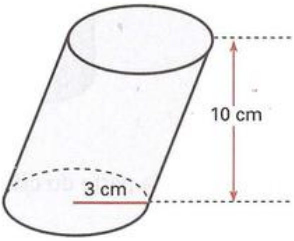
Qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um desses sólidos também intercepta o outro e determina neles secções de mesma área πr^2, pois cada secção será congruente à base do respectivo sólido. Assim, pelo **princípio de Cavalieri**, esses sólidos têm volumes iguais. Como o volume do prisma é o produto da área da base pela sua altura, temos que o volume V do cilindro também é o produto da área da base pela sua altura, ou seja:

$$V = \pi r^2 h.$$

Exercícios resolvidos

R.5 Calcular o volume de um cilindro circular de altura 10 cm e raio da base 3 cm.

Resolução

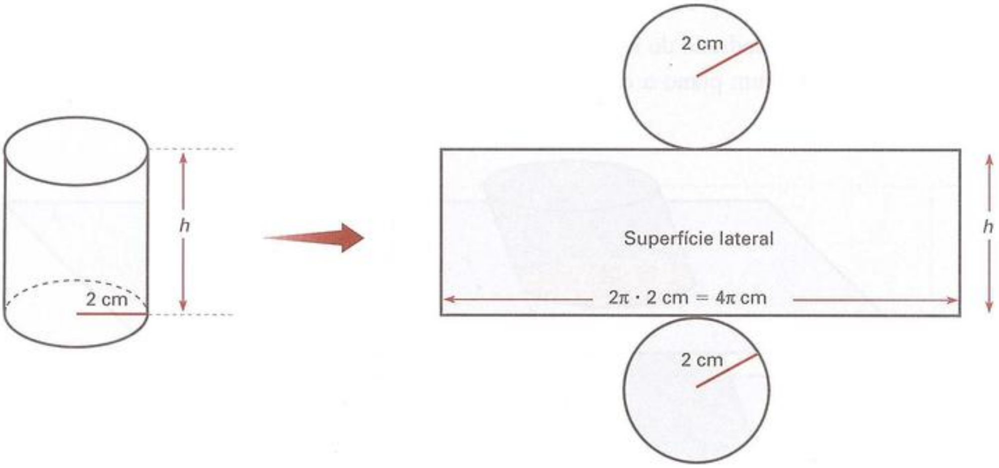


A área B da base do cilindro é: $B = \pi 3^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 9\pi \text{ cm}^2$.

O volume V do cilindro é o produto da área da base por sua altura: $V = 9\pi \cdot 10 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 90\pi \text{ cm}^3$.

R.6 A área lateral de um cilindro circular reto é igual ao quádruplo da área de uma de suas bases. Calcular o volume desse cilindro, sabendo que o raio de sua base mede 2 cm.

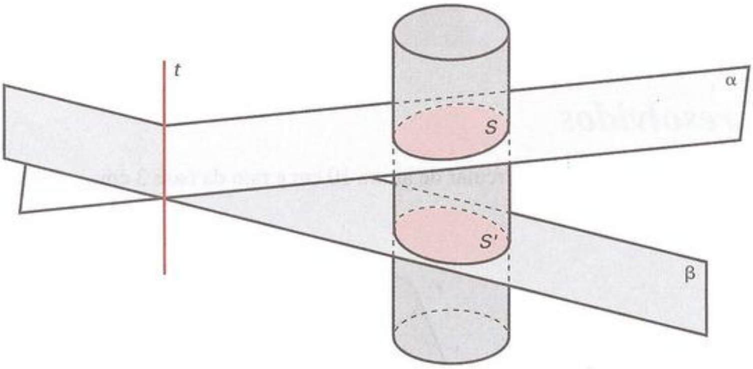
Resolução


h
2 cm
2 cm
Superfície lateral
$2\pi \cdot 2$ cm = 4π cm
h
2 cm

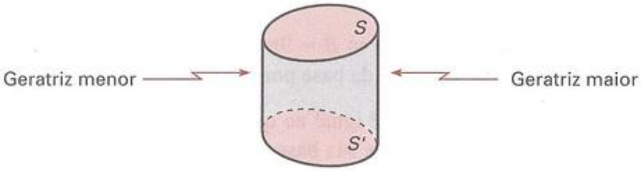
A área lateral A_ℓ do cilindro é: $A_\ell = 4\pi h$ cm².
A área B de uma base do cilindro é: $B = \pi \cdot 2^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 4\pi \text{ cm}^2$.
Pelo enunciado, devemos ter: $A_\ell = 4B \Rightarrow 4\pi h = 4 \cdot 4\pi \ \therefore h = 4$ cm.
Logo, o volume do cilindro é: $V = Bh \Rightarrow V = 4\pi \cdot 4 \text{ cm}^3 \ \therefore V = 16\pi \text{ cm}^3$.

3. Tronco de cilindro circular reto

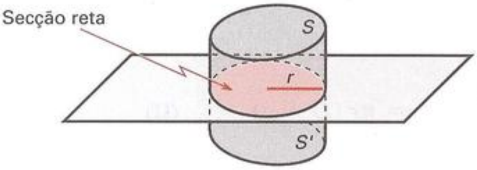
Consideremos um cilindro circular reto e dois planos α e β que interceptam todas as geratrizes do cilindro tal que $\alpha \cap \beta$ é uma reta t exterior ao cilindro.



Chama-se **tronco do cilindro circular reto** a parte do cilindro limitada pelos planos α e β.


S
Geratriz menor
Geratriz maior
S'

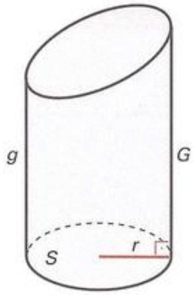
- As secções S e S' determinadas no cilindro pelos planos α e β, respectivamente, são chamadas de "**bases** do tronco".
- A parte de cada geratriz do cilindro limitada pelos planos α e β é chamada de "**geratriz** do tronco".
- A geratriz de maior e a de menor medida são chamadas, respectivamente, de "**geratriz maior** e **geratriz menor** do tronco".
- O círculo obtido pela intersecção do tronco com um plano que intercepta, perpendicularmente, todas as geratrizes é chamado de "**secção reta** do tronco".



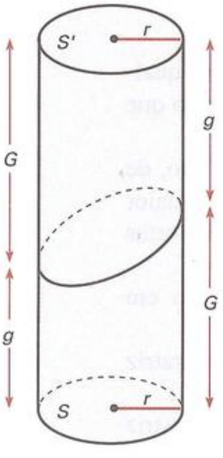
r é o raio da secção reta.

3.1. Volume e área lateral do tronco

Consideremos um tronco de cilindro circular reto que possui uma base circular S de raio r, a geratriz maior medindo G e a menor medindo g.



Prolongando suas geratrizes de modo a formar um cilindro circular reto de base S e altura $G + g$, temos:



Note que esse cilindro é composto por dois troncos congruentes, possuindo, cada um, uma base circular de raio r, a geratriz maior medindo G e a menor medindo g. Assim, cada um desses troncos possui volume V e área lateral A_ℓ respectivamente iguais à metade do volume V_c e da área lateral $A_{\ell c}$ do cilindro, ou seja:

$$V = \frac{V_c}{2} \Rightarrow \quad V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2} \qquad \text{(I)}$$

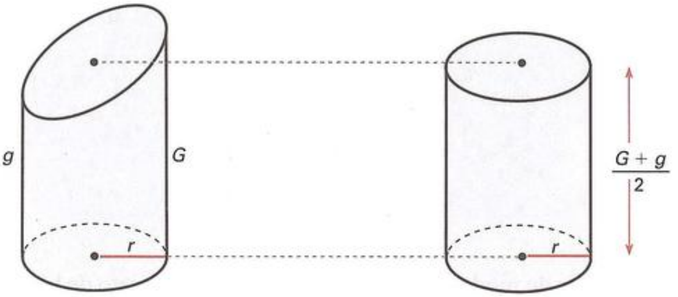
e

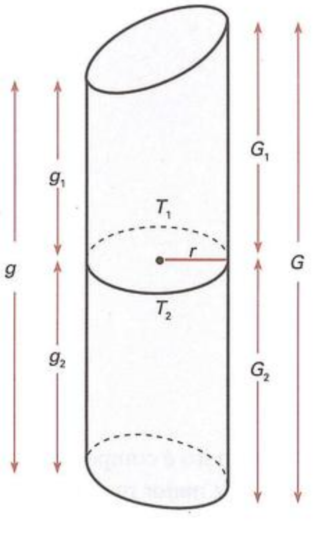
$$A_\ell = \frac{A_{\ell c}}{2} \Rightarrow A_\ell = \frac{2\pi r (G + g)}{2}$$

$$\therefore \qquad A_\ell = \pi r (G + g) . \qquad \text{(II)}$$

Concluímos, então, o seguinte:

Um tronco de cilindro circular reto de base circular de raio r, em que a geratriz maior mede G e a menor mede g, e um cilindro circular reto de raio da base r e altura $\frac{G + g}{2}$ têm volumes iguais e áreas laterais iguais.





Vamos generalizar essa conclusão para qualquer tronco de cilindro circular reto, mesmo que esse tronco não tenha base circular.

Seja T um tronco de cilindro circular reto, de bases não-circulares, em que a geratriz maior mede G e a menor mede g, e cujas secções retas tenham raio r.

Uma secção reta desse tronco separa-o em dois troncos T_1 e T_2 tais que:

- T_1 tem base circular de raio r, sua geratriz maior mede G_1 e sua geratriz menor mede g_1;
- T_2 tem base circular de raio r, sua geratriz maior mede G_2 e sua geratriz menor mede g_2.

Sendo V_1, V_2, A_{ℓ_1} e A_{ℓ_2} os volumes e as áreas laterais dos troncos T_1 e T_2, respectivamente, temos, por (I) e (II), que:

$$V_1 = \frac{\pi r^2 (G_1 + g_1)}{2} \quad \text{e} \quad A_{\ell_1} = \pi r (G_1 + g_1);$$

$$V_2 = \frac{\pi r^2 (G_2 + g_2)}{2} \quad \text{e} \quad A_{\ell_2} = \pi r (G_2 + g_2).$$

Observando que:

- $V_1 + V_2$ é igual ao volume V do tronco T,
- $A_{\ell_1} + A_{\ell_2}$ é igual à área lateral A_ℓ do tronco T,
- $G_1 + G_2 = G$,
- $g_1 + g_2 = g$,

temos:

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 (G_1 + g_1)}{2} + \frac{\pi r^2 (G_2 + g_2)}{2}$$

$$\therefore V = \frac{\pi r^2}{2} (G_1 + g_1 + G_2 + g_2)$$

$$\therefore V = \frac{\pi^2 (G + g)}{2};$$

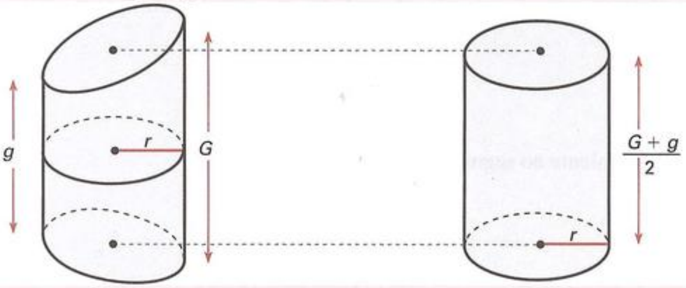
$$A_\ell = A_{\ell_1} + A_{\ell_2} \Rightarrow A_\ell = \pi r (G_1 + g_1) + \pi r (G_2 + g_2)$$

$$\therefore A_\ell = \pi r (G_1 + g_1 + G_2 + g_2)$$

$$\therefore \quad A_\ell = \pi r (G + g).$$

Concluímos então o seguinte:

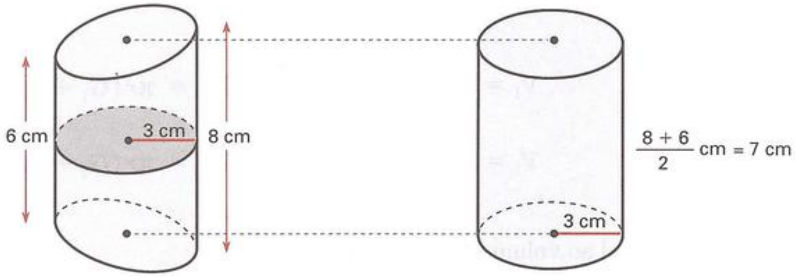
Um tronco de cilindro circular reto de secção reta de raio r, em que a geratriz maior mede G e a menor mede g, e um cilindro circular reto de raio da base r e altura $\frac{G + g}{2}$ têm volumes iguais e áreas laterais iguais.



Exercícios resolvidos

R.7 Calcular o volume e a área lateral de um tronco de cilindro circular reto cujas secções retas têm raio 3 cm e em que a geratriz maior e a menor medem 8 cm e 6 cm.

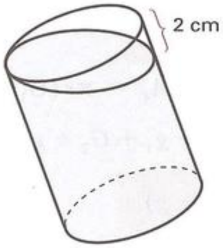
Resolução



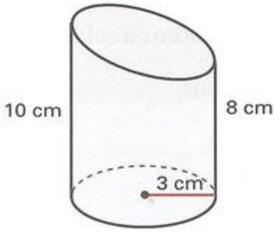
Um cilindro circular reto de raio da base 3 cm e altura $\frac{8+6}{2}$ cm tem o mesmo volume e a mesma área lateral desse tronco.
Assim, o volume V e a área lateral A_ℓ do tronco são:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 63\pi \text{ cm}^3;\ A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 42\pi \text{ cm}^2.$$

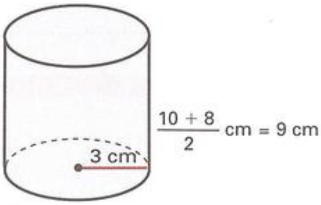
R.8 Um copo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura interna mede 10 cm, contém um certo volume de água. Inclinando o máximo possível esse copo, sem derramar a água, obtemos a medida descrita na figura abaixo. Qual é o volume da água contida no copo?



Resolução
O volume da água é o volume do seguinte tronco de cilindro circular reto de base circular:



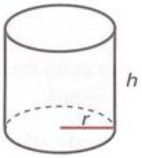
Esse tronco é equivalente ao seguinte cilindro circular reto:



Logo, o volume V do tronco é: $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 81\pi \text{ cm}^3$.

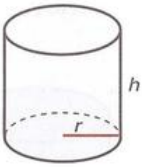
4. Resumo dos teoremas

T.66 O volume de um cilindro circular reto é o produto da área de sua base por sua altura.



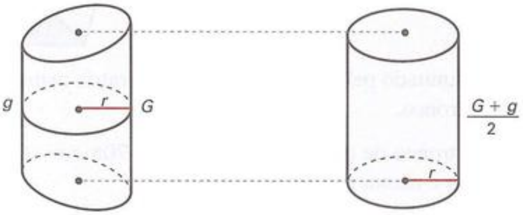
$$V = \pi r^2 h.$$

T.67 Se um cilindro circular reto tem altura h e raio da base r, então sua área lateral A_ℓ e sua área total A_t são:



$$A_\ell = 2\pi rh;$$
$$A_t = 2\pi r\,(h + r).$$

T.68 Um tronco de cilindro circular reto de secção reta de raio r, em que a geratriz maior e a menor medem G e g, respectivamente, e um cilindro circular reto de raio da base r e altura $\frac{G + g}{2}$ têm volumes iguais e áreas laterais iguais.



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.9, B.10, B.11, B.13, B.14, C.1, C.3, C.4, C.8, C.13.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, B.12, B.15, B.16, C.2, C.5, C.6, C.7, C.9, C.10, C.11, C.12, C.14.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a área lateral e a área total de um cilindro circular reto de altura 10 m e raio de base 3 m.

B.2 Determine a área lateral e a área total de um cilindro circular reto de altura 9 cm e diâmetro da base 8 cm.

B.3 A área lateral de um cilindro circular reto é igual à metade da área total. Calcule a altura desse cilindro, sabendo que o raio da base mede 5 cm.

B.4 A área lateral de um cilindro circular reto é igual à área de uma de suas bases. Determine o raio da base desse cilindro, sabendo que sua altura mede 6 cm.

B.5 Um cilindro equilátero tem altura 20 cm. Calcule a área lateral e a área total desse cilindro.

B.6 Calcule a razão $\frac{A_\ell}{A_t}$, onde A_ℓ é a área lateral e A_t é a área total de um cilindro equilátero de raio da base R.

B.7 Calcule o volume de um cilindro circular de altura 8 dm e raio da base 2 dm.

B.8 Calcule o volume de um cilindro equilátero cujo raio da base mede 4 cm.

B.9 O perímetro da base de um cilindro circular é 10π cm. Calcule a altura do cilindro, sabendo que seu volume é 75π cm^3.
Lembrete: o perímetro de uma circunferência de raio R é $2\pi R$.

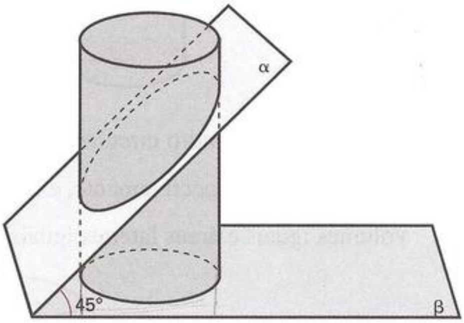
B.10 Um cilindro circular reto de raio da base 5 cm é equivalente a um cubo de aresta 5 cm. Qual é a altura do cilindro? **Lembrete:** sólidos equivalentes são sólidos de volumes iguais.

B.11 O raio da base de um cilindro circular mede 8 cm e cada geratriz mede 10 cm e forma com o plano de uma base um ângulo de 30°. Calcule o volume do cilindro.

B.12 Um cilindro circular tem volume 20π cm^3. Cada aresta lateral desse cilindro mede $5\sqrt{2}$ cm e forma com o plano de uma base um ângulo de 45°. Determine a medida do raio da base desse cilindro.

B.13 Calcule o volume e a área lateral de um tronco de cilindro circular reto cujas secções retas têm raio 10 cm e em que a geratriz maior e a menor medem 20 cm e 12 cm.

B.14 Um plano β intercepta todas as geratrizes de um cilindro circular reto e forma com o plano α de uma base do cilindro um ângulo de 45° (conforme figura).



O tronco de cilindro limitado pelos planos α e β tem geratriz maior e menor medindo 20 cm e 16 cm. Calcule o volume desse tronco.

B.15 A área lateral de um tronco de cilindro circular reto é 70π cm^2. Calcule o volume desse tronco, sabendo que tem geratriz maior e menor medindo 10 cm e 4 cm.

B.16 O volume de um tronco de cilindro circular reto é 45π cm^3. Calcule a medida do raio de uma secção reta desse tronco, sabendo que tem geratriz maior e menor medindo 8 cm e 2 cm.

Exercícios complementares

C.1 Um cilindro circular reto de raio da base 5 cm possui uma secção meridiana equivalente a uma de suas bases. Calcule a área lateral e a área total desse cilindro. **Lembrete:** figuras planas equivalentes são figuras de áreas iguais.

C.2 Uma secção meridiana de um cilindro equilátero tem área 100 m^2. Calcule a área lateral e a área total desse cilindro.

C.3 Um cilindro circular tem raio da base 4 cm. Se aumentarmos de 8 cm o raio da base ou a altura desse cilindro, seu volume aumenta x cm^3. Qual é a altura desse cilindro?

C.4 Um cilindro equilátero tem volume V. Calcule o raio da base desse cilindro, em função de V.

C.5 Uma lata de óleo, sob a forma de um cilindro circular reto, tem raio da base 5 cm e seu volume é 1 ℓ. Qual é a altura da lata?

C.6 Um cilindro reto C_1 tem raio da base r e altura h, e um outro cilindro reto C_2 tem raio da base R e altura H. Sabendo que C_1 e C_2 têm a mesma área lateral, calcule, em função de r e R, a razão entre os volumes de C_1 e C_2, nessa ordem.

C.7 Um recipiente sob a forma de um cilindro reto está repleto de vinho. Esse vinho deve ser distribuído em copos cilíndricos, possuindo, cada um, altura igual a $\frac{1}{8}$ da altura do recipiente e diâmetro da base igual a $\frac{1}{5}$ do diâmetro da base do recipiente. Quantos copos serão necessários?

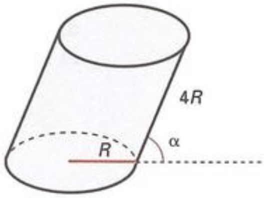
C.8 Um cilindro equilátero é equivalente a um prisma regular triangular de altura 3 cm e aresta da base 2 cm. Calcule a área total do cilindro.

C.9 Um cilindro circular reto tem altura igual ao perímetro de uma de suas bases. A área lateral desse cilindro é igual à área total de um cubo. Calcule a razão entre o volume do cilindro e o volume do cubo, nessa ordem.

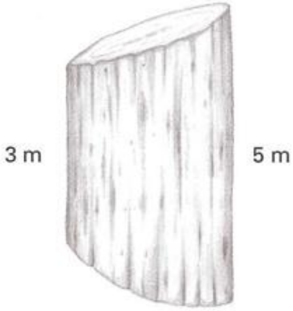
C.10 Uma secção meridiana de um cilindro circular reto é um quadrado de área A. Calcule, em função de A:
a) a área total do cilindro;
b) o volume do cilindro.

C.11 Um cilindro circular de altura 3 cm é equivalente a uma pirâmide regular hexagonal de altura 6 cm e aresta da base 1 cm. Calcule a medida do raio da base do cilindro.

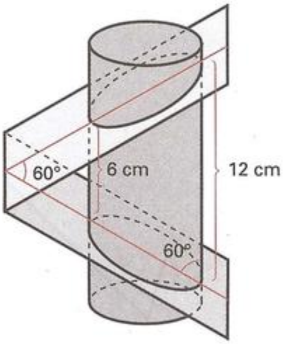
C.12 As geratrizes de um cilindro circular formam um ângulo agudo de medida α com o plano de uma das bases do cilindro. Sabendo que o raio da base mede R, que o volume do cilindro é $2\pi R^3$ e que cada geratriz mede $4R$, calcule a medida α.



C.13 Uma tora de madeira sob a forma de um tronco de cilindro circular reto, em que a geratriz maior e a menor medem 5 m e 3 m, tem volume 4π m³. Calcule o raio de uma secção reta dessa tora.



C.14 Cada uma das faces de um diedro de 60° intercepta todas as geratrizes de um cilindro circular reto, determinando um tronco em que a geratriz maior e a menor medem 12 cm e 6 cm. Essas geratrizes formam com as faces do diedro ângulos de 60° (conforme figura). Calcule o volume desse tronco.



Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo diâmetro da base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:
a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

V.2 (PUC-SP) Um cilindro é equivalente (mesmo volume) a uma pirâmide regular de base quadrada. O raio da circunferência inscrita na base da pirâmide é $R = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$. Sabendo-se que o cilindro e a pirâmide têm alturas iguais, então o raio da base do cilindro é:

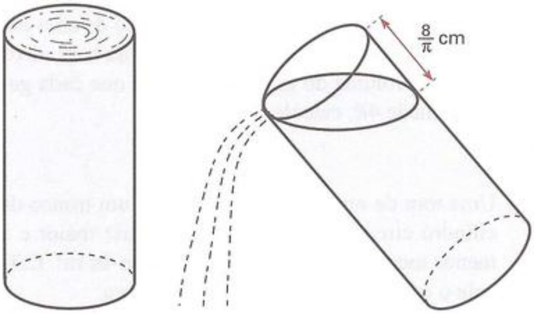
a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ e) Nenhuma das anteriores está correta.

V.3 (Mackenzie-SP) A altura de um cilindro é 20 cm. Aumentando-se 5 cm o raio da base desse cilindro, a área lateral do novo cilindro fica igual à área total do primeiro. O raio da base do primeiro cilindro é igual a:

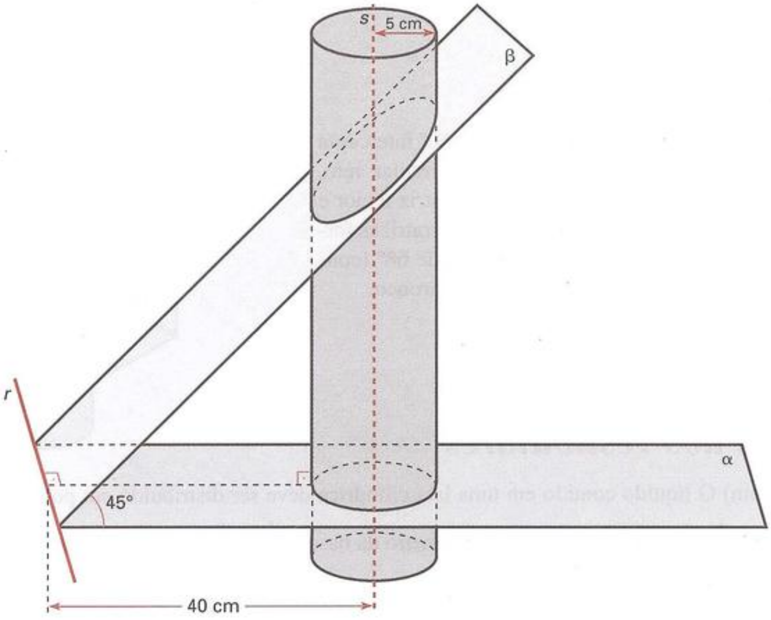
a) 10 cm b) 8 cm c) 12 cm d) 5 cm e) 6 cm

V.4 (Fatec-SP) Um tubo de vidro, com formato de cilindro circular reto, é graduado com uma escala e está cheio de água até a borda. Veja as figuras. O diâmetro interno do tubo é 5 cm. Inclinando-o paulatinamente, despeja-se a água nele contida até que atinja a marca que dista da borda $\frac{8}{\pi}$ cm. O volume da água despejada é:

a) 25 cm^3
b) 50 cm^3
c) 75 cm^3
d) 100 cm^3
e) 125 cm^3



V.5 (Fatec-SP) Na figura abaixo representamos dois planos α e β, cuja intersecção é a reta r e o ângulo entre eles é 45°; uma reta s, perpendicular ao plano α, tal que a distância entre as retas r e s é igual a 40 cm e um cilindro de raio 5 cm, cujo eixo é a reta s. Determine o volume do tronco de cilindro, limitado pelos planos α e β.



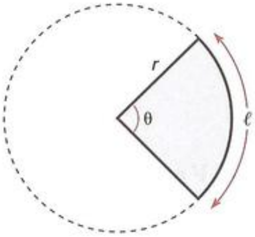
Capítulo 56

Cone

1. Setor circular – revisão

Vamos estudar neste capítulo o cone circular. Para isso é necessário rever o cálculo da medida do ângulo central e da área de um setor circular.

A medida, em radianos, do ângulo central de um setor circular de raio r cujo arco tem comprimento ℓ é $\frac{\ell}{r}$.

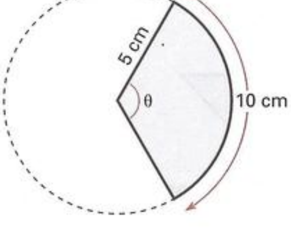


$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{ rad}$$

Exercício resolvido

R.1 Um setor circular de raio 5 cm tem arco de comprimento 10 cm. Calcular a medida do ângulo central desse setor.

Resolução

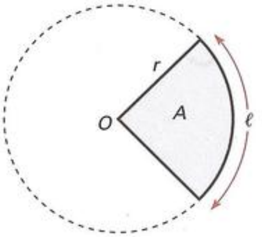


$$\theta = \frac{10}{5} \text{ rad} = 2 \text{ rad}$$

A área A de um setor circular de raio r cujo arco tem comprimento ℓ é dada por $A = \frac{\ell r}{2}$.

De fato, resolvendo a seguinte regra de três:

Comprimento do arco	Área
$2\pi r$	πr^2
ℓ	A



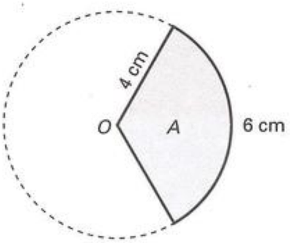
temos:

$$A = \frac{\ell \pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\ell r}{2}.}$$

Exercício resolvido

R.2 Calcular a área de um setor circular de raio 4 cm cujo arco tem comprimento 6 cm.

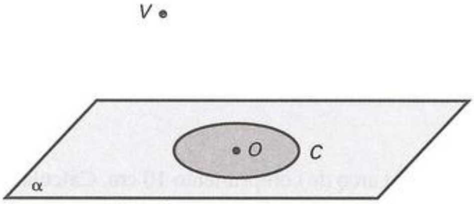
Resolução



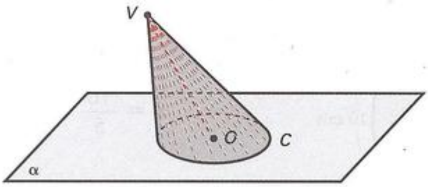
$$A = \frac{6 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 12\ \text{cm}^2.$$

2. Cone circular

Sejam um círculo C de centro O contido em um plano α e um ponto V não-pertencente a α.



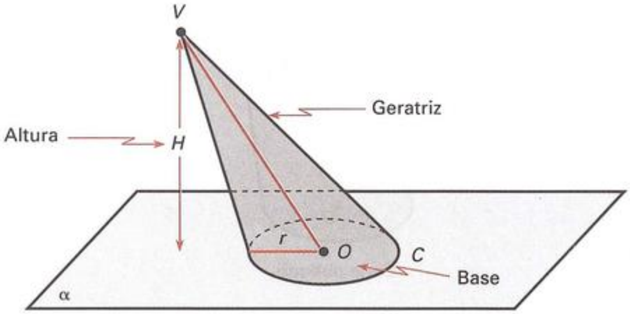
Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo e cujo outro extremo é V.



A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de **cone circular limitado** de base C e vértice V ou simplesmente **cone circular.**

Nota: há outros tipos de cone (por exemplo, o cone de base elíptica), porém neste curso trataremos apenas do cone circular. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circular", chamando-o simplesmente de cone.

2.1. Elementos do cone circular

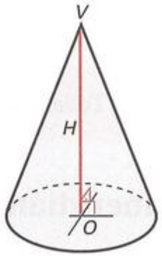


- O círculo C e o ponto V são chamados respectivamente de **base** e **vértice do cone**.
- A reta $\overleftrightarrow{OV}$ é chamada de "**eixo** do cone".
- O raio do círculo C é chamado de "**raio da base** do cone".
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de "**altura** do cone".
- Todo segmento de reta, cujos extremos são o ponto V e um ponto da circunferência da base, é chamado de "**geratriz** do cone".
- A **área lateral** A_ℓ do cone é a área da superfície obtida pela reunião de todas as geratrizes.
- A **área total** A_t do cone é a soma da área lateral com a área da base.

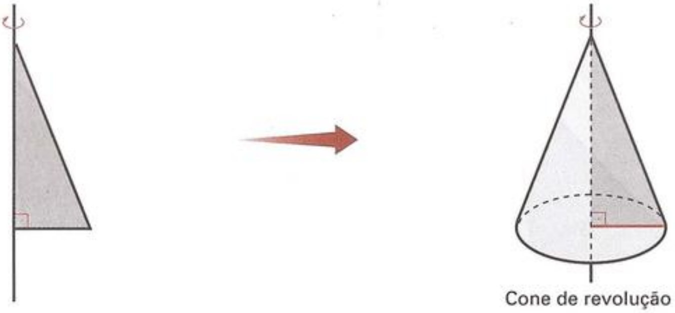
2.2. Cone circular reto

Cone circular reto é todo cone circular cujo eixo é perpendicular ao plano da base.

Em todo cone circular reto, a altura é a medida do segmento cujos extremos são o vértice V e o centro O da base.

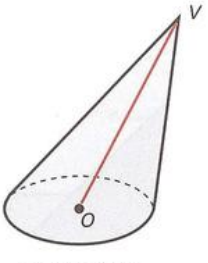


O cone circular reto também é conhecido por **cone de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução de 360° em torno de um dos catetos de uma região limitada por um triângulo retângulo.



Cone de revolução

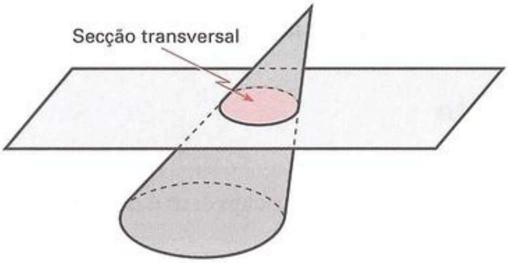
Cone oblíquo é todo cone cujo eixo não é perpendicular ao plano da base.



Cone oblíquo

2.3. Secção transversal de um cone circular

Secção transversal de um cone circular é qualquer intersecção não-vazia e não-unitária do cone com um plano paralelo à sua base.

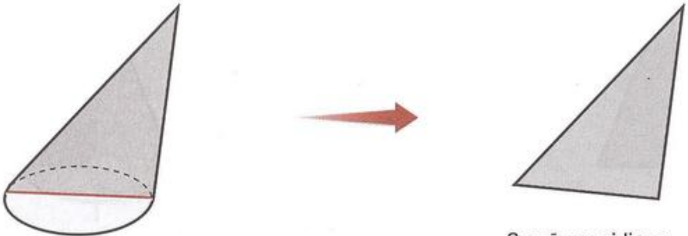


Propriedade

Toda secção transversal de um cone circular é um círculo.

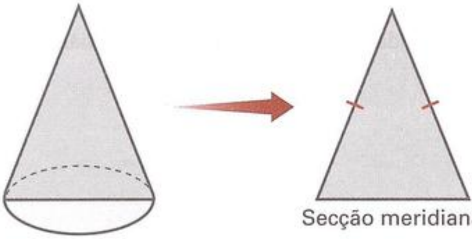
2.4. Secção meridiana de um cone circular

A intersecção de um cone circular com um plano que passa pelo vértice e pelo centro da base é chamada de **secção meridiana do cone circular.**



Secção meridiana

A secção meridiana de um cone circular reto é uma região triangular isósceles.



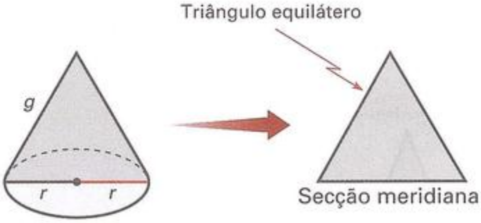
Secção meridiana

2.5. Cone equilátero

Todo cone circular reto cujas secções meridianas são regiões limitadas por triângulos equiláteros é chamado de **cone equilátero**.

Em todo cone equilátero a medida g de cada geratriz é igual ao diâmetro $2r$ da base:

$$g = 2r$$



Triângulo equilátero

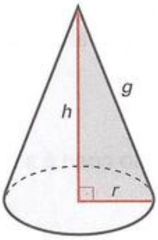
Secção meridiana

2.6. O teorema de Pitágoras e o cone circular reto

Consideremos uma secção meridiana de um cone circular reto tal que o raio da base, a geratriz e a altura meçam r, g e h, respectivamente.

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$g^2 = r^2 + h^2.$$



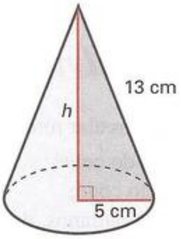
Exercícios resolvidos

R.3 Calcular a medida da altura de um cone circular reto cujo raio da base mede 5 cm e uma geratriz mede 13 cm.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144 \therefore h = 12 \text{ cm}.$$

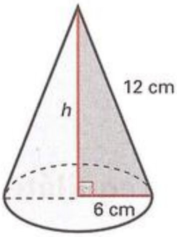


R.4 Calcular a medida da altura de um cone equilátero cujo raio da base mede 6 cm.

Resolução

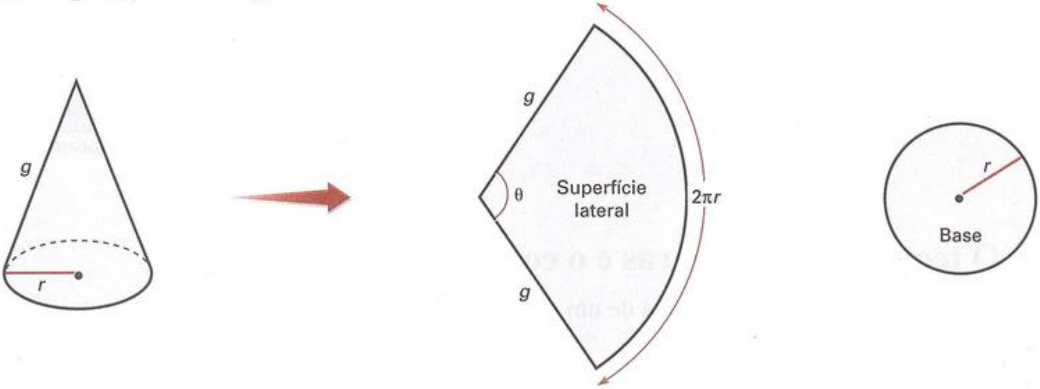
Em todo cone equilátero, a medida de uma geratriz é igual ao diâmetro da base. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$h^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 108 \therefore h = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$



2.7. Área lateral e área total de um cone circular reto

A superfície de um cone circular reto de raio da base r e geratriz de medida g é equivalente à reunião de um círculo de raio r com um setor circular de raio g cujo arco mede $2\pi r$. Para visualizar essa equivalência, retire a base do cone, corte sua superfície sobre uma geratriz e, por fim, planifique (coloque sobre um plano) as duas regiões obtidas.



Note que o comprimento do arco do setor é o comprimento da circunferência da base do cone.

A área do setor equivalente à superfície lateral do cone é a **área lateral** A_ℓ do cone, ou seja:

$$A_\ell = \frac{2\pi rg}{2} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi rg.}$$

A **área total** A_t do cone é a soma da área lateral com a área da base, ou seja:

$$A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi r(g + r).}$$

A medida θ do ângulo central do setor equivalente à superfície lateral do cone é:

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = \frac{360° \cdot r}{g}.}$$

Exercícios resolvidos

R.5 Dado um cone circular reto de raio da base 3 cm e geratriz 7 cm, calcular:

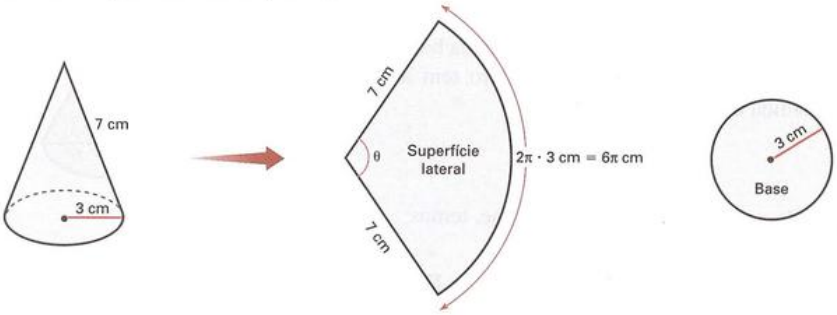
a) a área lateral do cone;

b) a área total do cone;

c) a medida, em radianos, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone:

Resolução

Planificando a superfície do cone, temos:



a) A área lateral A_ℓ é: $A_\ell = \dfrac{6\pi \cdot 7}{2}$ cm² $\Rightarrow A_\ell = 21\pi$ cm².

b) A área B da base do cone é: $B = \pi \cdot 3^2$ cm² $\Rightarrow B = 9\pi$ cm².

Assim, a área total A_t é: $A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 21\pi \text{ cm}^2 + 9\pi \text{ cm}^2 \therefore A_t = 30\pi \text{ cm}^2$.

c) A medida θ do ângulo do setor é: $\theta = \dfrac{6\pi}{7}$ rad.

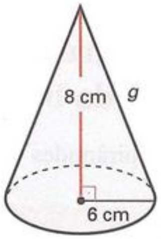
R.6 Dado um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 8 cm, calcular:

a) a área lateral do cone;
b) a área total do cone;
c) a medida, em graus, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

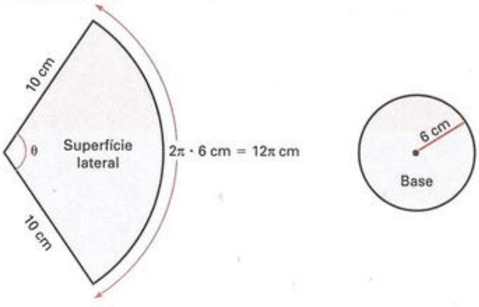
Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g^2 = 100$$
$$\therefore\ g = 10 \text{ cm.}$$



Planificando a superfície do cone, temos:



a) A área lateral A_ℓ é: $A_\ell = \dfrac{12\pi \cdot 10}{2}$ cm² $\Rightarrow A_\ell = 60\pi$ cm².

b) A área B da base do cone é: $B = \pi \cdot 6^2$ cm² $\Rightarrow B = 36\pi$ cm².

Assim, a área total A_t é: $A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 60\pi \text{ cm}^2 + 36\pi \text{ cm}^2 \therefore A_t = 96\pi \text{ cm}^2$.

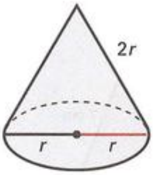
c) A medida θ do ângulo do setor é: $\theta = \dfrac{12\pi}{10}$ rad $\Rightarrow \theta = \dfrac{6\pi}{5}$ rad.

Lembrando que π rad equivalem a 180°, temos: $\theta = \dfrac{6 \cdot 180^\circ}{5} \Rightarrow \theta = 216^\circ$.

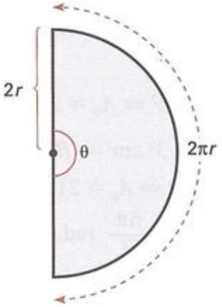
R.7 Mostrar que a medida do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de um cone equilátero é π rad.

Resolução

Consideremos um cone equilátero cujo raio da base mede r. A geratriz de um cone equilátero tem a mesma medida do diâmetro da base.



Planificando a superfície lateral desse cone, temos:



A medida θ é:

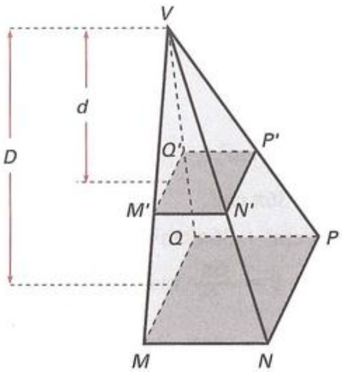
$$\theta = \frac{2\pi r}{2r}\text{ rad} \Rightarrow \theta = \pi\text{ rad}.$$

2.8. Razão entre a área de uma secção transversal e a área da base de um cone circular

No estudo das pirâmides vimos o seguinte:

Se uma pirâmide de altura D tem área da base B, e o plano que contém sua secção transversal de área b está a uma distância d do vértice, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

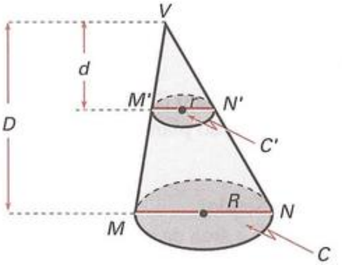


- Área $(MNPQ) = B$;
- Área $(M'N'P'Q') = b$;
- $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$.

Vamos demonstrar que para os cones circulares vale a seguinte propriedade:

Se um cone circular de altura D têm área da base B, e o plano que contém sua secção transversal de área b está a uma distância d do vértice, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$



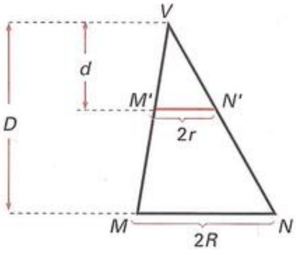
- C é a base do cone;
- C' é uma secção transversal.

Demonstração

- Sejam R e r as medidas dos raios da base C e da secção transversal C', respectivamente. A área b da secção é $b = \pi r^2$. A área B da base é $B = \pi R^2$. Temos, então, que:

$$\frac{b}{B} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{b}{B} = \left(\frac{r}{R}\right)^2. \qquad \text{(I)}$$

- Consideremos uma secção meridiana VMN do cone de base C e vértice V e a intersecção $VM'N'$ dessa secção com o cone de base C' e vértice V. Como $\overline{M'N'}$ é paralelo a $\overline{MN}$, temos que os triângulos $VM'N'$ e VMN são semelhantes. Dessa semelhança concluímos que:



$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{D} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{d}{D}. \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

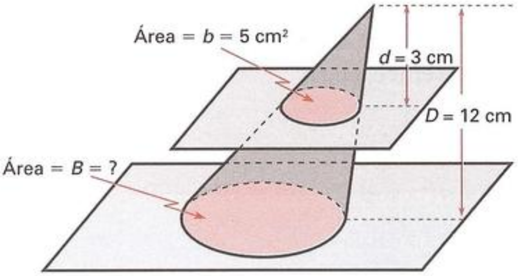
$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.8 Um cone circular de altura 12 cm é seccionado por um plano paralelo à sua base a 3 cm do vértice. Sabe-se que a secção determinada por esse plano no cone tem área 5 cm². Calcular a área da base do cone.

Resolução



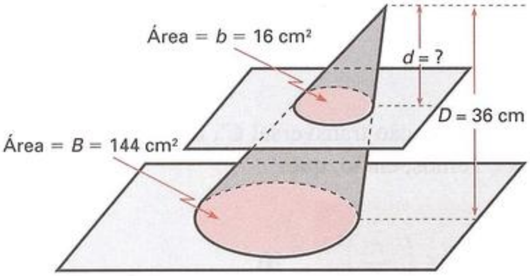
Sendo:
b a área da secção,
d a distância do plano da secção ao vértice,
B a área da base,
D a altura do cone,

temos: $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{B} = \left(\frac{3}{12}\right)^2$

$\therefore \frac{5}{B} = \frac{1}{16} \quad \therefore B = 80 \text{ cm}^2.$

R.9 Um cone circular tem altura 36 cm e área da base 144 cm². Um plano β, paralelo ao plano da base, determina nesse cone uma secção de área 16 cm². Calcular a distância do plano β ao vértice do cone.

Resolução



Sendo:
b a área da secção,
d a distância do plano da secção ao vértice,
B a área da base,
D a altura do cone,

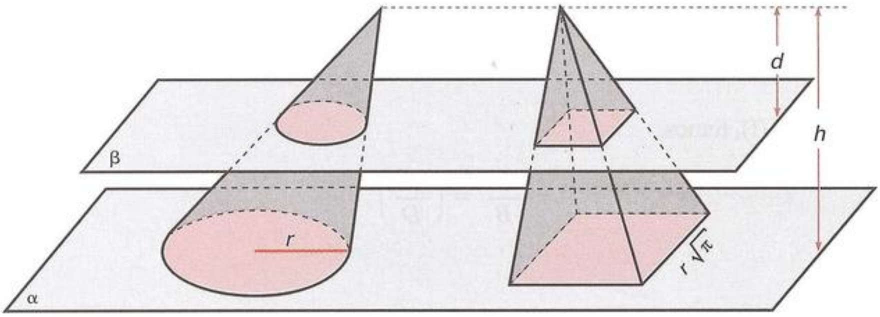
temos: $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{144} = \left(\frac{d}{36}\right)^2$

$\therefore \sqrt{\frac{16}{144}} = \frac{d}{36} \quad \therefore \frac{4}{12} = \frac{d}{36}$

$\therefore d = 12$ cm.

2.9. Volume do cone circular

Consideremos um cone circular de altura h com raio da base r e uma pirâmide com a mesma altura h cujo polígono da base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semi-espaço com origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α.



A área B da base do cone, $B = \pi r^2$, é igual à área B' da base da pirâmide, $B' = (r\sqrt{\pi})^2 = \pi r^2$.

Todo plano β, paralelo a α, que determina uma secção de área *b* no cone determina também uma secção de área *b'* na pirâmide tal que:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{h}\right)^2, \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \frac{b'}{B'} = \left(\frac{d}{h}\right)^2, \quad \text{(II)}$$

onde *d* é a distância de β ao vértice do cone (ou ao vértice da pirâmide).

Por (I) e (II) temos que: $\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'}$.

Como $B = B'$, concluímos que $b = b'$. Resumindo:

- o cone e a pirâmide têm bases equivalentes;
- todo plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, determinando neles secções equivalentes.

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os sólidos têm volumes iguais. Como o volume *V* da pirâmide é dado por:

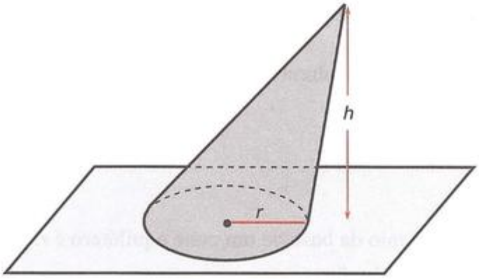
$$V = \frac{1}{3} B'h \;\therefore\; V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

concluímos o seguinte:

O volume *V* do cone circular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

$$V = \frac{1}{3} Bh \Rightarrow$$

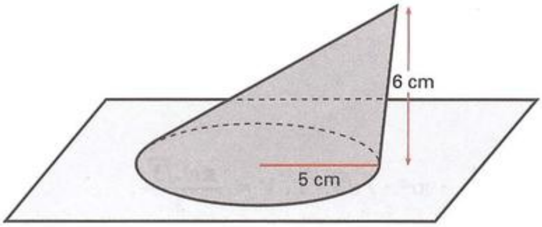
$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



Exercícios resolvidos

R.10 Calcular o volume de um cone circular de raio da base 5 cm e altura 6 cm.

Resolução



A área *B* da base do cone é:

$$B = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 25\pi \text{ cm}^2.$$

Logo, o volume *V* do cone é:

$$V = \frac{1}{3} Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 6 \text{ cm}^3$$

$$\therefore V = 50\pi \text{ cm}^3.$$

R.11 Um cone circular de vértice L e centro da base O é tal que o segmento de reta $\overline{LO}$ mede 12 cm e forma com o plano da base um ângulo de 60°. Calcular o volume desse cone, sabendo que o raio de sua base mede 4 cm.

Resolução

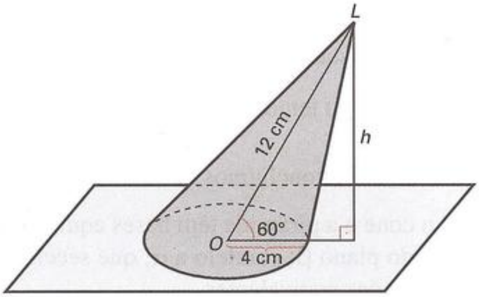
A medida h da altura é obtida por:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{12}$$

$$\therefore h = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

A área B da base é:

$$B = \pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 16\pi \text{ cm}^2.$$



Logo, o volume V do cone é: $V = \frac{1}{3}\,Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 6\sqrt{3} \text{ cm}^3 \therefore V = 32\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

R.12 Calcular o volume de um cone circular reto de altura 8 cm cujas geratrizes medem 10 cm.

Resolução

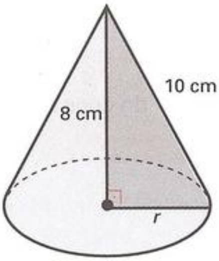
Sendo r a medida do raio da base, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$r^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 36$$

$$\therefore r = 6 \text{ cm.}$$

A área B da base é:

$$B = \pi \cdot 6^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 36\pi \text{ cm}^2.$$



Logo, o volume V do cone é:

$$V = \frac{1}{3}\,Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 8 \text{ cm}^3 \therefore V = 96\pi \text{ cm}^3.$$

R.13 O raio da base de um cone equilátero é r. Calcular o volume desse cone, em função de r.

Resolução

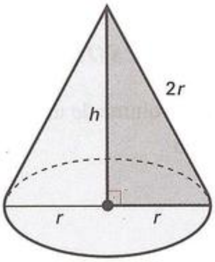
Uma geratriz do cone equilátero tem a mesma medida do diâmetro da base. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + r^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2$$

$$\therefore h = r\sqrt{3}\,.$$

A área B da base é:

$$B = \pi r^2.$$



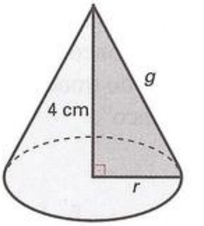
Logo, o volume V do cone é:

$$V = \frac{1}{3}\,Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \quad \therefore V = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}.$$

R.14 Calcular o volume de um cone circular reto de altura 4 cm cuja área lateral é 15π cm².

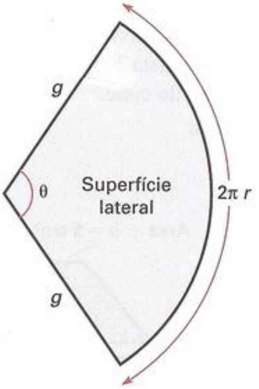
Resolução

Pelo teorema de Pitágoras:



$$g^2 = r^2 + 4^2. \quad \textbf{(I)}$$

Planifiquemos a superfície lateral do cone.
A área lateral A_ℓ é dada por:



$$A_\ell = \frac{2\pi rg}{2} \Rightarrow A_\ell = \pi rg$$

$$\therefore \pi rg = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$\therefore rg = 15 \Rightarrow g = \frac{15}{r}. \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos: $\left(\frac{15}{r}\right)^2 = r^2 + 4^2 \Rightarrow \frac{225}{r^2} = r^2 + 16 \therefore r^4 + 16r^2 - 225 = 0.$

Fazendo a mudança de variável: $r^2 = y$, obtemos:

$$y^2 + 16y - 225 = 0.$$
$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1(-225) = 1\,156.$$
$$\therefore y = \frac{-16 \pm \sqrt{1156}}{2 \cdot 1} = \frac{-16 \pm 34}{2} \Rightarrow y = 9 \text{ ou } y = -25.$$

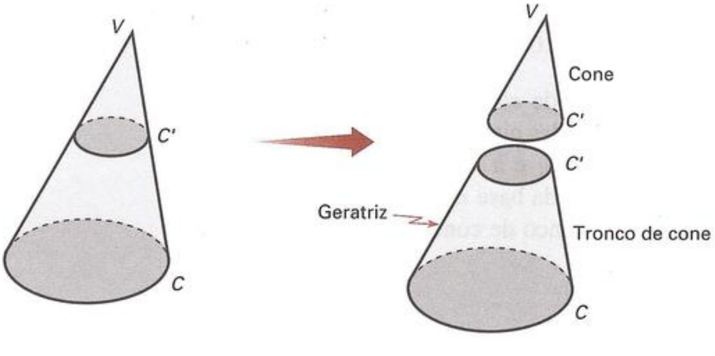
Retornemos à variável original: $r^2 = 9 \therefore r = 3$ cm ou $r^2 = -25$. **(não convém)**

A área B da base do cone é: $B = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 9\pi \text{ cm}^2$.

Logo, o volume V do cone é: $V = \frac{1}{3} Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 \text{ cm}^3 \therefore V = 12\pi \text{ cm}^3$.

3. Tronco de cone circular de bases paralelas

Consideremos um cone circular de vértice V e base C. Uma secção transversal C' desse cone separa-o em dois sólidos: um cone de vértice V e base C' e um **tronco de cone** de bases paralelas C e C'.

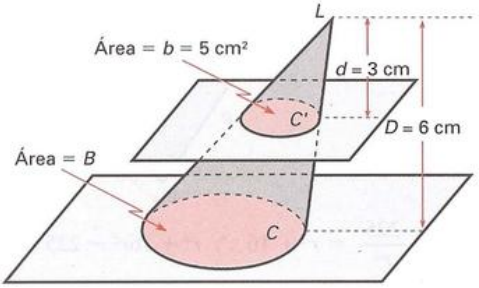


- A altura do tronco é a distância entre suas bases.
- A parte de cada geratriz do cone VC limitada pelos círculos C e C' é chamada "**geratriz** do tronco".
- A área lateral A_ℓ do tronco é a área da superfície obtida pela reunião de suas geratrizes.
- A área total A_t do tronco é a soma da área lateral com as áreas das bases.
- O volume do tronco é a diferença entre o volume do cone VC e o volume do cone VC'.
- A intersecção do tronco com um plano que passa pelos centros de suas bases é chamada de "**secção meridiana** do tronco".

Exercício resolvido

R.15 Uma secção transversal de um cone circular de altura 6 cm tem área igual a 5 cm² e o plano que contém essa secção dista 3 cm do vértice. Calcular o volume do tronco do cone limitado por essa secção transversal e pela base do cone.

Resolução



Temos que:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{B} = \left(\frac{3}{6}\right)^2$$

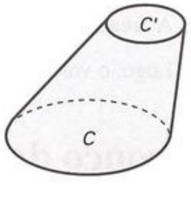
$$\therefore \frac{5}{B} = \frac{1}{4} \quad \therefore B = 20\ \text{cm}^2.$$

Sendo V o volume do cone LC e V' o volume do cone LC', calculamos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 6\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = 40\ \text{cm}^3 \text{ e } V' = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 3\ \text{cm}^3 \Rightarrow V' = 5\ \text{cm}^3.$$

O volume V_T do tronco é:

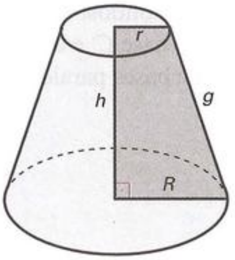
$$V_T = V - V' \Rightarrow V_T = 40\ \text{cm}^3 - 5\ \text{cm}^3 \therefore V_T = 35\ \text{cm}^3.$$



3.1. Tronco de cone circular reto de bases paralelas

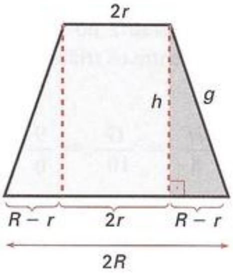
Um tronco de cone circular reto possui algumas propriedades que merecem destaque.

Sejam R, r, g e h as medidas do raio da base maior, do raio da base menor, da geratriz e da altura de um tronco de cone circular reto, respectivamente.



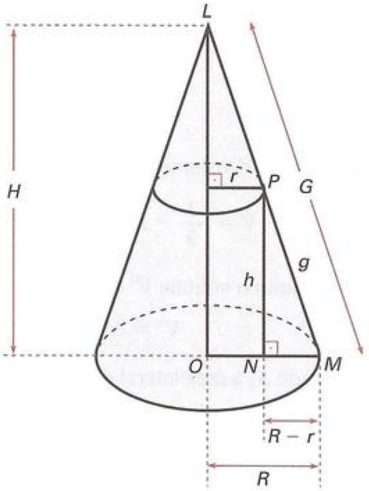
I. Uma secção meridiana desse tronco é um trapézio isósceles. Pelo teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2.$$



II. Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos um cone circular reto. Sendo H e G as medidas da altura e da geratriz desse cone, temos, da semelhança entre os triângulos LOM e PNM, que:

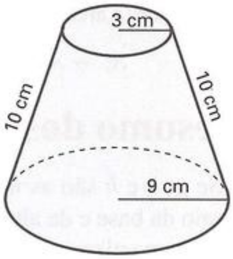
$$\frac{H}{h} = \frac{G}{g} = \frac{R}{R - r}.$$



Exercício resolvido

R.16 Seja um tronco de cone circular reto de bases paralelas tal que:

- 9 cm é a medida do raio da base maior do tronco;
- 3 cm é a medida do raio da base menor do tronco;
- 10 cm é a medida de cada geratriz do tronco.



Calcular:

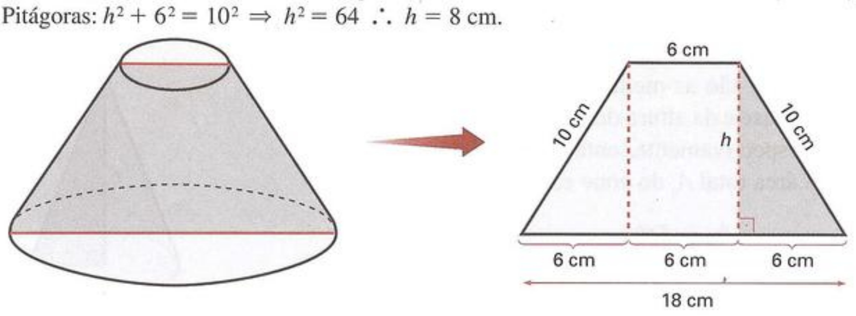
a) o volume do tronco;

b) a área lateral do tronco;

c) a área total do tronco.

Resolução

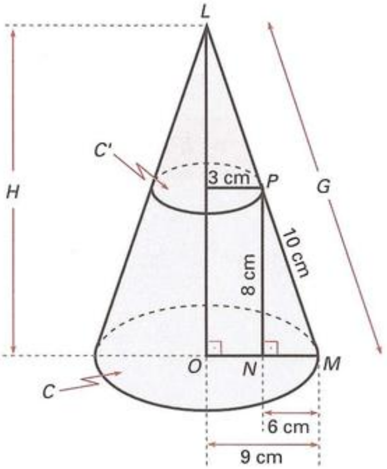
Uma secção meridiana desse tronco é um trapézio isósceles. Sendo h a altura do tronco, temos, pelo teorema de Pitágoras: $h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 64 \therefore h = 8$ cm.



Prolonguemos as geratrizes de modo a formar um cone circular reto. Sejam H e G as medidas da altura e da geratriz do cone, respectivamente. Da semelhança entre os triângulos LOM e PNM, temos que:

$$\frac{H}{8} = \frac{G}{10} = \frac{9}{6}$$

$$\therefore H = 12 \text{ cm e } G = 15 \text{ cm}.$$



a) Sendo V o volume do cone LC e V' o volume do cone LC', temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \text{ cm}^3 = 324\pi \text{ cm}^3 \text{ e } V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \text{ cm}^3 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

Portanto o volume V'' do tronco é:

$$V'' = V - V' \Rightarrow V'' = 324\pi \text{ cm}^3 - 12\pi \text{ cm}^3 \therefore V'' = 312\pi \text{ cm}^3.$$

b) Sendo A_ℓ a área lateral do cone LC e A'_ℓ a área lateral do cone LC', temos:

$$A_\ell = \pi \cdot 9 \cdot 15 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 135\pi \text{ cm}^2 \text{ e } A'_\ell = \pi \cdot 3 \cdot 5 \text{ cm}^2 \Rightarrow A'_\ell = 15\pi \text{ cm}^2.$$

A área lateral A''_ℓ do tronco é:

$$A''_\ell = A_\ell - A'_\ell \Rightarrow A''_\ell = 135\pi \text{ cm}^2 - 15\pi \text{ cm}^2 \therefore A''_\ell = 120\pi \text{ cm}^2.$$

c) A área b da base menor do tronco é $b = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow b = 9\pi \text{ cm}^2$.

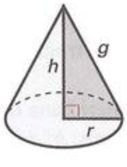
A área B da base maior do tronco é $B = \pi \cdot 9^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 81\pi \text{ cm}^2$.
Assim, a área total A''_t do tronco é:

$$A''_t = A''_\ell + B + b \Rightarrow A''_t = 120\pi \text{ cm}^2 + 81\pi \text{ cm}^2 + 9\pi \text{ cm}^2 \therefore A''_t = 210\pi \text{ cm}^2.$$

4. Resumo dos teoremas

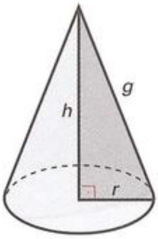
T.69 Se g, r e h são as medidas da geratriz, do raio da base e da altura do cone circular reto, respectivamente, então:

$$g^2 = r^2 + h^2.$$



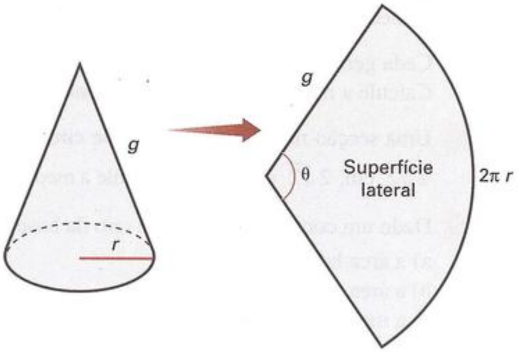
T.70 Se g, r e h são as medidas da geratriz, do raio da base e da altura de um cone circular reto, respectivamente, então a área lateral A_ℓ e a área total A_t do cone são:

$$A_\ell = \pi r g;$$
$$A_t = \pi r(g + r).$$



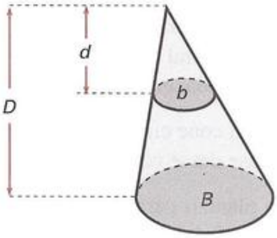
T.71 Se as medidas do raio da base e de uma geratriz de um cone circular reto são, respectivamente, r e g, então a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral desse cone é:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad.}$$



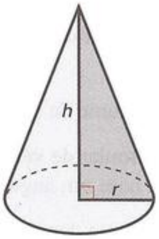
T.72 Se um cone circular de altura D possui base com área B, e uma secção transversal desse cone tem área b e o plano que contém essa secção está a uma distância d do vértice, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$



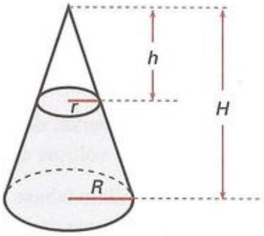
T.73 O volume de um cone circular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h.$$



T.74 Uma secção transversal de um cone circular reto de altura H, raio da base R e geratriz de medida G separa-o em dois sólidos: um cone de altura h, raio da base r e geratriz g; e um tronco de raio r da base menor e raio R da base maior. O volume V, a área lateral A_ℓ e a área total A_t desse tronco são:

$$V = \frac{\pi}{3}\,(R^2H - r^2h);$$
$$A_\ell = \pi(RG - rg);$$
$$A_t = \pi(RG - rg + R^2 + r^2).$$



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.8, B.10, B.11, B.12, B.16, B.18, B.21, C.2, C.3, C.5.

Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.7, B.9, B.13, B.14, B.15, B.17, B.19, B.20, C.1, C.4, C.6, C.7, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a medida da altura de um cone circular reto em que o raio da base mede 8 cm e uma geratriz mede 17 cm.

B.2 A medida da geratriz de um cone equilátero é 10 cm. Calcule a medida da altura desse cone.

B.3 Cada geratriz de um cone circular reto de raio da base 4 cm forma com o plano da base um ângulo de 30°. Calcule a medida da altura desse cone.

B.4 Uma secção meridiana de um cone circular reto é uma região limitada por um triângulo isósceles de lados $2\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm e 4 cm. Calcule a medida do ângulo que uma geratriz forma com o plano da base do cone.

B.5 Dado um cone circular reto de raio da base 5 cm e geratriz 13 cm, calcule:
a) a área lateral do cone;
b) a área total do cone;
c) a medida, em radianos, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

B.6 Um cone equilátero tem raio da base 3 cm. Calcule:
a) a área lateral do cone;
b) a área total do cone;
c) a medida, em graus, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

B.7 Em um cone circular reto de altura 6 cm, a área lateral é o dobro da área da base. Calcule a medida do raio da base desse cone.

B.8 Um plano α paralelo à base de um cone circular de altura 15 cm determina nesse cone uma secção de área 3 cm^2. Sabendo que a área da base do cone é 27 cm^2, calcule a distância do plano α ao vértice do cone.

B.9 As áreas da base e de uma secção transversal de um cone circular são 32 cm^2 e 4 cm^2, respectivamente. Sabendo que a altura do cone é 12 cm, calcule a distância entre o plano dessa secção transversal e a base do cone.

B.10 Calcule o volume de um cone circular em que a altura mede 9 cm e o raio da base mede 5 cm.

B.11 Um cone circular de vértice L e centro da base O é tal que o segmento de reta $\overline{LO}$ mede 10 m e forma com o plano da base um ângulo de 45°. Calcule o volume do cone, sabendo que o raio de sua base mede 3 m.

B.12 Qual é o volume de um cone circular reto de altura 4 dm cujas geratrizes medem 5 dm?

B.13 A altura de um cone equilátero mede 6 dm. Calcule o volume desse cone.

B.14 O volume de um cone circular reto de altura 8 cm é 96π cm^3. Obtenha a medida do raio da base desse cone.

B.15 O volume de um cone equilátero é $9\pi\sqrt{3}$ m^3. Calcule a medida de uma geratriz desse cone.

B.16 Determine o volume de um cone circular reto de altura 2 cm cuja área lateral é $\pi\sqrt{5}$ cm^2.

B.17 Calcule o volume de um cone circular reto de altura 3 dm cuja área lateral é $2\pi\sqrt{13}$ dm^2.

B.18 Uma secção transversal de um cone circular reto de altura 15 cm dista 5 cm do vértice e tem área igual a 4 cm^2. Obtenha o volume do tronco do cone limitado por essa secção transversal e pela base do cone.

B.19 Um plano α, paralelo à base de um cone circular de altura 20 cm e raio da base 4 cm, dista 5 cm de seu vértice. Calcule o volume do tronco do cone limitado pelo plano α e pela base do cone.

B.20 Considere um tronco de cone circular reto de bases paralelas tal que o raio da base maior, o raio da base menor e uma geratriz do tronco medem, respectivamente, 7 cm, 2 cm e 13 cm. Encontre o volume, a área lateral e a área total desse tronco.

B.21 Uma secção meridiana de um tronco de cone circular reto é um trapézio isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 2 cm e 8 cm. Determine o volume, a área lateral e a área total desse tronco.

Exercícios complementares

C.1 Uma geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de 45°. Se a área de uma secção meridiana desse cone é 36 cm^2, calcule o volume, a área lateral e a área total desse cone.

C.2 O ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de um cone de revolução mede 72°. Determine o volume desse cone, sabendo que o perímetro de sua base é 6π cm.

C.3 Um cone de revolução de raio da base 12 cm é equivalente a um cilindro de revolução de altura 12 cm e raio da base 8 cm. Qual é a área total do cone?

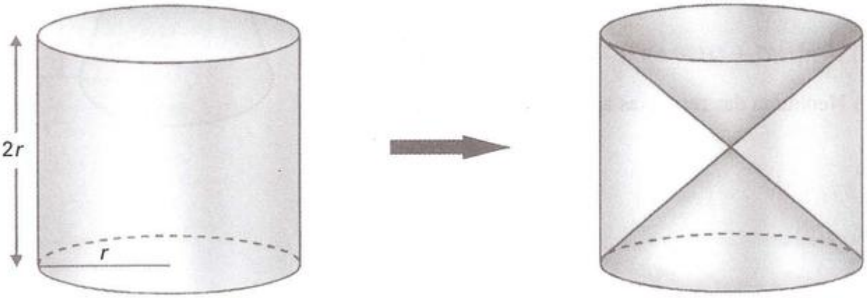
C.4 Um cone circular reto de altura 9 m é equivalente a uma pirâmide regular quadrangular de altura 4 m e aresta da base $12\sqrt{\pi}$ m. Obtenha a área da base do cone.

C.5 Um cone circular reto de altura 2 cm tem área lateral $8\pi\sqrt{3}$ cm². Calcule a medida do ângulo que uma geratriz forma com o eixo do cone.

C.6 O diâmetro da base de um cone circular reto mede 6 cm e a área da base é igual a $\frac{3}{5}$ da área lateral. Encontre o volume desse cone.

C.7 Uma secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo de área A. Calcule, em função de A, o volume desse cone.

C.8 Um cilindro de revolução tem raio da base r e altura $2r$. Retiram-se desse cilindro dois cones circulares tais que suas bases coincidem com as bases do cilindro e seus vértices coincidem com o centro do cilindro. Calcule o volume do sólido remanescente, em função de r.



C.9 Os raios das bases de um tronco de cone circular reto de bases paralelas medem R e $2R$ e uma geratriz desse tronco forma um ângulo de 45° com a base maior. Calcule, em função de R, o volume, a área lateral e a área total desse tronco.

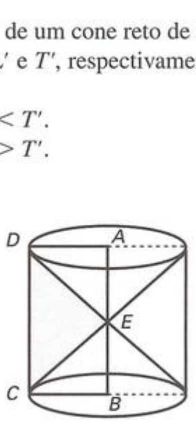
C.10 Uma geratriz de um tronco de cone circular reto de bases paralelas mede 6 cm e forma um ângulo de 60° com a base maior do tronco. Sabendo que o raio da base maior do tronco tem a mesma medida dessa geratriz, calcule o volume desse tronco.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Uma pessoa, ao tentar calcular as áreas lateral L e total T de um cone reto de revolução, trocou entre si as medidas do raio e da geratriz do cone, obtendo assim L' e T', respectivamente. Assinale a alternativa correta:

a) $L = L'$ e $T = T'$.
b) $L = L'$ e $T < T'$.
c) $L < L'$ e $T = T'$.
d) $L < L'$ e $T < T'$.
e) $L > L'$ e $T > T'$.

V.2 (Fuvest-SP) Na figura, $ABCD$ é um retângulo e $\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{EA} = r$. Ache, em função de r, o volume do sólido gerado pelo triângulo EDC quando o retângulo dá uma volta completa em torno de $\overline{AB}$.



V.3 (Fuvest-SP) Seja C um cone circular de altura h. Um plano paralelo à base dividirá o cone em duas partes de volumes iguais se sua distância ao plano da base for:

a) $\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{h}{2}$

c) $\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{(\sqrt[3]{2} - 1)\,h}{\sqrt[3]{2}}$

e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

V.4 (Fuvest-SP) Qual das expressões seguintes dá o volume do tronco de cone circular de bases paralelas em função de H, R, h, r?

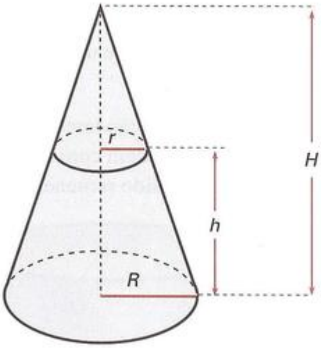
a) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H - h)r^2]$

b) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H + h)r^2]$

c) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H - h)r^2]$

d) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H + h)r^2]$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

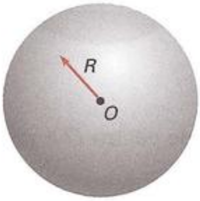


Capítulo 57

Esfera

1. Conceituação

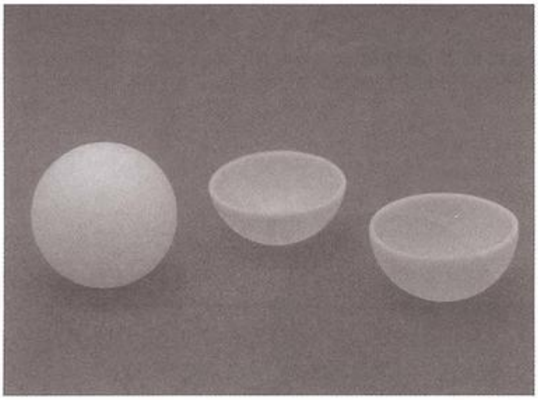
Consideremos um ponto O do espaço e uma medida $R (R > 0)$. Chama-se "**esfera** de centro O e raio R" o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores ou iguais** a R.



- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores** do que R é chamado de "**interior** da esfera".
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **iguais** a R é chamado de **superfície esférica**.
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **maiores** do que R é chamado de "**exterior** da esfera".

Não confunda **esfera** com **superfície esférica**. A **superfície esférica** é apenas a "casca" da esfera; a **esfera** é a reunião da superfície com o conjunto de pontos interiores.

Dois bons modelos de superfície esférica e esfera são uma bolinha de pingue-pongue e uma bola de bilhar, respectivamente. A bolinha de pingue-pongue é apenas uma "casca" ("superfície esférica"); já a bola de bilhar é maciça ("esfera").



LUIZ ANTONIO

A bola de pingue-pongue lembra uma fina "casca", sugerindo a idéia de uma superfície esférica.

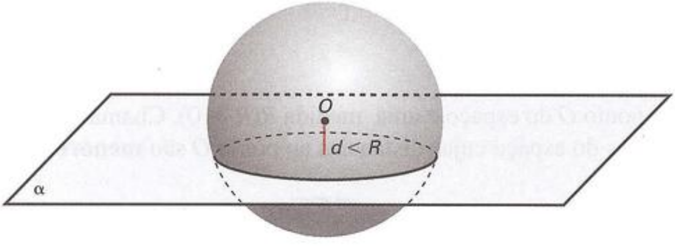
LUIZ ANTONIO

A bola de bilhar é maciça, sugerindo a idéia de uma esfera.

2. Posições relativas entre um plano e uma esfera

2.1. Plano secante a uma esfera

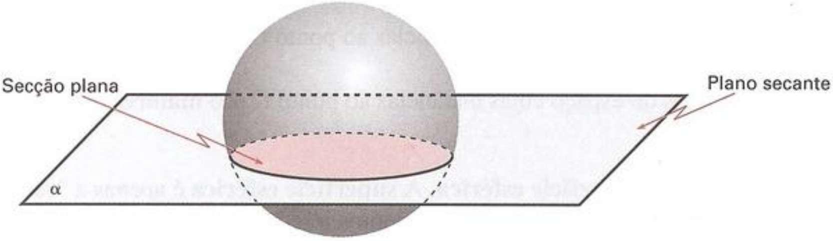
Um plano α é secante a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, ambos têm em comum infinitos pontos distintos.



Propriedades

I. Um plano é **secante** a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, a distância d de α ao ponto O é menor do que R, isto é, $d < R$.

II. A intersecção de uma esfera com um plano secante a ela é um círculo chamado de "**secção plana** da esfera".



Se o plano α passa pelo centro da esfera, então a secção plana é chamada de "**círculo máximo** da esfera".

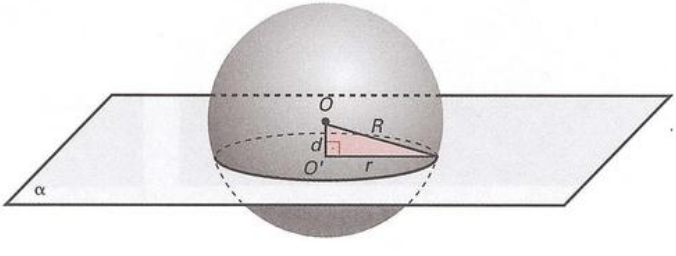
O teorema de Pitágoras e a secção plana da esfera

Seja α um plano secante a uma esfera de centro O e raio R tal que:

- a distância de α ao ponto O é igual a d ($d > 0$);
- a secção plana determinada por α na esfera é um círculo de centro O' e raio r.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

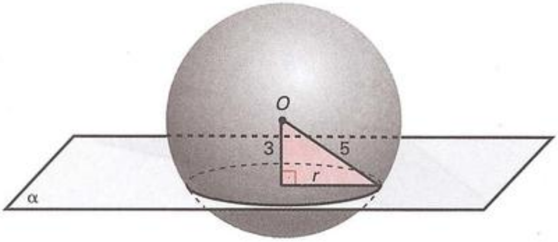


Exercício resolvido

R.1 Um plano α secciona uma esfera de raio 5 cm a 3 cm de seu centro. Calcular o raio da secção plana determinada por α nessa esfera.

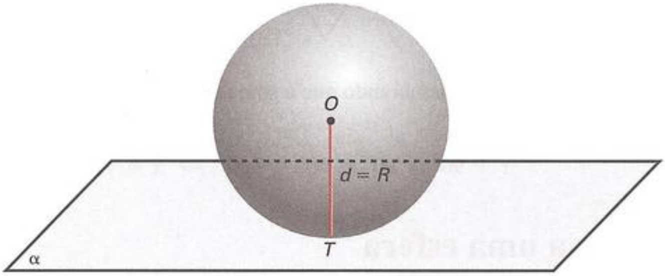
Resolução

Pelo teorema de Pitágoras: $r^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow r^2 = 16 \therefore r = 4$ cm.



2.2. Plano tangente a uma esfera

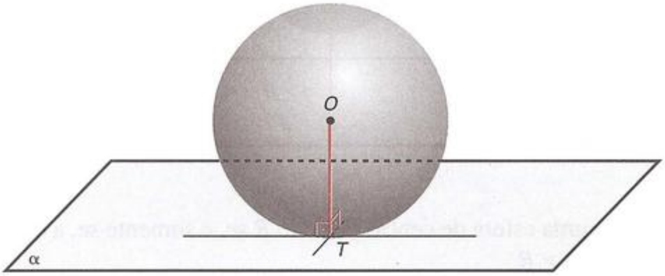
Um plano α é tangente a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, ambos têm em comum um único ponto T.



Propriedades

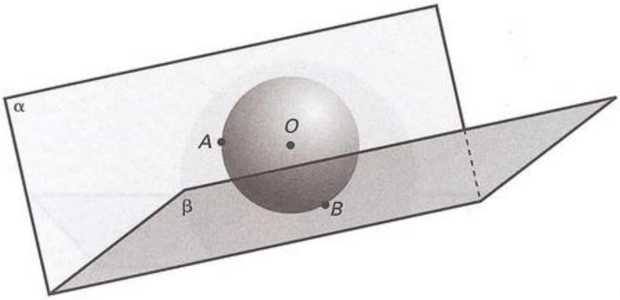
I. Um plano α é tangente a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, a distância d de α ao ponto O é igual a R, isto é, $d = R$.

II. A intersecção de uma esfera de centro O com um plano α, tangente a ela, é um conjunto formado por um único ponto T tal que $\overleftrightarrow{OT} \perp \alpha$.



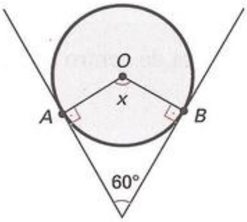
Exercício resolvido

R.2 Uma esfera de centro O tangencia as faces de um diedro de medida 60° nos pontos A e B, conforme figura. Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}B$?



Resolução

Os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares às faces α e β respectivamente. Um perfil da figura é:

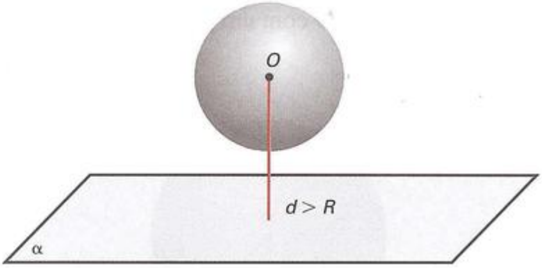


Sendo x a medida do ângulo $A\hat{O}B$, e lembrando que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero plano é 360°, temos que:

$$x + 90° + 90° + 60° = 360° \Rightarrow x = 120°.$$

2.3. Plano exterior a uma esfera

Um plano α é exterior a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, não existe ponto comum a ambos.



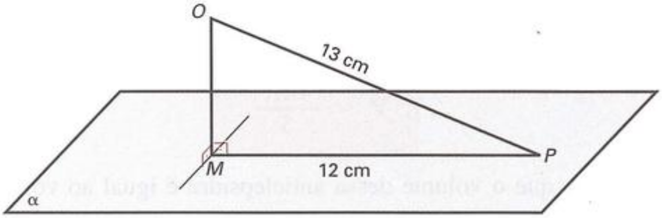
Propriedade

Um plano α é exterior a uma esfera de centro O e raio R se, e somente se, a distância d de α ao ponto O é maior do que R, isto é, $d > R$.

Exercício resolvido

R.3 O centro O de uma esfera de raio $R = 4$ cm dista 13 cm de um ponto P de um plano α. A projeção ortogonal de O sobre α é o ponto M tal que $PM = 12$ cm. Qual é a posição do plano em relação à esfera?

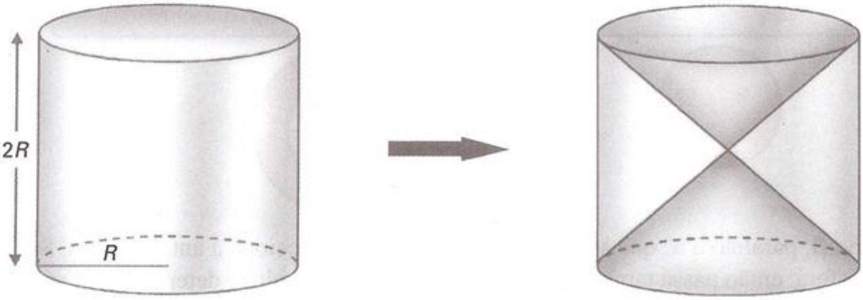
Resolução



Pelo teorema de Pitágoras: $(OM)^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow (OM)^2 = 25 \therefore OM = 5$ cm.
Como a distância OM do ponto O ao plano α é maior do que o raio R (5 cm > 4 cm), temos que o plano α é exterior à esfera.

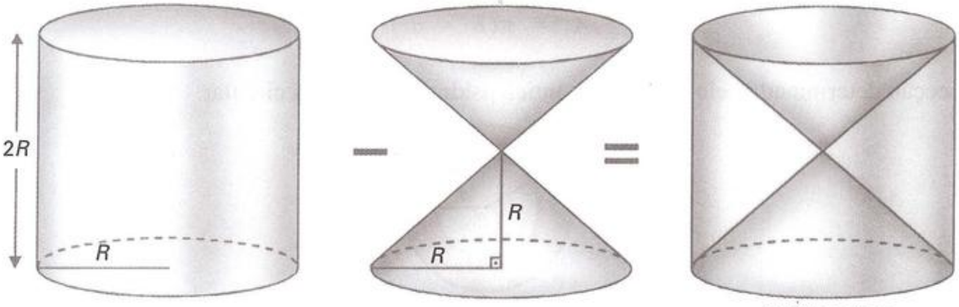
3. Volume da esfera

Para o cálculo do volume da esfera utilizamos um sólido auxiliar denominado **anticlepsidra**. Esse sólido é obtido retirando-se de um cilindro equilátero dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujos vértices coincidem com o centro do cilindro.



Anticlepsidra

Assim, o **volume da anticlepsidra** é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero de raio da base R e o volume do sólido formado por dois cones circulares retos de altura R e raio da base R.



Anticlepsidra

- O volume V_1 do cilindro é $V_1 = \pi R^2 \cdot 2R \therefore V_1 = 2\pi R^3$.
- O volume V_2 do sólido formado pelos dois cones é $V_2 = 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right) \therefore V_2 = \frac{2\pi R^3}{3}$.

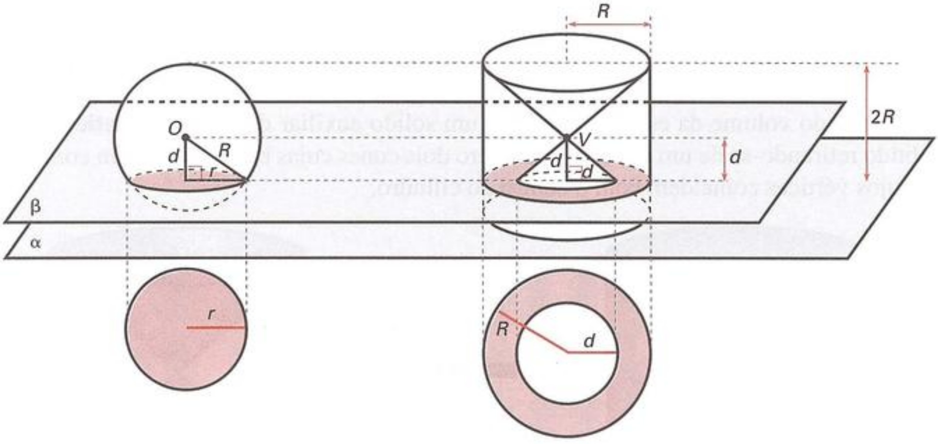
Logo, o volume V da anticlepsidra é:

$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\therefore \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Vamos demonstrar, agora, que o volume dessa anticlepsidra é igual ao volume de uma esfera de raio R.

Sejam uma esfera de raio R e uma anticlepsidra de raio da base R (e, portanto, altura $2R$). Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semi-espaço de origem num plano α de modo que a base da anticlepsidra esteja contida em α e que a esfera seja tangente a α:

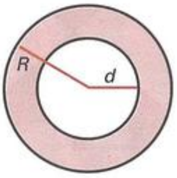


Todo plano β, paralelo a α, que secciona a esfera, também secciona a anticlepsidra. Se β passa pelo centro O da esfera, então passa também pelo centro V da anticlepsidra e determina em ambos os sólidos secções de áreas iguais a πR^2. Suponhamos que β seccione esses sólidos à distância d do centro da esfera (ou do centro da anticlepsidra). Temos então:

- se r é o raio da secção determinada na esfera, então a área A_1 dessa secção é $A_1 = \pi r^2$; pelo teorema de Pitágoras: $r^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$. Logo,

$$A_1 = \pi(R^2 - d^2).$$

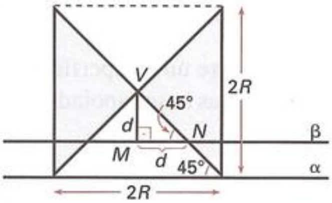
- A secção determinada pelo plano β na anticlepsidra é uma coroa circular.



Note que o raio interno dessa coroa é igual à distância d do plano β ao centro da anticlepsidra. Para compreender essa afirmação, considere uma secção meridiana da anticlepsidra.

O triângulo *VMN* é isósceles; logo, o raio interno da coroa circular é $MN = d$. Assim, a área A_2 da secção determinada por β na anticlepsidra é:

$$A_2 = \pi(R^2 - d^2).$$



Observe que $A_2 = A_1$.

Resumindo: todo plano que secciona a esfera também secciona a anticlepsidra, determinando em ambas secções de mesma área. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera tem o mesmo volume da anticlepsidra, ou seja:

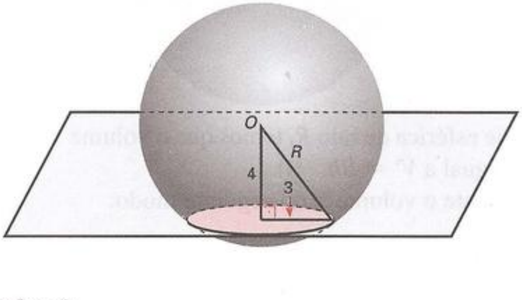
O volume *V* de uma esfera de raio *R* é dado por: $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Exercícios resolvidos

R.4 Calcular o volume de uma esfera de raio 2 cm.
Resolução

$$V = \frac{4}{3}\ \pi \cdot 2^3\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = \frac{32\pi}{3}\ \text{cm}^3.$$

R.5 Uma secção plana de uma esfera tem raio 3 cm e dista 4 cm do centro da esfera. Calcular o volume dessa esfera.
Resolução
Sendo *R* o raio da esfera, temos: $R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 25\ \therefore\ R = 5$ cm.

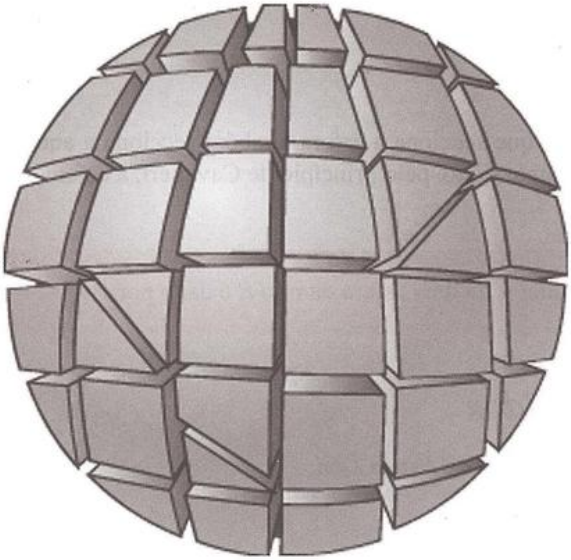


Logo, o volume *V* da esfera é:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3\ \text{cm}^3 \Rightarrow \quad V = \frac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3.$$

4. Área da superfície esférica

Suponha que sobre uma superfície esférica sejam construídos n pequenos prismas de mesma altura h tal que cada aresta das bases apoiadas sobre a superfície esférica seja aresta de duas e somente duas bases desses prismas.

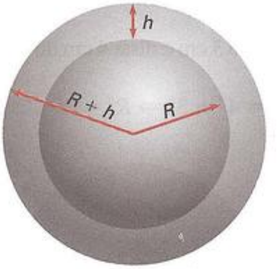


Sendo $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ as áreas das bases desses prismas, temos que a soma V' de seus volumes é:

$$V' = B_1h + B_2h + B_3h + \ldots + B_nh = (B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n)h.$$

A soma $B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n$ das áreas das bases é **aproximadamente** a área B da superfície esférica. Assim, o volume V' é **aproximadamente** igual a $V=Bh$, ou seja, o volume V é o produto da área B da superfície esférica pela altura h desses prismas.

Raciocinando de maneira análoga, consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro e raios R e $R + h$, com $h > 0$.



Sendo B a área da superfície esférica de raio R, temos que o volume V limitado pelas duas superfícies esféricas é aproximadamente igual a $V' = Bh$. **(I)**.

Podemos calcular precisamente o volume V do seguinte modo:

$$V = \frac{4\pi(R + h)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\therefore\ V = \frac{4\pi(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3)}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\therefore\ V = \frac{4\pi h}{3}\,(3R^2 + 3Rh + h^2). \quad \textbf{(II)}$$

Para h "tendendo" a zero, as expressões (I) e (II) "tendem" a se igualar, ou seja:

$$V = V' \Rightarrow \frac{4\pi h}{3}\,(3R^2 + 3Rh + h^2) = Bh \;\therefore\; \frac{4\pi}{3}\,(3R^2 + 3Rh + h^2) = B$$

Como h "tende" a zero, a soma $3Rh + h^2$ também "tende" a zero e, portanto, a área B "tende" a:

$$B = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 \;\therefore\; B = 4\pi R^2.$$

Desse modo, justificamos que:

A área A de uma superfície esférica de raio R é $A = 4\pi R^2$.

Exercícios resolvidos

R.6 Calcular a área da superfície de uma esfera de raio 3 cm.

Resolução

A área A da superfície esférica é:

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2$$
$$\therefore A = 36\pi \text{ cm}^2.$$

R.7 Calcular a área da superfície de uma esfera cujo volume V é $V = \frac{32\pi}{3}$ m³.

Resolução

O volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

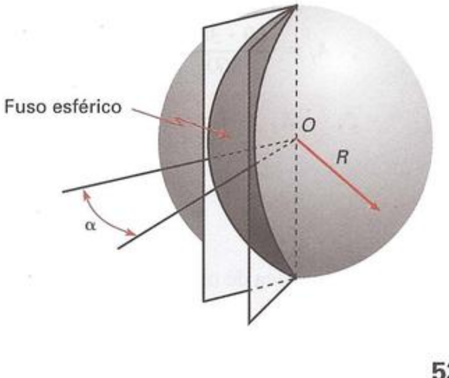
Logo, $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R^3 = 8 \;\therefore\; R = 2$ cm.

A área A da superfície é: $A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 2^2 \text{ cm}^2 \;\therefore\; A = 16\pi \text{ cm}^2$.

5. Fuso esférico

Consideremos uma superfície esférica de centro O e um diedro cuja aresta passa pelo centro O.

- A intersecção do diedro com a superfície esférica é chamada de **fuso esférico**.
- O raio R da superfície esférica é chamado de "**raio** do fuso esférico".
- A medida α do diedro é chamada de "**medida do ângulo diedro** do fuso esférico".

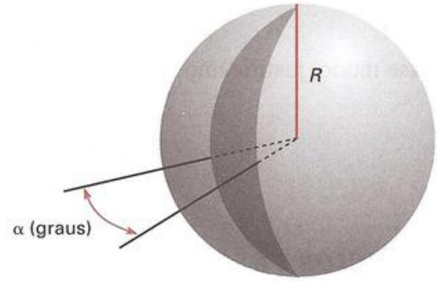


5.1. Área do fuso esférico

I. Se um fuso esférico tem raio R e a medida em graus de seu ângulo diedro é α, então sua área A_f é obtida pela seguinte regra de três:

Ângulo (graus)	**Área**
360	$4\pi R^2$
α	A_f

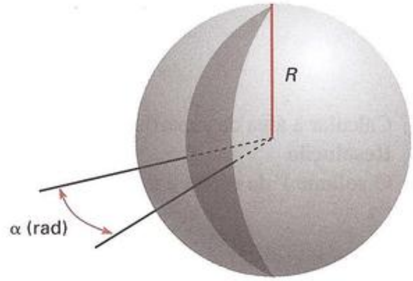
$$\therefore \quad A_f = \frac{4\pi R^2\alpha}{360}.$$



II. Sem um fuso esférico tem raio R e a medida em radianos de seu ângulo diedro é α, então sua área A_f é obtida pela regra de três:

Ângulo (rad)	**Área**
2π	$4\pi R^2$
α	A_f

$$\therefore \quad A_f = 2R^2\alpha.$$



Exercícios resolvidos

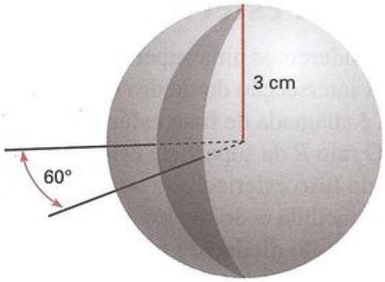
R.8 Calcular a área de um fuso esférico de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 60º.

Resolução

Ângulo (graus)	**Área (cm²)**
360	$4\pi \cdot 3^2$
60	A_f

$$\therefore A_f = \frac{60 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^2$$

$$\therefore \quad A_f = 6\pi\ \text{cm}^2.$$



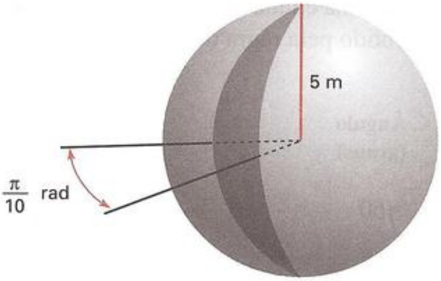
R.9 Calcular a área de um fuso esférico de raio 5 m cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{10}$ rad.

Resolução

Ângulo (rad)	Área (m^2)
2π	$4\pi \cdot 5^2$
$\dfrac{\pi}{10}$	A_f

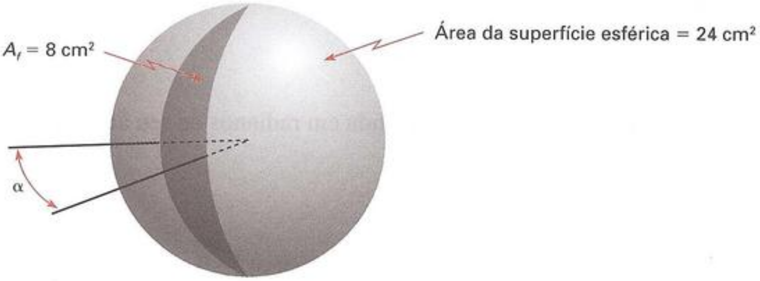
$$\therefore A_f = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 100\pi}{2\pi}\ m^2$$

$$\therefore A_f = 5\pi\ m^2.$$


5 m
$\frac{\pi}{10}$ rad

R.10 Um fuso esférico de área 8 cm^2 está contido em uma superfície esférica de área 24 cm^2. Calcular a medida, em graus, do ângulo diedro desse fuso.

Resolução

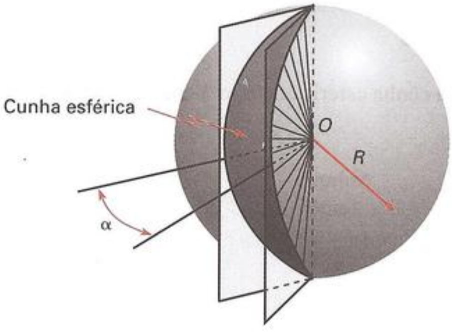

A_f = 8 cm^2
Área da superfície esférica = 24 cm^2
α

Ângulo (graus)	Área (cm^2)
360	24
α	8

$$\therefore \alpha = \frac{360° \cdot 8}{24} \quad \therefore \alpha = 120°.$$

6. Cunha esférica

Consideremos uma esfera de centro O e um diedro cuja aresta passa pelo centro O.


Cunha esférica
O
R
α

- A intersecção do diedro com a esfera é chamada de **cunha esférica**.
- O raio R da esfera é chamado de "**raio da cunha esférica**".
- A medida α do diedro é chamada de "**medida do ângulo diedro** da cunha esférica".

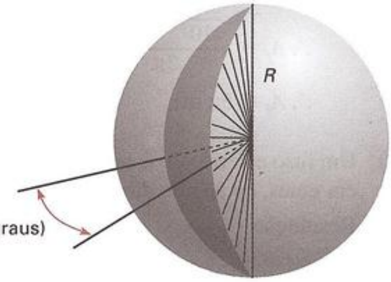
6.1. Volume da cunha esférica

I. Se uma cunha esférica tem raio R e a medida em graus de seu ângulo diedro é α, então seu volume V_c é obtido pela regra de três:

Ângulo (graus)	**Volume**
360	$\dfrac{4\pi R^3}{3}$
α	V_c

$$\therefore V_c = \frac{\dfrac{4\pi R^3}{3}\alpha}{360}$$

$$\therefore \quad V_c = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}.$$

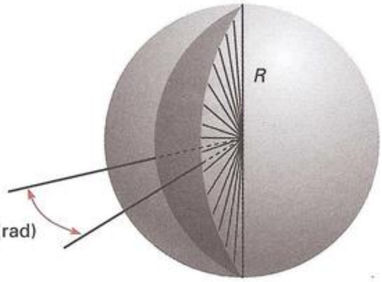


II. Se uma cunha esférica tem raio R e a medida em radianos de seu ângulo diedro é α, então seu volume V_c é obtido pela regra de três:

Ângulo (rad)	**Volume**
2π	$\dfrac{4\pi R^3}{3}$
α	V_c

$$\therefore V_c = \frac{\dfrac{4\pi R^3}{3}\alpha}{2\pi}$$

$$\therefore \quad V_c = \frac{2R^3\alpha}{3}.$$



Exercícios resolvidos

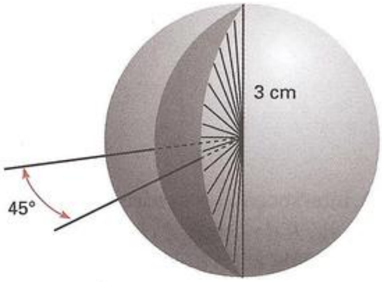
R.11 Calcular o volume de uma cunha esférica de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 45°.

Resolução

Ângulo (graus)	**Volume (cm³)**
360	$\dfrac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
45	V_c

$$\therefore V_c = \frac{45 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^3$$

$$\therefore V_c = \frac{9\pi}{2}\ \text{cm}^3.$$



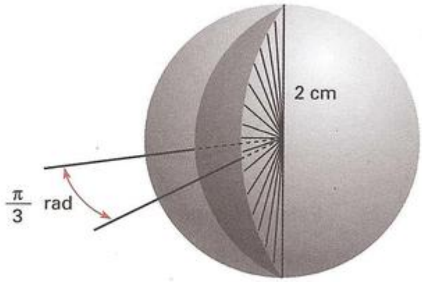
R.12 Calcular o volume de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{3}$ rad.

Resolução

Ângulo (rad)	**Volume (cm³)**
2π	$\frac{4\pi \cdot 2^3}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	V_c

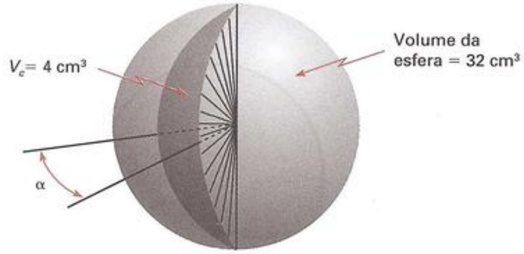
$$\therefore V_c = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{32\pi}{3}}{2\pi} \text{ cm}^3$$

$$\therefore V_c = \frac{16\pi}{9} \text{ cm}^3.$$



R.13 Uma cunha esférica de volume 4 cm³ é obtida de uma esfera de volume 32 cm³. Calcular a medida, em radianos, do ângulo diedro dessa cunha.

Resolução



Ângulo (rad)	**Volume (cm³)**
2π	32
α	4

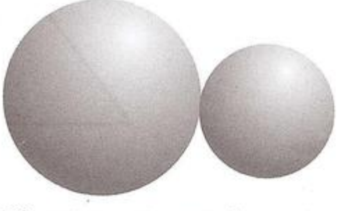
$$\therefore \alpha = \frac{2\pi \cdot 4}{32} \text{ rad}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

7. Esferas tangentes

Duas esferas são tangentes se, e somente se, suas superfícies têm um único ponto comum.

Esferas tangentes interiormente



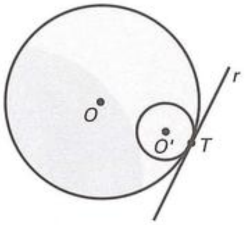
Esferas tangentes exteriormente

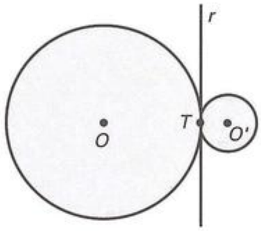
Propriedade

Se duas esferas de centros O e O' são tangentes num ponto T, então os pontos O, O' e T são colineares.

Demonstração

Consideremos um plano α que passa pelos pontos O, O' e T. Obtemos, assim, duas secções planas das esferas tangentes entre si:





Esferas tangentes interiormente

Esferas tangentes exteriormente

Sendo r a reta tangente comum às duas secções (círculos) temos que a reta $\overleftrightarrow{OT}$ é perpendicular a r e a reta $\overleftrightarrow{O'T}$ também é perpendicular a r. Como $\{O, O', T\}$ e r estão contidos no mesmo plano α temos que pelo ponto T passa uma única reta de α perpendicular a r. Logo, $\overleftrightarrow{OT} \equiv \overleftrightarrow{O'T}$ e, portanto, O, O' e T são pontos colineares.

(c.q.d.)

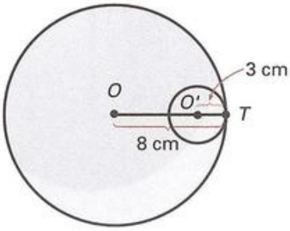
Exercícios resolvidos

R.14 Duas esferas de raios 8 cm e 3 cm são tangentes interiormente. Calcular a distância entre os centros dessas esferas.

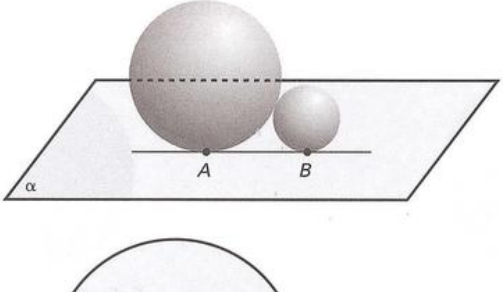
Resolução

Os centros O e O' das esferas e o ponto T de tangência são colineares. Logo, temos:

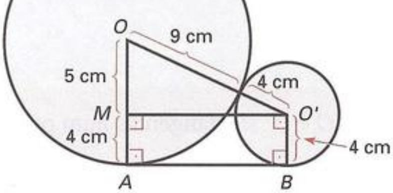
$$OO' = 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm}$$
$$\therefore OO' = 5 \text{ cm}.$$



R.15 Duas esferas tangentes exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A e B têm raios iguais a 9 cm e 4 cm. Calcular a distância entre os pontos A e B.



Resolução



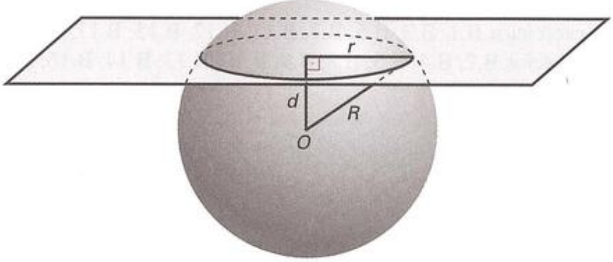
No triângulo $OO'M$, temos:

$$(MO')^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow (MO')^2 = 144 \quad \therefore \quad MO' = 12 \text{ cm}.$$

Como $MO' = AB$, temos que $AB = 12$ cm.

8. Resumo dos teoremas

T.75 Se um plano secante a uma esfera de raio R está a uma distância d do centro da esfera e determina nessa esfera uma secção de raio r, então: $R^2 = d^2 + r^2$.



T.76 O volume V de uma esfera de raio R é $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

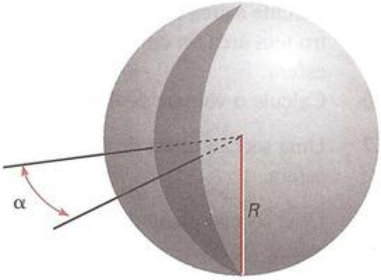
T.77 A área A de uma superfície esférica de raio R é $A = 4\pi R^2$.

T.78 A área A_f de um fuso esférico de raio R é diretamente proporcional à medida α de seu ângulo diedro:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{A_f}{4\pi R^2} \quad \textbf{(se } \alpha \textbf{ estiver em graus)}$$

ou

$$\frac{\alpha}{2\pi \text{ rad}} = \frac{A_f}{4\pi R^2} \quad \textbf{(se } \alpha \textbf{ estiver em radianos).}$$

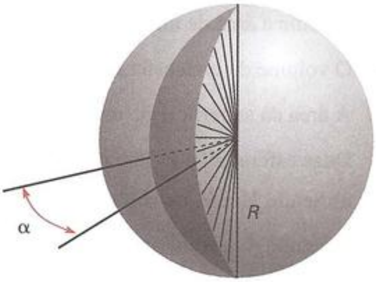


T.79 O volume V_c de uma cunha esférica de raio R é diretamente proporcional à medida α de seu ângulo diedro:

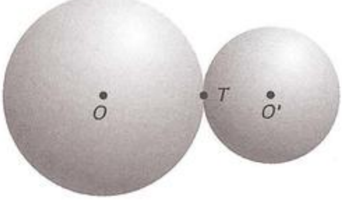
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{V_c}{\frac{4\pi R^3}{3}} \quad \textbf{(se } \alpha \textbf{ estiver em graus)}$$

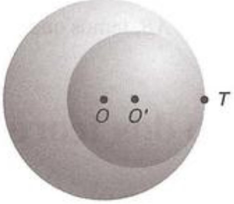
ou

$$\frac{\alpha}{2\pi \text{ rad}} = \frac{V_c}{\frac{4\pi R^3}{3}} \quad \textbf{(se } \alpha \textbf{ estiver em radianos).}$$



T.80 Se duas esferas de centros O e O' são tangentes num ponto T, então os pontos O, O' e T são colineares.





Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.6, B.7, B.11, B.12, B.15, B.17, B.19, C.1, C.2, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, B.8, B.9, B.10, B.13, B.14, B.16, B.18, B.20, C.3, C.5, C.6, C.7, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Um plano α secciona uma esfera de raio 13 cm a 5 cm de seu centro. Calcule o raio da secção plana determinada por α nessa esfera.

B.2 Uma secção plana de uma esfera é um círculo de raio 6 cm. Sabendo que o raio da esfera mede 10 cm, calcule a distância dessa secção ao centro da esfera.

B.3 A área de uma secção plana de uma esfera é $16\pi m^2$. A distância dessa secção ao centro da esfera é 3 m. Calcule a medida do raio da esfera.

B.4 Uma secção plana de uma esfera de raio 17 cm é um círculo de perímetro 30π cm. Calcule a distância dessa secção ao centro da esfera.

B.5 Calcule a área do círculo máximo de uma esfera, sabendo que uma secção plana que dista 2 cm de seu centro tem área 9π cm^2. **Lembrete:** o círculo máximo da esfera é uma secção plana que passa pelo centro da esfera.

B.6 Calcule o volume de uma esfera de raio 3 cm.

B.7 Uma secção plana de uma esfera tem raio 1 cm e dista 3 cm do centro da esfera. Calcule o volume dessa esfera.

B.8 Uma secção plana de uma esfera tem área 5π dm^2 e dista 2 dm do centro da esfera. Calcule o valor dessa esfera.

B.9 O volume de uma esfera é 36π cm^3. Qual é a área de uma secção plana que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro dessa esfera?

B.10 O volume de uma esfera de raio 2 cm é igual ao volume de um cone circular de altura 3 cm. Qual é a medida do raio da base do cone?

B.11 Calcule a área de uma superfície esférica de raio 3 cm.

B.12 O volume de uma esfera é $\frac{8\pi}{3}$ cm^3. Qual é a área da superfície dessa esfera?

B.13 A área da superfície de uma esfera é 100π m^2. Calcule o volume dessa esfera.

B.14 Duas esferas E_1 e E_2 têm raios R e r respectivamente.

a) Sendo V_1 e V_2 os volumes das esferas E_1 e E_2, respectivamente, calcule $\frac{V_1}{V_2}$.

b) Sendo A_1 e A_2 as áreas das superfícies das esferas E_1 e E_2, respectivamente, calcule $\frac{A_1}{A_2}$.

B.15 A área de uma superfície esférica é igual à área lateral de um cone circular reto de altura 8 cm e raio da base 6 cm. Calcule a medida do raio da superfície esférica.

B.16 A área da superfície de uma esfera é igual à área lateral de um cilindro circular reto de altura 9 cm e raio da base 2 cm. Calcule o volume dessa esfera.

B.17 Calcule a área de um fuso esférico de raio 5 m cujo ângulo diedro mede 80°.

B.18 Calcule a área de um fuso esférico de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{5}$ rad.

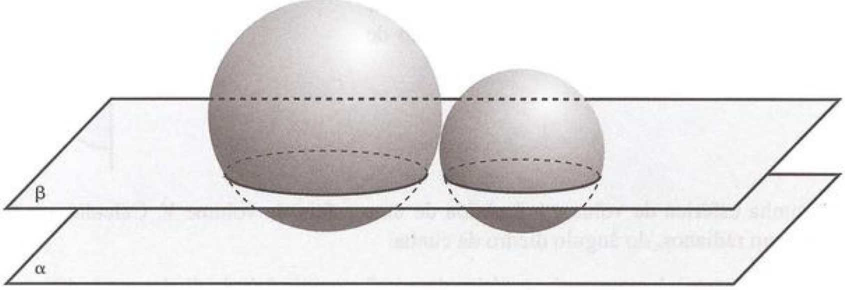
B.19 Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{3\pi}{8}$ rad.

B.20 Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 1 m cujo ângulo diedro mede 20°.

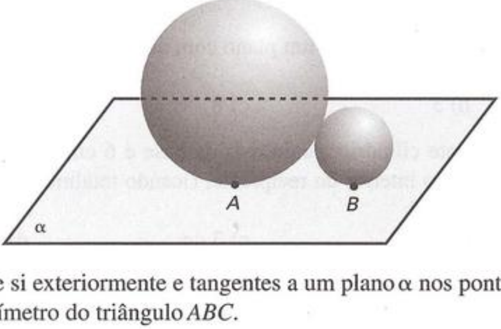
Exercícios complementares

C.1 Duas secções planas de uma esfera são paralelas e têm raios 6 cm e 8 cm. Calcule a distância entre essas secções, sabendo que o raio da esfera mede 10 cm.

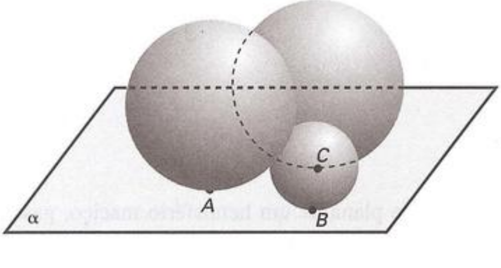
C.2 Duas esferas tangentes entre si exteriormente e tangentes a um plano α têm raios 13 cm e 8 cm. Um plano β, paralelo a α, passa pelo centro da esfera menor. Calcule a área da secção que o plano β determina na esfera maior.



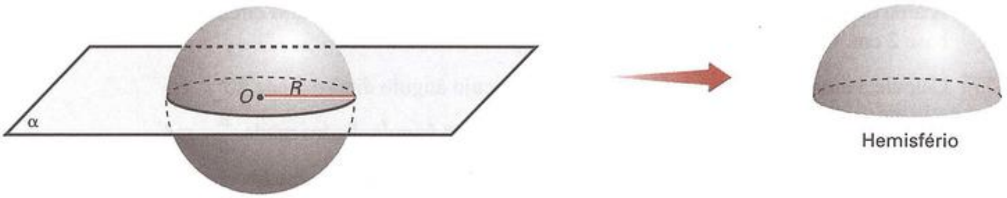
C.3 Duas esferas tangentes entre si exteriormente e tangentes a um plano α têm raios 8 cm e 2 cm. Calcule a distância entre os pontos de tangência A e B dessas esferas no plano α.



C.4 Três esferas tangentes entre si exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A, B e C têm raios 9 cm, 9 cm e 4 cm. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

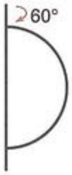


C.5 O círculo máximo de uma esfera separa-a em dois sólidos chamados de **hemisférios** ou **semi-esferas**. Calcule o volume e a área de um hemisfério de raio R.

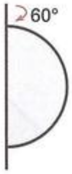


C.6 O círculo máximo de uma esfera tem área A. Calcule, em função de A, o volume dessa esfera e a área de sua superfície.

C.7 Qual é a área da superfície gerada pela rotação de 60° de uma semicircunferência de raio 3 cm em torno de seu diâmetro?



C.8 Qual é o volume do sólido gerado pela rotação de 60° de um semicírculo de raio 3 cm em torno de seu diâmetro?



C.9 Uma cunha esférica de volume v é obtida de uma esfera de volume V. Calcule, em função de v e V, a medida, em radianos, do ângulo diedro da cunha.

C.10 Calcule a área total de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede 40°.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) A área da intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é 144π. A distância do plano ao centro da bola é:

a) 1 b) 5 c) 8 d) 12 e) 25

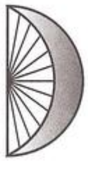
V.2 (Fuvest-SP) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base é 6 cm, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é:

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

V.3 (Cesgranrio) Uma laranja pode ser considerada como uma esfera de raio R, composta por doze gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

a) $2\pi R^2$ c) $\frac{3\pi R^2}{4}$ e) $\frac{4\pi R^2}{3}$

b) $4\pi R^2$ d) $3\pi R^2$



V.4 (Fuvest-SP) Para pintar a base plana de um hemisfério maciço, gastamos doze galões de tinta. Quantos galões serão necessários para pintar toda a parte externa do hemisfério?

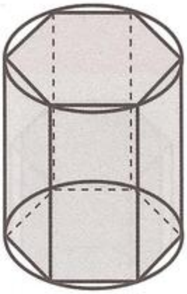
Capítulo 58

Inscrição e circunscrição de sólidos

1. Prisma e cilindro circular

1.1. Prisma inscrito em cilindro circular

Um prisma está **inscrito** em um cilindro circular se, e somente se, seus vértices pertencem às circunferências das bases do cilindro.



Conseqüências

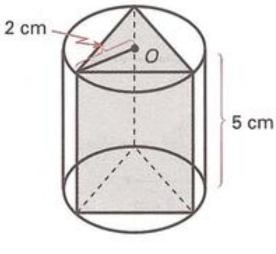
1ª) A altura do cilindro é igual à altura do prisma.

2ª) O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma.

3ª) O cilindro está **circunscrito** ao prisma.

Exercício resolvido

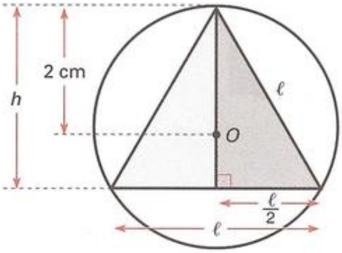
R.1 Calcular o volume de um prisma regular triangular inscrito em um cilindro circular de altura 5 cm e raio da base 2 cm.



Resolução

O raio da base do cilindro é o raio de uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero. Esse raio é $\frac{2}{3}$ da altura h do triângulo equilátero:

$$2 = \frac{2h}{3} \quad \therefore \quad h = 3 \text{ cm}.$$



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = 9$$

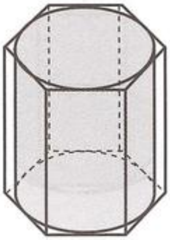
$$\therefore \frac{3\ell^2}{4} = 9 \quad \therefore \ell^2 = 12 \quad \therefore \ell = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Assim, a área B da base do prisma é $B = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2}$ cm² $\Rightarrow B = 3\sqrt{3}$ cm².

Logo, o volume V do prisma é $V = BH \Rightarrow V = 3\sqrt{3} \cdot 5$ cm³ $\therefore V = 15\sqrt{3}$ cm³.

1.2. Cilindro circular inscrito em prisma

Um cilindro circular está **inscrito** em um prisma se, e somente se, suas bases são tangentes às arestas das bases do prisma.

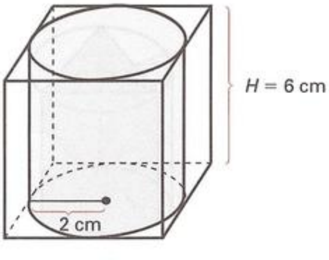


Conseqüências

1ª) A altura do cilindro é igual à altura do prisma.
2ª) O raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma.
3ª) O prisma está **circunscrito** ao cilindro.

Exercício resolvido

R.2 Um prisma regular quadrangular está circunscrito a um cilindro circular de altura 6 cm e raio da base 2 cm. Calcular a área total do prisma.

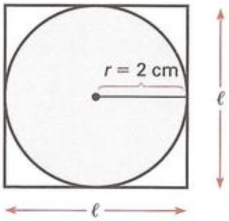


Resolução

O raio da base do cilindro é o apótema (raio da circunferência inscrita) da base do prisma regular. O apótema r do quadrado mede metade de seu lado ℓ; logo, $\ell = 4$ cm.

Assim, a área B de cada base do prisma é:

$$B = 4^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 16 \text{ cm}^2.$$

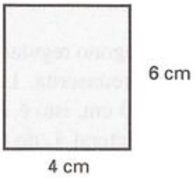


Cada face lateral do prisma é retangular de lados 4 cm e 6 cm. Sendo A_f a área de cada face, temos:

$$A_f = 4 \cdot 6 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_f = 24 \text{ cm}^2.$$

Assim, a área lateral A_ℓ do prisma é:

$$A_\ell = 4A_f \Rightarrow A_\ell = 96 \text{ cm}^2.$$



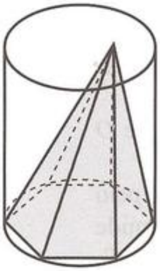
Portanto, a área total A_t do prisma é:

$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 96 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 16 \text{ cm}^2$$
$$\therefore A_t = 128 \text{ cm}^2.$$

2. Pirâmide e cilindro circular

2.1. Pirâmide inscrita em cilindro circular

Uma pirâmide está **inscrita** em um cilindro circular se, e somente se, os vértices da base da pirâmide pertencem à circunferência de uma base do cilindro e o vértice da pirâmide pertence à outra base do cilindro.



Conseqüências

1ª) A altura da pirâmide é igual à altura do cilindro.

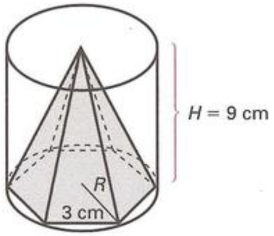
2ª) O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

3ª) O cilindro está **circunscrito** à pirâmide.

Exercício resolvido

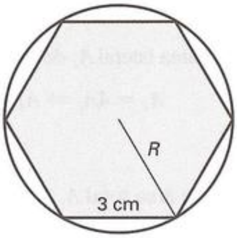
R.3 Uma pirâmide regular hexagonal de altura 9 cm e aresta da base 3 cm está inscrita em um cilindro circular reto. Calcular a área lateral do cilindro.

Resolução



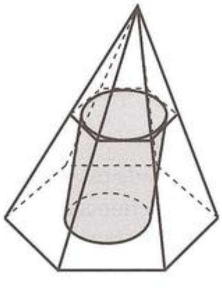
O lado do hexágono regular é igual ao raio R da circunferência circunscrita. Logo, o raio da base do cilindro mede 3 cm, isto é, $R = 3$ cm.
Assim, a área lateral A_ℓ do cilindro é:

$$A_\ell = 2\pi RH \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 9 \text{ cm}^2$$
$$\therefore A_\ell = 54\pi \text{ cm}^2.$$

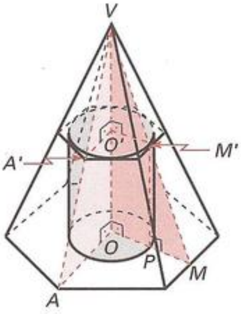


2.2. Cilindro circular inscrito em pirâmide

Um cilindro circular está **inscrito** em uma pirâmide se, e somente se, uma base do cilindro está contida na base da pirâmide e a outra base do cilindro está inscrita em uma secção transversal da pirâmide.



Conseqüências



1ª) Se a pirâmide é regular e o cilindro circular é reto:

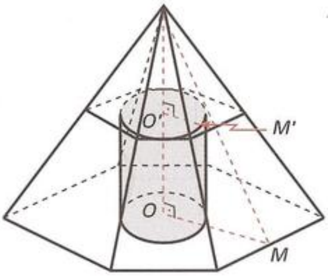
- o vértice V da pirâmide e os centros O' e O das bases do cilindro são colineares.
- um plano que passa pelos pontos V e O e pelo ponto médio M de uma aresta da base da pirâmide determina os triângulos semelhantes $VO'M'$, VOM e $M'PM$.
- um plano que passa pelos pontos V e O e por um vértice A da base da pirâmide determina os triângulos semelhantes $VO'A'$ e VOA.

2ª) A pirâmide está **circunscrita** ao cilindro.

Exercício resolvido

R.4 Um cilindro circular reto de altura 10 cm e raio da base 3 cm está inscrito em uma pirâmide regular hexagonal de altura 12 cm. Calcular a medida do apótema da base da pirâmide.

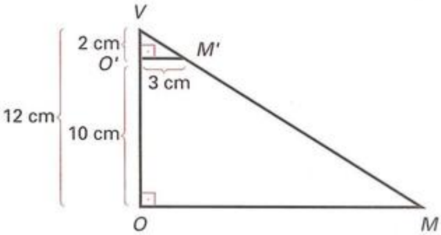
Resolução



Sendo M o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, temos que $\overline{OM}$ é o apótema da base da pirâmide. Da semelhança entre os triângulos $VO'M'$ e VOM, temos:

$$\frac{12}{2} = \frac{OM}{3}$$

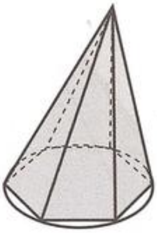
$\therefore OM = 18$ cm.



3. Pirâmide e cone circular

3.1. Pirâmide inscrita em cone circular

Uma pirâmide está **inscrita** em um cone circular se, e somente se, seu vértice coincide com o vértice do cone e os vértices de sua base pertencem à circunferência da base do cone.



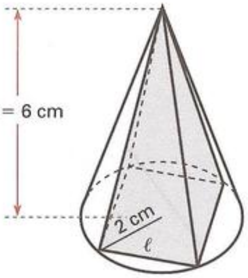
Conseqüências

1ª) A altura da pirâmide é igual à altura do cone.
2ª) O raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.
3ª) O cone está **circunscrito** à pirâmide.

Exercício resolvido

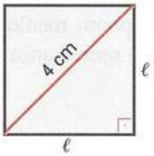
R.5 Uma pirâmide regular quadrangular de altura 6 cm está inscrita em um cone circular de raio da base 2 cm. Calcule o volume da pirâmide.

Resolução



O diâmetro da base do cone é a diagonal do quadrado da base da pirâmide:

$\ell^2 + \ell^2 = 4^2 \Rightarrow 2\ell^2 = 16$
$\therefore \ell^2 = 8$
$\therefore \ell = 2\sqrt{2}$ cm.

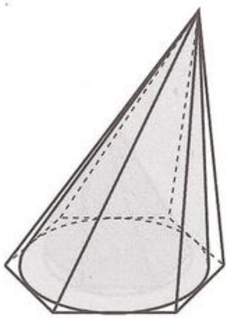


A área B da base da pirâmide é: $B = \ell^2 \ \therefore B = 8$ cm².
Portanto o volume V da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3} BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 \text{ cm}^3 \ \therefore \ V = 16 \text{ cm}^3.$$

3.2. Cone circular inscrito em pirâmide

Um cone circular está **inscrito** em uma pirâmide se, e somente se, seu vértice coincide com o vértice da pirâmide e a circunferência de sua base é tangente às arestas da base da pirâmide.



Conseqüências

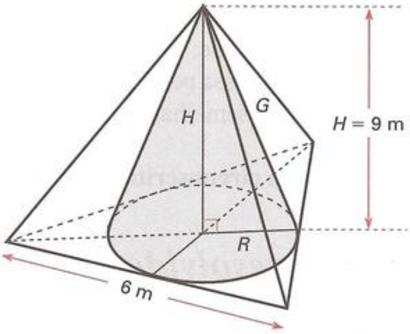
1ª) A altura do cone é igual à altura da pirâmide.
2ª) O raio da base do cone é o raio da circunferência inscrita na base da pirâmide.
3ª) A pirâmide está **circunscrita** ao cone.

Exercício resolvido

R.6 Um cone circular reto de altura 9 m está inscrito em uma pirâmide regular triangular de aresta da base 6 m. Calcular a medida de uma geratriz do cone.

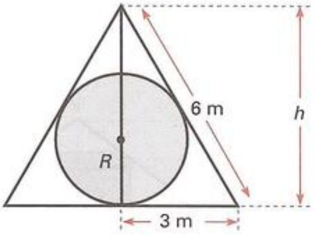
Resolução

Sendo G, R e H as medidas da geratriz, raio da base e altura do cone, respectivamente, temos:



$$G^2 = R^2 + H^2 \ \therefore\ G^2 = R^2 + 81. \quad \text{(I)}$$

Sendo h a altura do triângulo equilátero da base da pirâmide, temos:



$$h^2 + 3^2 = 6^2 \ \therefore h = 3\sqrt{3} \text{ m}.$$

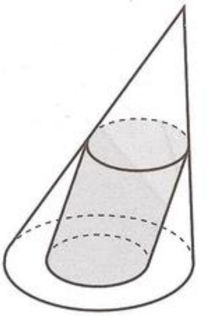
O raio R da circunferência inscrita no triângulo equilátero é $R = \dfrac{h}{3} \ \therefore\ R = \sqrt{3}$ m. **(II)**

Substituindo (II) em (I), obtemos: $G^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 81 \ \therefore \quad G = 2\sqrt{21}$ m.

4. Cilindro circular e cone circular

4.1. Cilindro circular inscrito em um cone circular

Um cilindro circular está **inscrito** em um cone circular se, e somente se, uma base do cilindro está contida na base do cone e a circunferência da outra base do cilindro está contida na superfície lateral do cone.

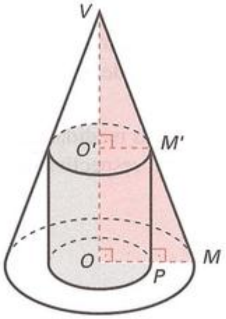


Conseqüências

1ª) Se o cilindro circular é reto e o cone circular também é reto:

- o vértice V do cone e os centros O' e O das bases do cilindro são pontos alinhados;
- o centro O da base do cilindro coincide com o centro da base do cone;
- um plano que passa pelos pontos V e O determina os triângulos semelhantes: $VO'M'$, VOM e $M'PM$.

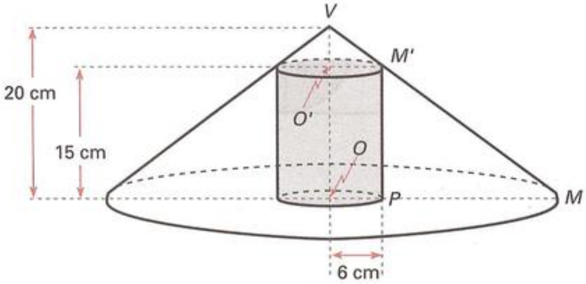
2ª) O cone está **circunscrito** ao cilindro.



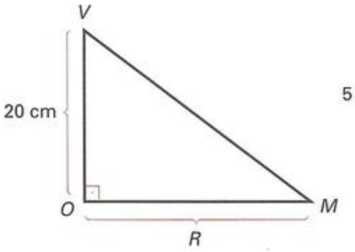
Exercício resolvido

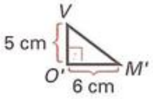
R.7 Um cilindro circular reto de altura 15 cm e raio da base 6 cm está inscrito em um cone circular reto de altura 20 cm. Calcular a medida do raio da base do cone.

Resolução



Os triângulos VOM e $VO'M'$ são semelhantes:

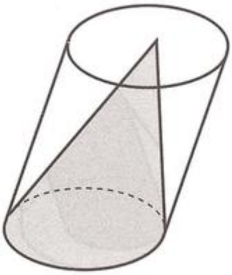




Sendo R o raio da base do cone, temos $\frac{R}{6} = \frac{20}{5} \therefore R = 24$ cm.

4.2. Cone circular inscrito em cilindro circular

Um cone circular está **inscrito** em um cilindro circular se, e somente se, a base do cone coincide com uma base do cilindro e o vértice do cone pertence à outra base do cilindro.



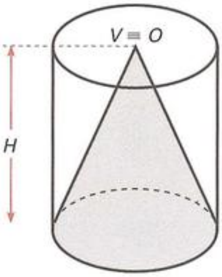
Conseqüências

1ª) A altura do cone é igual à altura do cilindro.

2ª) Se o cone circular é reto e o cilindro circular também é reto:

- o vértice do cone coincide com o centro de uma base do cilindro;
- a medida de uma geratriz do cilindro é igual à altura do cone.

3ª) O cilindro está **circunscrito** ao cone.



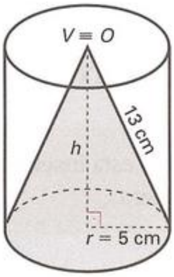
Exercício resolvido

R.8 Um cone circular reto de geratriz 13 cm está inscrito em um cilindro circular reto cujo raio da base mede 5 cm. Calcular a área lateral do cilindro.

Resolução

Por Pitágoras, temos:

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144$$
$$\therefore\ h = 12 \text{ cm}.$$



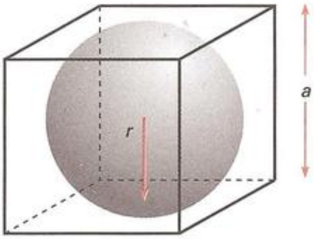
A altura h do cone é igual à altura do cilindro. Logo, a área lateral A_ℓ do cilindro é:

$$A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 \text{ cm}^2 \quad \therefore\ A_\ell = 120\pi \text{ cm}^2.$$

5. Esfera e cubo

5.1. Esfera inscrita em cubo

Uma esfera está **inscrita** em um cubo se, e somente se, é tangente às faces do cubo.



Conseqüências

1ª) As diagonais do cubo passam pelo centro da esfera.

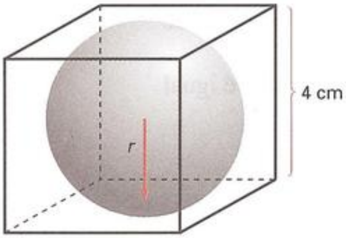
2ª) O diâmetro $2r$ da esfera tem a mesma medida a da aresta do cubo: $2r = a \Rightarrow \quad r = \dfrac{a}{2}$.

3ª) O cubo está **circunscrito** à esfera.

Exercício resolvido

R.9 Calcular o volume de uma esfera inscrita em um cubo de aresta 4 cm.

Resolução

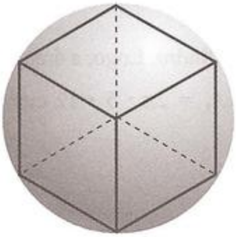


Sendo r o raio da esfera, temos: $r = \frac{4}{2}$ cm $\Rightarrow r = 2$ cm.

O volume V da esfera é $V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3}$ cm³ $\therefore V = \frac{32\pi}{3}$ cm³.

5.2. Cubo inscrito em esfera

Um cubo está **inscrito** em uma esfera se, e somente se, seus vértices pertencem à superfície da esfera.

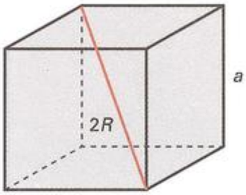


Conseqüências

1ª) As diagonais do cubo passam pelo centro da esfera. Portanto a medida $2R$ do diâmetro da esfera é igual à medida da diagonal do cubo. Sendo a a medida da aresta do cubo, sua diagonal mede $a\sqrt{3}$.

Assim, o raio R da esfera **circunscrita** ao cubo é

dado por: $2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



2ª) A esfera está **circunscrita** ao cubo.

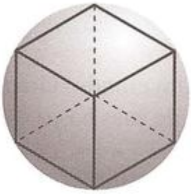
Exercício resolvido

R.10 Um cubo está inscrito em uma esfera de raio 3 cm. Calcular o volume do cubo.

Resolução

Sendo a a medida da aresta do cubo, sua diagonal mede $a\sqrt{3}$.

O raio R da esfera é:



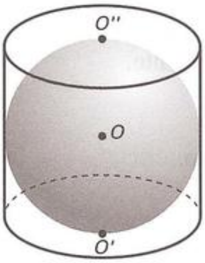
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \; a = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \therefore \; a = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

O volume V do cubo é $V = a^3 \Rightarrow V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 \text{ cm}^3 \;\; \therefore \; V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

6. Esfera e cilindro circular reto

6.1. Esfera inscrita em cilindro circular reto

Uma esfera está **inscrita** em um cilindro circular reto se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e as bases do cilindro.



Conseqüências

1ª) A esfera tangencia as bases em seus centros O' e O''.

2ª) O centro O da esfera e os centros O' e O'' das bases são pontos colineares.

3ª) A medida da geratriz do cilindro é igual ao diâmetro da esfera.

4ª) A medida da geratriz do cilindro é igual ao diâmetro da base. Logo, o cilindro é equilátero.

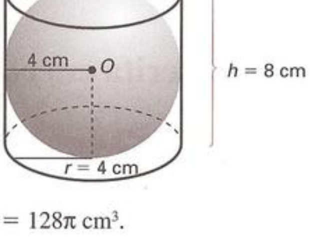
5ª) O cilindro está **circunscrito** à esfera.

Exercício resolvido

R.11 Uma esfera de raio 4 cm está inscrita em um cilindro circular reto. Calcular o volume do cilindro.

Resolução

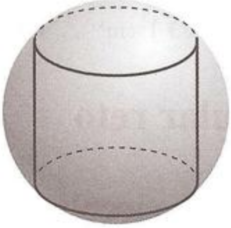
Um cilindro circular reto circunscrito a uma esfera é equilátero. Logo, a medida da geratriz é igual ao diâmetro da base.



O volume V do cilindro é $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 \;\; \therefore \; V = 128\pi \text{ cm}^3$.

6.2. Cilindro circular reto inscrito em esfera

Um cilindro circular reto está **inscrito** em uma esfera se, e somente se, as circunferências de suas bases estão contidas na superfície da esfera.



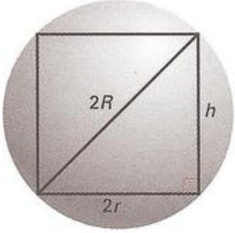
Conseqüências

1ª) O centro da esfera e os centros das bases do cilindro são pontos colineares.

2ª) O diâmetro da esfera é diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Sendo h e $2r$ a altura e o diâmetro da base do cilindro, respectivamente, e $2R$, o diâmetro da esfera, temos:

$$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2.$$

3ª) A esfera está **circunscrita** ao cilindro.



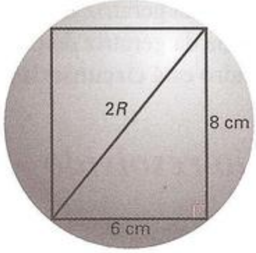
Exercício resolvido

R.12 Um cilindro circular reto de altura 8 cm e raio da base 3 cm está inscrito em uma esfera. Determinar a medida do raio dessa esfera.

Resolução

O diâmetro $2R$ da esfera é diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

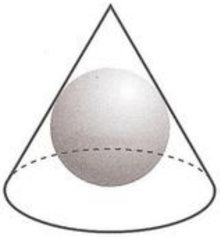
$$(2R)^2 = 8^2 + 6^2 \therefore 4R^2 = 100$$
$$\therefore R^2 = 25 \therefore R = 5 \text{ cm}.$$



7. Esfera e cone circular reto

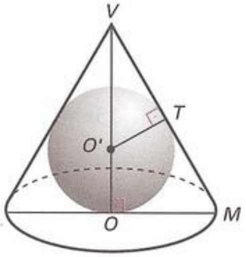
7.1. Esfera inscrita em cone circular reto

Uma esfera está **inscrita** em um cone circular reto se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e a base do cone.

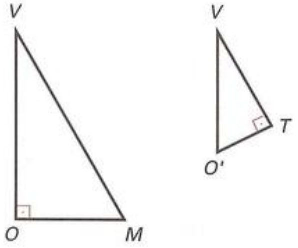


Conseqüências

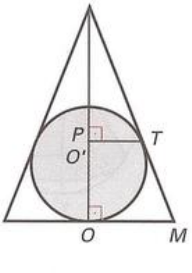
1ª) O centro *O′* da esfera, o vértice *V* e o centro *O* da base do cone são pontos colineares.

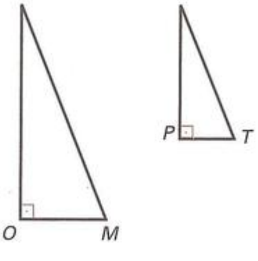


2ª) Uma secção meridiana do cone determina os triângulos semelhantes *VOM* e *VTO′*.



3ª) Seja *T* o ponto de tangência da esfera com uma geratriz do cone. Uma secção meridiana e uma secção transversal que passam por *T* determinam os triângulos semelhantes *VOM* e *VPT*.



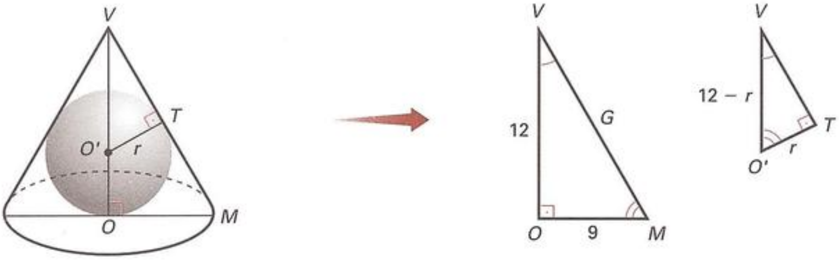


4ª) O cone está **circunscrito** à esfera.

Exercício resolvido

R.13 Calcular a medida do raio da esfera inscrita em um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 9 cm.

Resolução



Os triângulos *VOM* e *VTO'* são semelhantes. Sendo *G* a geratriz do cone e *r* o raio da esfera, temos:

$$G^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow G^2 = 225 \quad \therefore \quad G = 15 \text{ cm}.$$

Da semelhança entre os triângulos *VOM* e *VTO'*, concluímos que:

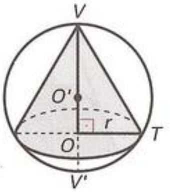
$$\frac{G}{12 - r} = \frac{9}{r} \Rightarrow \frac{15}{12 - r} = \frac{9}{r} \quad \therefore \; 15r = 108 - 9r \quad \therefore \; 24r = 108 \quad \therefore \; r = 4{,}5 \text{ cm}.$$

7.2. Cone circular reto inscrito em esfera

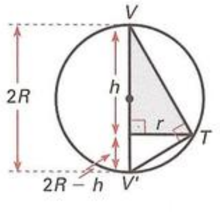
Um cone circular reto está **inscrito** em uma esfera se, e somente se, sua circunferência da base está contida na superfície dessa esfera e seu vértice pertence à superfície dessa esfera.

Conseqüências

1ª) O centro *O'* da esfera, o vértice *V* e centro *O* da base do cone são pontos colineares.



2ª) Sendo *R* o raio da esfera, *r* e *h* o raio da base e a altura do cone, respectivamente, $\overline{VV'}$ um diâmetro da esfera e *T* um ponto da circunferência da base do cone, temos que o triângulo *VV'T* é retângulo em *T*. Temos: $r^2 = h(2R - h)$.



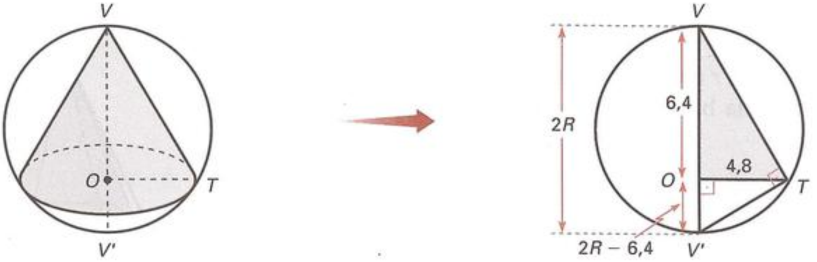
3ª) A esfera está **circunscrita** ao cone.

Exercício resolvido

R.14 Um cone circular reto de altura 6,4 cm e raio da base 4,8 cm está inscrito em uma esfera. Calcular a área da superfície dessa esfera.

Resolução

Sendo R o raio da esfera, temos:

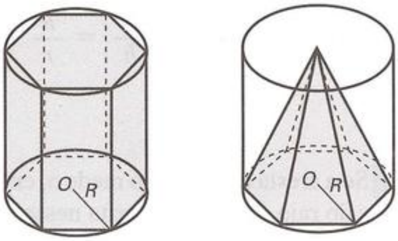


$$(4{,}8)^2 = 6{,}4(2R - 6{,}4) \;\therefore\; 23{,}04 = 12{,}8R - 40{,}96 \;\therefore\; 64 = 12{,}8R \;\therefore\; R = 5 \text{ cm}.$$

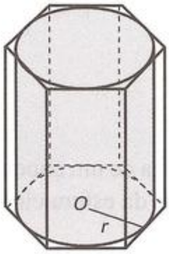
A área A da superfície da esfera é $A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \;\therefore\; A = 100\pi \text{ cm}^2$.

8. Resumo dos teoremas

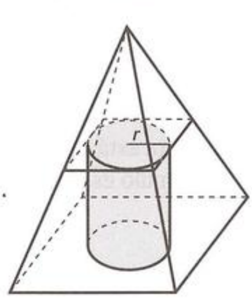
T.81 O raio R da circunferência circunscrita à base de um prisma (pirâmide) regular é o raio da base do cilindro circunscrito a esse prisma (pirâmide).



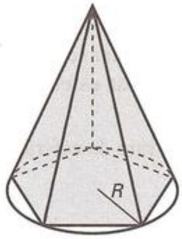
T.82 O apótema r da base de um prisma regular é o raio da base do cilindro inscrito nesse prisma.



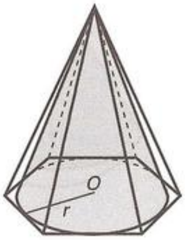
T.83 Se uma secção transversal de uma pirâmide regular circunscreve uma base de um cilindro circular, então o apótema dessa secção é o raio da base do cilindro.



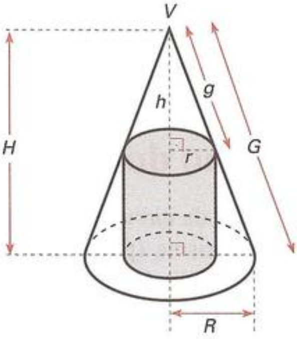
T.84 O raio R da circunferência circunscrita à base de uma pirâmide regular é o raio da base do cone circunscrito a essa pirâmide.



T.85 O apótema r da base de uma pirâmide regular é o raio da base do cone inscrito nessa pirâmide.

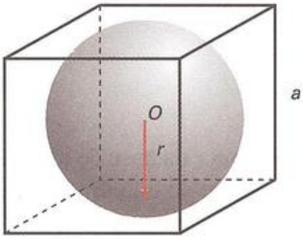


T.86 Se um cilindro circular reto está inscrito em um cone circular reto C_1, então a altura H, o raio da base R e a geratriz G desse cone são proporcionais à altura h, ao raio da base r e à geratriz g do cone C_2 cujo vértice V é o mesmo de C_1 e a base coincide com a base do cilindro mais próxima de V: $\dfrac{H}{h} = \dfrac{R}{r} = \dfrac{G}{g}$.



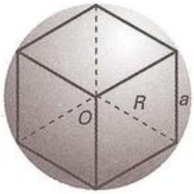
T.87 Se a aresta de um cubo mede a, então a medida r do raio da esfera inscrita nesse cubo é:

$$r = \frac{a}{2}.$$

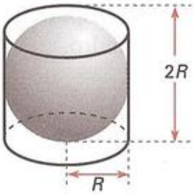


T.88 Se a aresta de um cubo mede a, então a medida R do raio da esfera circunscrita a esse cubo é:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

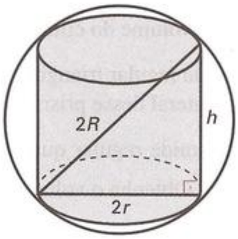


T.89 Se uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto, então esse cilindro é equilátero.



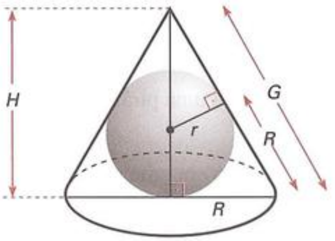
T.90 Se h e $2r$ são, respectivamente, a altura e o diâmetro de um cilindro circular reto inscrito em uma esfera de diâmetro $2R$, então:

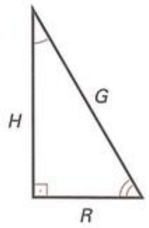
$$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2.$$

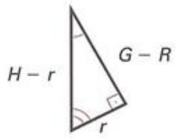


T.91 Se uma esfera de raio r está inscrita em um cone circular reto de altura H, raio da base R e geratriz G, então:

$$\frac{H}{G - R} = \frac{R}{r} = \frac{G}{H - r}.$$

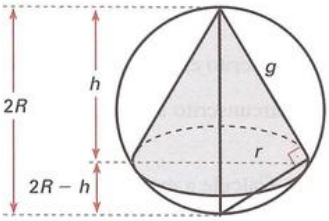


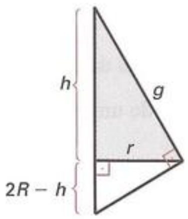




T.92 Se uma esfera de raio R está circunscrita a um cone circular reto de altura h, raio da base r e geratriz g, então:

$$r^2 = h(2R - h).$$





Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.9, B.11, B.13, B.15, B.17, B.19, B.21, B.23, B.25, B.27, C.6, C.7.

Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, B.10, B.12, B.14, B.16, B.18, B.20, B.22, B.24, B.26, B.28, C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a área total de um prisma regular quadrangular inscrito em um cilindro circular de altura 8 cm e raio da base $3\sqrt{2}$ cm.

B.2 Determine o volume de um prisma regular hexagonal inscrito em um cilindro circular de altura 10 cm e raio da base $2\sqrt{3}$ cm.

B.3 Um cilindro circular está inscrito em um prisma regular hexagonal de altura 8 cm e aresta da base 2 cm. Calcule o volume do cilindro.

B.4 Um prisma regular triangular está circunscrito a um cilindro circular de altura 5 m e raio da base 1 m. Qual é a área lateral desse prisma?

B.5 Uma pirâmide regular quadrangular está inscrita em um cilindro circular de altura 10 dm e raio da base $3\sqrt{2}$ dm. Obtenha o volume da pirâmide.

B.6 Um cilindro circular reto está circunscrito a uma pirâmide regular triangular de altura 9 cm e aresta da base 4 cm. Qual é a área total do cilindro?

B.7 Um cilindro circular reto de altura 18 cm está inscrito em uma pirâmide regular quadrangular de altura 24 cm e aresta da base com 16 cm. Calcule o volume do cilindro.

B.8 Encontre o volume de uma pirâmide regular hexagonal de altura 15 cm circunscrita a um cilindro circular reto de altura 10 cm e raio da base 2 cm.

B.9 Uma pirâmide regular triangular está inscrita em um cone circular de altura 9 cm e raio da base 2 cm. Determine o volume da pirâmide.

B.10 Obtenha a área total de um cone circular de altura 6 cm circunscrito a uma pirâmide regular hexagonal cujo apótema da base mede 3 cm.

B.11 Qual é o raio da base de um cone circular reto de altura 6 cm inscrito em uma pirâmide regular quadrangular cuja aresta lateral mede 8 cm?

B.12 O apótema de uma pirâmide regular mede 13 cm. O raio da base de um cone circular inscrito nessa pirâmide mede 5 cm. Determine o volume desse cone.

B.13 Um cilindro circular reto de raio da base 3 cm está inscrito em um cone circular reto de altura 12 cm e geratriz 15 cm. Calcule o volume do cilindro.

B.14 Um cone equilátero de altura $5\sqrt{3}$ m está circunscrito a um cilindro equilátero. Encontre o raio da base do cilindro.

B.15 Calcule a área lateral de um cone circular reto inscrito em um cilindro equilátero de altura 8 cm.

B.16 Qual é o volume de um cilindro circular reto circunscrito a um cone circular reto de altura 8 cm e geratriz 10 cm?

B.17 A medida da diagonal de um cubo é $8\sqrt{3}$ dm. Calcule a medida do raio da esfera inscrita nesse cubo.

B.18 Qual é a área total de um cubo circunscrito a uma esfera de volume 36π cm^3?

B.19 A medida de uma aresta de um cubo é 5 cm. Calcule a área da superfície esférica circunscrita a esse cubo.

B.20 Uma esfera de volume $\frac{4\pi}{3}$ m^3 está circunscrita a um cubo. Qual é o volume desse cubo?

B.21 Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto de área lateral 16π cm^2. Determine o volume da esfera.

B.22 Qual é a área total de um cilindro circular reto circunscrito a uma esfera de volume 4π cm^3?

B.23 Um cilindro circular reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm está inscrito em uma esfera. Calcule a área da superfície dessa esfera.

B.24 Obtenha o volume de uma esfera circunscrita a um cilindro equilátero de volume 16π cm^3.

B.25 Encontre a medida do raio de uma esfera inscrita em um cone circular reto de altura 24 cm e raio da base 18 cm.

B.26 Um cone circular reto de geratriz 17 cm e raio da base 8 cm está circunscrito a uma esfera. Calcule a área da superfície dessa esfera.

B.27 Determine a medida do raio da base de um cone circular reto de altura 16 cm inscrito em uma esfera de raio 10 cm.

B.28 Calcule a medida do raio de uma esfera circunscrita a um cone circular reto de altura 9 cm e raio da base 6 cm.

Exercícios complementares

C.1 Sendo respectivamente V_1 e V_2 os volumes dos prismas regulares hexagonais inscrito e circunscrito a um mesmo cilindro equilátero, obtenha $\frac{V_1}{V_2}$.

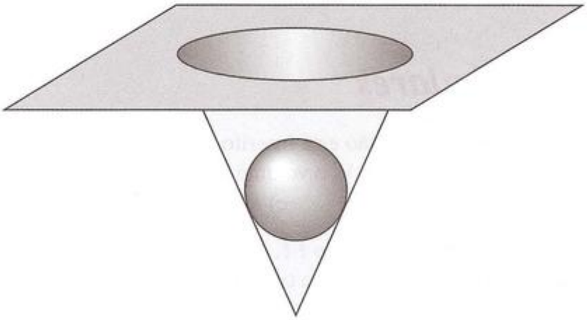
C.2 Uma pirâmide regular quadrangular de volume V está inscrita em um cilindro circular reto cuja altura é o dobro do raio da base. Determine, em função de V, o raio da base do cilindro.

C.3 Calcule a medida do raio da base do cilindro equilátero inscrito num tetraedro regular de aresta $2\sqrt{3}$ cm.

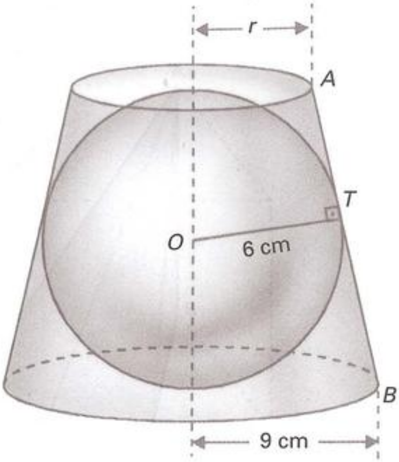
C.4 Sendo A_1 e A_2 as áreas laterais dos cilindros circulares retos inscrito e circunscrito a um cone equilátero de altura H, calcule $\frac{A_1}{A_2}$ sabendo que a altura do cilindro inscrito é $\frac{H}{3}$.

C.5 Qual é a razão entre os volumes das esferas inscrita e circunscrita a um mesmo cubo, nessa ordem?

C.6 Uma esfera de raio 3 cm é jogada em uma cavidade sob forma de um cone circular reto de altura 16 cm e raio da base 12 cm (conforme a figura). Calcule a distância da esfera ao vértice da cavidade cônica.

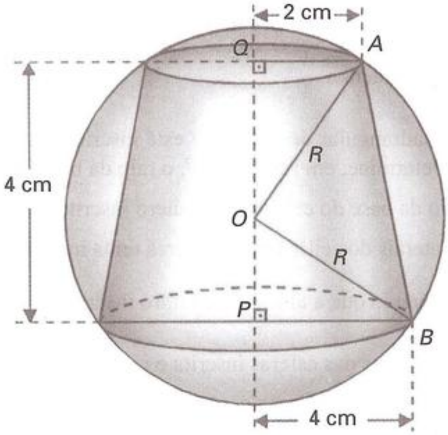


C.7 "Dizemos que uma esfera está inscrita em um tronco de cone se ela é tangente às bases e a todas as geratrizes do tronco."
Uma esfera de raio 6 cm está inscrita em um tronco de cone circular reto de bases paralelas cujo raio da base maior mede 9 cm. Determine o raio da base menor desse tronco. **Sugestão:** $AT = r$ e $BT = 9$ cm.



C.8 "Dizemos que um tronco de cone está inscrito em uma esfera se as circunferências de suas bases estão contidas na superfície da esfera."

O centro de uma esfera é um ponto interior a um tronco de cone circular reto de bases paralelas inscrito nessa esfera. Sabendo que a altura do tronco é 4 cm e que suas bases têm raios 2 cm e 4 cm, obtenha a medida do raio da esfera circunscrita. **Sugestão:** aplique o teorema de Pitágoras nos triângulos OPB e OQA.



Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Um cilindro de revolução está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo. Se representarmos por V_1 o volume do cilindro e por V_2 o volume do paralelepípedo, podemos escrever que:

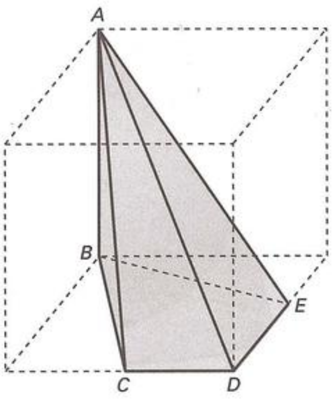
a) $\pi V_2 = 4V_1$
b) $4V_2 = \pi V_1$
c) $\pi V_1 = V_2$
d) $V_1 = \pi V_2$
e) $V_2 = 2\pi V_1$

V.2 (Fatec-SP) A medida da aresta de um cubo é ℓ. Determine o volume do cone que tem como base o círculo inscrito numa face do cubo e como vértice o centro da face oposta.

V.3 (ITA-SP, modificado) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone pode ser igual a:

a) $\frac{6}{5}R$
b) $\frac{3}{2}R$
c) $\frac{4}{3}R$
d) $\frac{2}{3}R$
e) $\frac{7}{5}R$

V.4 (Fatec-SP) Considerando, na figura, um cubo de aresta 4 cm. Calcule o volume de sólido $ABCDE$, sabendo que E e C são pontos médios das arestas do cubo.



Respostas

Capítulo 1

Exercícios básicos

B.1 $a_1 = 6, a_3 = 9, a_4 = 13, a_6 = 15$. **B.2** $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 5, a_5 = 6, a_6 = 6, a_7 = 6$. **B.3** d. **B.4** 58. **B.5** 51. **B.6** 12. **B.7** 47. **B.8** 61. **B.9** a) (6, 15, 24, 33, ...); b) (3, 6, 12, 24, ...); c) (8, 13, 18, 23, ...); d) (3, 8, 15, 24, ...). **B.10** (2, 4, 6, 8, 16, 24, 32). **B.11** a) (8, 21, 47, 99, ...); b) (2, 6, 12, 20, ...); c) (5, 15, 45, 135, ...); d) (5, 10, 15, 20, 50, 72, 98, 128, 162). **B.12** a) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$; b) $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...\right)$; c) $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$. **B.13** (8, 8, 8, 8, ...). **B.14** -7.

B.15 a) $a_1 = -6, a_2 = 1, a_3 = \frac{6}{25}$; b) $a_n = \frac{6}{n^3 - 2}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **B.16** a) $a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = -4$; b) $a_n = 2 - 2n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercícios complementares

C.1 $a_4 = \frac{3}{5}$. **C.2** a) $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 3, c_5 = 4$; b) $a_n = \begin{cases} 1 + c_n & \text{se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } 1 \leqslant n \leqslant 3 \\ 2 + c_n & \text{se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geqslant 4. \end{cases}$ **C.3** a) $S_{10} = 140$; b) $a_1 = 5$; c) $a_6 = 15$. **C.4** a) $P_{10} = 2000$; b) $a_1 = 2$; c) $a_6 = \frac{216}{125}$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** a. **V.3** b.

Capítulo 2

Exercícios básicos

B.1 a) (6, 11, 16, 21, 26, 31) é P.A.; b) (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81) não é P.A.; c) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$ é P.A.

B.2 a) $(-2, -5, -8, -11, -14)$ é P.A.; b) $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}\right)$ não é P.A.; c) $\left(6, 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{14}{9}, \frac{41}{27}\right)$ não é P.A. **B.3** $a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) + 1 - (4n + 1) = 4n + 4 + 1 - 4n - 1 = 4$; logo, a seqüência é P.A. de razão 4. **B.4** Não é P.A. **B.5** $r = -\frac{4}{15}$. **B.6** $r = 5$. **B.7** a) decrescente; b) crescente; c) constante; d) crescente; e) constante; f) crescente. **B.8** $a_{51} = 205$.

B.9 $a_{62} = -207$. **B.10** $a_{25} = \frac{53}{3}$. **B.11** $r = \frac{31}{15}$. **B.12** $r = -\frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.13** $n = 36$. **B.14** $n = 51$. **B.15** 27. **B.16** 69. **B.17** $r = -3$. **B.18** $a_1 = -10$.

Exercícios complementares

C.1 b. **C.2** a. **C.3** $n = 25$. **C.4** a) 3 degraus; b) $a_7 = a_4 + 3r$; c) 9 degraus; d) $a_{30} = a_{21} + 9r$; e) $n - k$ degraus; f) $a_n = a_k + (n - k)r$; g) sim. **C.5** a) V, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) V. **C.6** $a_{62} = 89$. **C.7** $a_{46} = 162$. **C.8** $a_{28} = 613$. **C.9** $r = 3$. **C.10** $a_{21} = 81$. **C.11** $x + 32r$. **C.12** 4123. **C.13** 14.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** c. **V.3** d.

Capítulo 3

Exercícios básicos

B.1 (4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67). **B.2** $\left(1, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{11}{6}, 2\right)$. **B.3** $r = \frac{1}{8}$. **B.4** $a_1 + a_{70} = 42$. **B.5** $a_{10} + a_{91} = 353$.

B.6 $a_{46} = 216$. **B.7** 78. **B.8** $x = 4$. **B.9** $x = 2$ ou $x = 1$. **B.10** $x = 3$. **B.11** (6, 2, -2). **B.12** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. **B.13** (1, 5, 9, 13).

B.14 $r = \frac{\sqrt{31}}{3}$ ou $r = 1$.

Exercícios complementares

C.1 $r = \frac{b - a}{k + 1}$. **C.2** $k = 5$. **C.3** $x = 0$. **C.4** $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$. **C.5** $x = 2$. **C.6** Zero. **C.7** 39. **C.8** 21.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** b. **V.3** e.

Capítulo 4

Exercícios básicos

B.1 9960. **B.2** 4335. **B.3** 2310. **B.4** 2562. **B.5** 2210. **B.6** 5586. **B.7** 9504. **B.8** 40. **B.9** 26. **B.10** $a_1 = 2$ e $r = 4$. **B.11** 24.

Exercícios complementares

C.1 $n = 26$. **C.2** 9. **C.3** 6. **C.4** d. **C.5** a) 2550; b) 2500. **C.6** 31. **C.7** 20. **C.8** 836. **C.9** -875.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a. **V.3** e. **V.4** c.

Capítulo 5

Exercícios básicos

B.1 $a_n = 2n + 2, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **B.2** $S_n = n^2 + 3n$. **B.3** $r = \frac{2}{k}$. **B.4** $a_{30} = \frac{k + 60}{k}$. **B.5** $a_n = \frac{k + 2n}{k}, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.6 $S_{30} = \frac{30k + 930}{k}$. **B.7** $S_n = \frac{(k + n + 1)\,n}{k}$. **B.8** $S_n = \frac{(n + 3)\,n^2}{2}$. **B.9** $r = \frac{n}{9}$. **B.10** $r = \frac{n - 1}{n + 1}$.

Exercícios complementares

C.1 $a_n = 2n, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **C.2** $S_n = n^2 + n$. **C.3** $a_n = 2n - 1, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **C.4** $S_n = n^2$. **C.5** 31 termos. **C.6** $a_{30} = 168 - 5k$. **C.7** c.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a) $S_{10} = 100$, b) $S_n = n^2$. **V.3** b.

Capítulo 6

Exercícios básicos

B.1 a) (6, 12, 24, 48, 96) é P.G., $q = 2$; b) (3, 6, 9, 12, 15, 18) não é P.G.; c) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}\right)$ é P.G., $q = \frac{1}{5}$; d) $\left(\frac{4}{3}, 8, 48, 288, 1728\right)$ é P.G., $q = 6$; e) (1, 8, 81, 1024) não é P.G.; f) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ é P.G., $q = \frac{1}{2}$. **B.2** É P.G. **B.3** É P.G.

B.4 $q = \frac{1}{3}$. **B.5** $q = 3$. **B.6** $q = \frac{3}{2}$. **B.7** a) constante; b) crescente; c) decrescente; d) quase nula; e) oscilante; f) constante.

B.8 a) decrescente; b) constante; c) oscilante. **B.9** $\forall x, x \in \mathbb{R} \mid x < 0$. **B.10** $\forall x, x \in \mathbb{R} \mid x > 0$. **B.11** $a_{10} = 1536$. **B.12** $a_{11} = 2187$. **B.13** $q = 2$. **B.14** $q = 3$ ou $q = -3$. **B.15** $n = 20$. **B.16** $n = 11$. **B.17** $a_1 = 1$. **B.18** $q = 2$ ou $q = -2$.

Exercícios complementares

C.1 a) $a_7 = a_3q^4$; b) $a_{10} = a_4q^6$; c) $a_{20} = a_{13}q^7$; d) $a_n = a_kq^{n-k}$. **C.2** $a_{14} = 486$. **C.3** $a_{10} = 5 \cdot 13^{10-k}$. **C.4** $a_n = 2^{n-1}, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **C.5** $a_n = 12 \cdot 3^{n-1}, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **C.6** $a_n = 1 + n, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$. **C.7** 10. **C.8** 1092727 veículos. **C.9** $\frac{5}{2^{48}}$. **C.10** $\frac{10}{9^{18}}$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** d. **V.3** c. **V.4** d.

Capítulo 7

Exercícios básicos

B.1 (3, 6, 12, 24, 48, 96). **B.2** $(1, \sqrt[6]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{32}, 2)$ ou $(1, -\sqrt[6]{2}, \sqrt[3]{2}, -\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, -\sqrt[6]{32}, 2)$.

B.3 $q = \sqrt[13]{\frac{4}{3}}$. **B.4** $a_6 = 32$. **B.5** a) $a_6a_{76} = 9$; b) $a_{41} = 3$ ou $a_{41} = -3$. **B.6** a) $a_1a_{33} = 25$; b) $a_3a_9a_{25}a_{31} = 625$. **B.7** $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$. **B.8** $x = 3$. **B.9** $x = 3$ ou $x = -1$. **B.10** $x = 4$. **B.11** Não existe x. **B.12** $x = 1$. **B.13** $x = 1$. **B.14** (5, −10, 20) ou (20, −10, 5). **B.15** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

Exercícios complementares

C.1 $x = 64$. **C.2** Se n for par, então $q = \sqrt[n+1]{\frac{1}{n^2}}$. Se n for ímpar, então $q = \pm\sqrt[n+1]{\frac{1}{n^2}}$. **C.3** $\left(\frac{1}{16}, 1, 16, 256\right)$. **C.4** 256.

C.5 $a_5 = 625$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** c. **V.3** a.

Capítulo 8

Exercícios básicos

B.1 $S_{11} = 4094$. **B.2** $S_{10} = \frac{1\,023}{512}$. **B.3** $S_{10} = -682$. **B.4** $S_{30} = 0$. **B.5** $n = 10$. **B.6** $a_1 = 3$. **B.7** $P_{18} = 512$. **B.8** $P_{10} = \frac{32}{243}$.

B.9 $P_{11} = 1$. **B.10** $q = \sqrt[21]{5}$. **B.11** $a_1 = \pm\frac{1}{16}$.

Exercícios complementares

C.1 $S_{16} = 1275(\sqrt{2} + 2)$. **C.2** $a_1 = \frac{2}{3}$. **C.3** (1, 2, 4, 8, ...). **C.4** $n = 11$. **C.5** $\sqrt[1\,024]{2^{1\,023}}$. **C.6** $P_{20} = k^{-710}$. **C.7** $Pn = 3^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

C.8 a) $a_1 = 1$; b) $q = 2$; c) $a_4 = 8$; d) 32768. **C.9** 148832. **C.10** 5.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** $\frac{x^{16} + x}{1 + x}$. **V.3** b. **V.4** d.

Capítulo 9

Exercícios básicos

B.1 $S_\infty = \frac{135}{2}$. **B.2** $S_\infty = \frac{128}{3}$. **B.3** $x = \frac{5}{2}$. **B.4** $x = \frac{2}{11}$. **B.5** $D = \frac{131}{99}$. **B.6** $D = \frac{17}{6}$. **B.7** $q = \frac{1}{3}$. **B.8** $a_1 = \frac{9}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 $S = \{5\}$. **C.2** $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$. **C.3** $= \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. **C.4** $S = \left\{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right\}$. **C.5** A empresa *A* doará a soma, em dólares, dos dez primeiros termos da P.G. (100.000, 50.000, 25.000, ...), isto é, $S_{10} \simeq 199.806$ dólares. A empresa *B* doará a soma, em dólares, dos infinitos termos da P.G. (98.000, 49.000, 24.500, ...), isto é, $S_\infty = 196.000$ dólares. Logo, a empresa *A* é a mais generosa. **C.6** $S_\infty = \frac{320\pi}{3}$ cm. **C.7** $S_\infty = 128$ cm². **C.8** As distâncias percorridas em alguns dos segundos após a freada formam a P.G. $\left(20, 5, \frac{5}{4}, \dots\right)$. Mesmo que essa P.G. fosse infinita, não haveria o choque do auto com a pedra, pois $S_\infty = \dfrac{20}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{80}{3} \simeq$ $\simeq 26{,}66$. Isto é, a soma dos termos da P.G. é aproximadamente 26,66 m, que é menor do que 100 m.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** $S_\infty = \frac{10A}{7}$. **V.3** a) 4 h. b) Aproximadamente 5,4 h. c) O limite da soma dos termos da P.G. (256, 128, 64, ...) é 512; logo, o alpinista nunca atingirá os 600 m.

Capítulo 10

Exercícios básicos

B.1 R$ 38.750,00, aproximadamente. **B.2** R$ 3.400,00 (cuidado, esse foi o juro, já que o montante acumulado foi de R$ 13.400,00). **B.3** 20% ao ano, aproximadamente. **B.4** 14,3 meses, aproximadamente. **B.5** R$ 20.000,00. **B.6** 24% ao mês, aproximadamente. **B.7** 77720000 habitantes, aproximadamente. **B.8** R$ 80.800,00, aproximadamente. **B.9** 6% ao mês, aproximadamente. **B.10** R$ 13.305,60. **B.11** a) R$ 137.261,52; b) 37,26%. **B.12** a) R$ 46.075,00; b) 7,85%. **B.13** a) 0,81092*p*; b) 18,908%.

Exercícios complementares

C.1 409,6 litros. **C.2** O país deve ter importado $7{,}578 \cdot 10^8$ kg de alimentos. **C.3** 25 anos, aproximadamente.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** a. **V.3** c. **V.4** a. **V.5** b. **V.6** e.

Capítulo 11

Exercícios básicos

B.1 a) 2.800 dólares; b) 10.580 dólares; c) 7.730 dólares. **B.2** a) 14 pontos; b) 90 pontos; c) 128 pontos. **B.3** a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. **B.4** $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **B.5** $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

B.6 $x = 1$ e $y = 4$. **B.7** $x = -2$. **B.8** $x = 2$. **B.9** $x = 4$.

Exercícios complementares

C.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **C.2** Não existe x. **C.3** $x = -3$ e $y = 4$. **C.4** $b = c$. **C.5** a) V; b) F; c) F; d) V; e) V; f) F; g) V.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** b. **V.3** d.

Capítulo 12

Exercícios básicos

B.1 a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ 10 & 15 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 19 & -\frac{15}{2} \\ 7 & \frac{29}{2} \\ 32 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & 14 & 0 \end{pmatrix}$.

B.2 a) $\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -7 & -31 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$. **B.3** $X = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -9 \\ -12 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

B.4 $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **B.5** $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **B.6** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

B.7 a) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 24 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. **B.8** a) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 5 \\ 1 & 26 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 14 & 26 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **B.9** $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **B.10** $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B.11 $X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **B.12** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
f) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercícios complementares

C.1 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$. **C.2** a) V; b) V; c) V; d) F; e) V; f) F; g) V; h) F. **C.3** a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

C.4 a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V. **C.5** a) F, b) F, c) V, d) F, e) F, f) F. **C.6** $\nexists X$. **C.7** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
logo, A e B comutam na multiplicação. **C.8** $x = 4$. **C.9** $\left\{ \begin{pmatrix} c + d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \{c, d\} \subset \mathbb{R} \right\}$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** e. **V.3** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Capítulo 13

Exercícios básicos

B.1 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. **Nota:** existem infinitas matrizes equiparáveis a A com $b_{11} = 1$. **B.2** $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Nota: existem infinitas matrizes equiparáveis a A com $b_{21} = 1$. **B.3** a) $\det A = 32$; b) $\det B = -22$; c) $\det C = 10$; d) $\det D = -11$; e) $\det E = 4$. **B.4** a) $\det A = -5$; b) $\det B = 16$; c) $\det C = 9$. **B.5** $\det A = x(x - a)^3$. **B.6** $\det A = a(b - a)(c - d)(d - c)$. **B.7** $x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 5$. **B.8** $x = 7$. **B.9** $x = 4$.

Exercícios complementares

C.1 $\det A = 0$. **C.2** $\det A = 0$. **C.3** a) V, b) V, c) F, d) F. **C.4** $\det A = 0$. **C.5** $\det A = 0$.

C.6 a) $$\boxed{-3}\ \boxed{-4}\ \begin{matrix}\times\\+\\+\end{matrix}\begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 9k & 15k \\ 3k & 8k & 12k \end{pmatrix} \approx \boxed{-2}\ \begin{matrix}\times\\ \\+\end{matrix}\begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 0 & k & 3k \\ 0 & 2k & 3k \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 0 & k & 3k \\ 0 & 0 & -3k \end{pmatrix}$$; logo, $kA \approx kB$. b) $\det kA = k \cdot k \cdot (-3k) = k^3(-3)$ $\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3$; logo, $\det kA = k^3 \det A$. **C.7** a) V, b) F, c) V.

C.8 $\det 2A = 80$. **C.9** a) $$\boxed{-3k}\ \boxed{-2}\ \begin{matrix}\times\\+\\+\end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 15 \\ 6k & 11k & 18k \end{pmatrix} \approx \boxed{-2k}\ \begin{matrix}\times\\ \\+\end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2k & 3k \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7k \end{pmatrix}$$; logo, $C \approx D$. b) $\det C = 2 \cdot 1 \cdot (-7k) = k \cdot (-14)$ $\det A = 2 \cdot 1 \cdot (-7) = -14$; logo, $\det C = k \det A$.

C.10 $\det B = 50$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** d. **V.3** a.

Capítulo 14

Exercícios básicos

B.1 a) 13; b) 10; c) 1. **B.2** a) 19; b) 17; c) $\frac{1}{2}$. **B.3** a) -21; b) -38; c) 30. **B.4** a) -14; b) $b(b - a)(a - c)$. **B.5** 0 (zero). **B.6** -14.

B.7 7. **B.8** -5.

Exercícios complementares

C.1 -90. **C.2** $S = \{3, -3\}$. **C.3** $S = \{0, 2\}$. **C.4** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. **C.5** $a \in \mathbb{R}, a < 4$. **C.6** A. **C.7** $\det A = 0$. **C.8** $S = \{3\}$.

C.9 $\det A = 1$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** b. **V.3** c.

Capítulo 15

Exercícios básicos

B.1 a) 15; b) -30; c) 40; d) 30; e) -5; f) -5. **B.2** $\det A = 0$. **B.3** $\det A = 0$. **B.4** $\det (2A) = 2^3 \det A = 8 \cdot 5 = 40$. **B.5** a) 10; b) 24; c) 60; d) 2; e) -2; f) -2; g) 12. **B.6** $\det A = 0$. **B.7** $\det A = 0$. **B.8** $k = 3$ ou $k = -3$.

B.9 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix}$. **B.10** a) 0 (zero); b) 0 (zero). **B.11** $A \cdot \overline{A} = (\det A)I_3 =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **B.12** a) $\det AB = 10$; b) $\det A^4 = 16$; c) $\det (A^tB) = 10$; d) $\det (4AB) = 640$. **B.13** $S = \{3, 2, 0\}$.

B.14 0 (zero). **B.15** $\det \bar{A} = 25$. **B.16** $\det B = -\frac{1}{16}$.

Exercícios complementares

C.1 $\det(-A) = -5$, se n for ímpar; ou $\det(-A) = 5$, se n for par. **C.2** $\det B = 49$. **C.3** b. **C.4** $k = 5$. **C.5** $\det A = 8$. **C.6** $\det B = \frac{1}{5}$. **C.7** $\det (A \cdot \bar{A}) = 64$.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** c. **V.3** d.

Capítulo 16

Exercícios básicos

B.1 d. **B.2** c. **B.3** $\beta = 2$. **B.4** c. **B.5** e. **B.6** a) SPD; b) SI; c) SPI; d) SI. **B.7** c. **B.8** $a = 0$. **B.9** $\forall a, a \neq 0$.

Exercícios complementares

C.1 $a = 8$. **C.2** $a = -1$. **C.3** Se (α, β) é solução de $A \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$ então $\begin{cases} a\alpha + b\beta = c \ \textbf{(I)} \\ d\alpha + e\beta = f. \ \textbf{(II)} \end{cases}$.

O sistema $A' \begin{cases} ax + by = c \\ kdx + key = kf \end{cases}$ pode ser escrito sob a forma $\begin{cases} ax + by = c \\ k(dx + ey) = kf. \end{cases}$ Fazendo $x = \alpha$ e $y = \beta$, temos $\begin{cases} a\alpha + b\beta = c \ \textbf{(I)} \\ k(d\alpha + e\beta) = kf. \ \textbf{(II)} \end{cases}$ Substituindo (II) em (III), temos $\begin{cases} a\alpha + b\beta = c \ \textbf{(I)} \\ kf = kf. \ \textbf{(IV)} \end{cases}$ Por hipótese, a sentença (I) é verdadeira e, como a sentença (IV) também é verdadeira, temos que (α, β) é solução do sistema A'. **C.4** Demonstração análoga à anterior. **C.5** Demonstrações análogas às anteriores.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d **V.3** c.

Capítulo 17

Exercícios básicos

B.1 a) SPD, $S = \{(2, 1, 3)\}$; b) SPI, $S = \{(7 - 18z, 1 - 3z, z), z \in \mathbb{R}$; c) SPI, $S = \left\{\left(\frac{y-7}{2}, y, 2\right), y \in \mathbb{R}\right\}$. **B.2** a) SPD, $S = \{(-4, 2, 1, 3)\}$; b) SPI, $S = \{(z + 2, 2 + 6z, z), z \in \mathbb{R}\}$; c) SPI, $S = \left\{\left(2z - \frac{1}{2}, 3, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$; d) SPI, $S = \{(5c - 3d - 2, 1 - 2c + d, c, d), \{t, z\} \subset \mathbb{R}\}$. **B.3** (1, 2, 1), (−4, −1, 2). **B.4** (−8, 10, 2), $\left(6, \frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. **B.5** a) SPD, $S = \{(1, 1, 2)\}$; b) SI, $S = \varnothing$; c) SPI, $S = \{(6z - 5, 3 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$. **B.6** a) SPD, $S = \{(3, -1, 2)\}$; b) SPI, $S = \left\{\left(1 - \frac{5z}{7}, -\frac{z}{7}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$; c) SI, $S = \varnothing$.

Exercícios complementares

C.1 a) SPD, $S = \{(-1, 0, 1, 2)\}$; b) SI, $S = \varnothing$; c) SPI, $S = \{(8z - 3, 2 - 4z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$; d) SPD, $S = \{(1, 1, 1)\}$. **C.2** a) SPD, $S = \{(1, 2, 0)\}$; b) SI, $S = \varnothing$; c) SPI, $S = \{(19z + 3, -4 - 27z, z), z \in \mathbb{R}\}$; d) SPD, $S = \{(1, 4, 2)\}$. **C.3** $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$. **C.4** SPD, $S = \{(-1, 4)\}$. **C.5** a) SI, $S = \varnothing$; b) SPD, $S = \{(-2, 2)\}$; c) SPI, $S = \{(2y + 3, y), y \in \mathbb{R}\}$. **C.6** 0,125 kg. **C.7** 9. **C.8** Supondo que cada pacote vermelho tenha x dólares, cada pacote azul, y dólares, e cada pacote branco, z dólares, obtemos o sistema $\begin{cases} x + 2y + 5z = 150.000 \\ y + 3z = 70.000 \\ x - z = 0 \end{cases}$ Escalonando esse sistema, percebe-se que é um sistema impossível. Logo, o gerente mentiu.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** d. **V.3** e. **V.4** c.

Capítulo 18

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \{(4, 2)\}$; b) $S = \{(-1, 1, 3)\}$. **B.2** a) $S = \left\{\left(\frac{5}{17}, -\frac{8}{17}\right)\right\}$; b) $S = \{(1, 2, 3)\}$. **B.3** $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$. **B.4** $\forall m$, $m \in \mathbb{R}, m \neq 2$ e $m \neq -\frac{3}{5}$. **B.5** a) SPD, b) SPI. **B.6** SPI. **B.7** $\forall m, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 4$. **B.8** $a = 1$.

Exercícios complementares

C.1 a) $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 4$; b) $S = \{(3, 2a)\}$. **C.2** a) $\forall a, a \in \mathbb{R}$; b) $S = \{(a + 1, a - 2)\}$. **C.3** Não existe m. **C.4** $k = 4$ ou $k = -1$. **C.5** $S = \{(7z, -3z, z), z \in \mathbb{R}\}$. **C.6** c. **C.7** $a = 4$.

Questões dos vestibulares

V.1 $S = \{(0, 1)\}$. **V.2** c. **V.3** e. **V.4** b.

Capítulo 19

Exercícios básicos

B.1 $m \neq 4 \Rightarrow$ SPD; $m = 4 \Rightarrow$ SI. **B.2** $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD; $m = -1 \Rightarrow$ SPI. **B.3** $m \neq -2 \Rightarrow$ SPD; $m = -2 \Rightarrow$ SPI. **B.4** $m \neq 1$ e $m \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $m = 1 \Rightarrow$ SI; $m = 2 \Rightarrow$ SI. **B.5** $a \neq -1 \Rightarrow$ SPD; $a = -1$ e $b = 2 \Rightarrow$ SPI; $a = -1$ e $b \neq 2 \Rightarrow$ SI. **B.6** $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD; $a = 1$ e $b = 1 \Rightarrow$ SPI; $a = 1$ e $b \neq 1 \Rightarrow$ SI. **B.7** $\mathrm{a} \neq 3$ e $a \neq -7 \Rightarrow$ SPD; $a = 3$ e $b = 2 \Rightarrow$ SPI; $a = 3$ e $\mathrm{b} \neq 2 \Rightarrow$ SI; $a = -7$ e $b = -4 \Rightarrow$ SIP; $a = -7$ e $b \neq -4 \Rightarrow$ SI. **B.8** $k \neq 1 \Rightarrow$ SPD; $k = 1 \Rightarrow$ SPI. **B.9** $k \neq 3$ e $k \neq -8 \Rightarrow$ SPD; $k = 3$ ou $k = -8 \Rightarrow$ SPI. **B.10** $m = 5 \Rightarrow$ SI; $m \neq 5 \Rightarrow$ SPI. **B.11** $a = 0 \Rightarrow$ SPD; $a \neq 0 \Rightarrow$ SI. **B.12** $m = 1 \Rightarrow$ SI; $m \neq 1 \Rightarrow$ SPI. **B.13** $k = -9 \Rightarrow$ SPD; $k \neq -9 \Rightarrow$ SI.

Exercícios complementares

C.1 $a = 4 \Rightarrow$ SPI; $a \neq 4 \Rightarrow$ SI. **C.2** $m = 3 \Rightarrow$ SPI; $m \neq 3 \Rightarrow$ SI. **C.3** $m \neq 1$ e $m \neq \frac{13}{5} \Rightarrow$ SPD; $m = 1$ ou $m = \frac{13}{5} \Rightarrow$ SPI. **C.4** $m \neq 1 \Rightarrow$ SPD; $m = 1 \Rightarrow$ SPI. **C.5** $b \neq 4 \Rightarrow$ SPI; $b = 4$ e $a = 3 \Rightarrow$ SPI; $b = 4$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SI. **C.6** $a \neq 3 \Rightarrow$ SPI; $a = 3$ e $b = 5 \Rightarrow$ SPI; $a = 3$ e $b \neq 5 \Rightarrow$ SI. **C.7** $a = 2$ ou $a = -10 \Rightarrow$ SPD; $a \neq 2$ e $a \neq -10 \Rightarrow$ SI.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** c. **V.3** c. **V.4** d.

Capítulo 20

Exercícios básicos

B.1 A e B são inversas entre si. **B.2** A e B são inversas entre si. **B.3** A e B não são inversas entre si. **B.4** A é inversível. **B.5** A não é inversível. **B.6** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \neq 6$. **B.7** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \neq 4$. **B.8** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \neq 6$ e $x \neq 4$. **B.9** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

B.10 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. **B.11** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. **B.12** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. **B.13** $\det AB =$ $= \det A \det B$ (pelo teorema de Binet). Como $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ temos que $\det A \det B \neq 0 \Rightarrow \det AB \neq 0$. Logo, AB é inversível.

Exercícios complementares

C.1 $\det A^{-1} = \frac{1}{5}$. **C.2** $x = 1$ ou $x = -\frac{7}{3}$. **C.3** $x = (C - B)A^{-1}$. **C.4** $x = B^{-1}A^{-1}C$. **C.5** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \neq 4$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** e. **V.3** a.

Capítulo 21

Exercícios básicos

B.1 6. **B.2** 2401. **B.3** 840. **B.4** 5880. **B.5** 90. **B.6** 72. **B.7** 336. **B.8** 1024. **B.9** 72030. **B.10** $26^3 \cdot 10^4 - 26^3 = 175742424$. **B.11** 40. **B.12** 24.

Exercícios complementares

C.1 24. **C.2** 360. **C.3** $2^5 = 32$. **C.4** $x = 3$. **C.5** 250. **C.6** 48. **C.7** 75. **C.8** 36.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** d. **V.3** b. **V.4** 2160. **V.5** b.

Capítulo 22

Exercícios básicos

B.1 351. **B.2** 7. **B.3** 150. **B.4** 15. **B.5** 240 **B.6** 228. **B.7** 144. **B.8** 1500. **B.9** 220. **B.10** 420. **B.11** 432. **B.12** 384. **B.13** 891000.

Exercícios complementares

C.1 186. **C.2** 120. **C.3** 57ª. **C.4** 168. **C.5** 480.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** b. **V.3** e.

Capítulo 23

Exercícios básicos

B.1 (a, b), (b, a), (c, a), (d, a), (a, c), (b, c), (c, b), (d, b), (a, d), (b, d), (c, d), (d, c). **B.2** (2, 4, 6), (2, 6, 4), (4, 2, 6), (4, 6, 2), (6, 2, 4), (6, 4, 2), (2, 4, 8), (2, 8, 4), (4, 2, 8), (4, 8, 2), (8, 2, 4), (8, 4, 2), (2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2), (4, 6, 8), (4, 8, 6), (6, 4, 8), (6, 8, 4), (8, 4, 6), (8, 6, 4). **B.3** São arranjos simples os agrupamentos dos itens (b) e (d). **B.4** a) $A_{8,3} = 336$; b) $A_{5,4} = 120$; c) $A_{6,6} = 720$ **B.5** a) $A_{4,2} = 12$; b) $A_{5,3} = 60$; c) $A_{4,1} = 4$. **B.6** $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6$. **B.7** $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$. **B.8** 6. **B.9** $n - 2$. **B.10** c. **B.11** a. **B.12** e.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** a. **C.3** $A_{5,5} = 120$. **C.4** c. **C.5** a) V, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) F.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** b. **V.3** e.

Capítulo 24

Exercícios básicos

B.1 a) 5040; b) 12; c) 22; d) $\frac{1}{6}$. **B.2** a) F; b) F; c) V; d) V; e) F; f) F; g) V; h) F. **B.3** a) 120; b) $\frac{1}{30}$; c) 40; d) n; e) $\frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n}$; f) $n^2 + 7n + 12$; g) $\frac{1}{n+3}$; h) $n^2 - 11n + 30$; i) $\frac{1}{n^2 - 7n + 12}$. **B.4** $S = \{1\}$. **B.5** $S = \{3\}$. **B.6** $S = \{2\}$. **B.7** $S = \{4, 2\}$. **B.8** c. **B.9** a) 1; b) 1; c) 1. **B.10** $S = \{5\}$. **B.11** $S = \{8\}$. **B.12** $S = \{2\}$. **B.13** $S = \{0\}$. **B.14** $S = \{2\}$. **B.15** a.

Exercícios complementares

C.1 $S = \{6\}$. **C.2** c. **C.3** $S = \{4\}$. **C.4** $S = \{5\}$. **C.5** d.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** a. **V.3** b.

Capítulo 25

Exercícios básicos

B.1 $5! = 120$. **B.2** $4!3!2!3! = 1728$. **B.3** $5!4! = 2880$. **B.4** $3! = 6$. **B.5** $3!3! = 36$. **B.6** a) $7! = 5040$; b) $6! = 720$; c) $5! = 120$; d) $4 \cdot 6! = 2880$; e) $3 \cdot 6! = 2160$; f) $4 \cdot 3 \cdot 5! = 1440$; g) $4 \cdot 6! + 3 \cdot 6! - 12 \cdot 5! = 3600$; h) $5! = 120$; i) $3!5! = 720$; j) $7! - 3! \cdot 5! = 4320$. **B.7** $6! - 5! = 600$. **B.8** 60ª posição. **B.9** a. **B.10** b.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{6!}{2} = 360$. **C.2** 120. **C.3** 480. **C.4** 1440. **C.5** 5. **C.6** 7.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** b. **V.3** 120. **V.4** e. **V.5** b.

Capítulo 26

Exercícios básicos

B.1 $P_7^{(2,2)} = 1260$. **B.2** $P_6^{(3,2)} = 60$. **B.3** $P_5^{(2)} = 60$. **B.4** $P_5^{(2,2)} = 30$. **B.5** $P_5 + P_5^{(2)} = 180$. **B.6** $2P_7^{(3,2)} + P_7^{(2,2)} = 2100$.

B.7 $3P_6^{(3,2)} = 180$.

Exercícios complementares

C.1 36. **C.2** 7. **C.3** 22. **C.4** 15. **C.5** 16. **C.6** 35.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** a. **V.3** e.

Capítulo 27

Exercícios básicos

B.1 $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$. Logo, $C_{3,2} = 3$. **B.2** $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$. Logo, $A_{3,2} = 6$. **B.3** $x = 2$. **B.4** a) 21; b) 5; c) 1; d) 9. **B.5** 102. **B.6** $S = \{6\}$. **B.7** $S = \{7\}$. **B.8** $S = \{5\}$. **B.9** $n = p$ e $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$. **B.10** $S = \varnothing$. **B.11** $m = 7$. **B.12** 36. **B.13** 35. **B.14** 70. **B.15** 56. **B.16** 1960. **B.17** 20. **B.18** 275. **B.19** 10.

Exercícios complementares

C.1 140. **C.2** b. **C.3** a. **C.4** 140. **C.5** a. **C.6** 150.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** 205. **V.3** e. **V.4** b. **V.5** c.

Capítulo 28

Exercícios básicos

B.1 24. **B.2** 120. **B.3** 8. **B.4** 7. **B.5** 144. **B.6** 48.

Exercícios complementares

C.1 24. **C.2** 16.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** b. **V.3** e.

Capítulo 29

Exercícios básicos

B.1 $S = \{3\}$. **B.2** $S = \{8\}$. **B.3** a) $\binom{12}{7}$; b) $\binom{19}{10}$; c) $\binom{n+6}{p+3}$. **B.4** $S = \{3, 8\}$. **B.5** $S = \{3, 4\}$.

B.6 $\dfrac{n!}{0!n!} + \dfrac{(n+1)!}{1!n!} = \dfrac{n! + (n+1)n!}{n!} = \dfrac{n!(1+n+1)}{n!} = \dfrac{n!(n+2)}{n!} = \dfrac{n!(n+2)(n+1)}{n!(n+1)} = \dfrac{(n+2)!}{1!(n+1)!} = \binom{n+2}{1}$. **B.7** a) $\binom{5}{3} = 10$; b) $\binom{6}{4} = 15$; c) $\binom{8}{5} = 56$. **B.8** $x = 28$ e $y = 56$.

B.9 $x = \binom{12}{7} = 792$. **B.10** $\binom{12}{6} = 924$.

Exercícios complementares

C.1 a) $2^8 = 256$; b) $2^9 - 2 = 510$; c) 2^n. **C.2** a) $\binom{10}{6} = 210$; b) $\binom{k+r+1}{k+1}$. **C.3** a) $\binom{10}{4} = 210$; b) $\binom{k+r+1}{r}$.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** c. **V.3** c.

Capítulo 30

Exercícios básicos

B.1 a) $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$; b) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$; c) $16x^4 + 32x^3y^2 + 24x^2y^4 + 8xy^6 + y^8$. **B.2** a) $x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5$; b) $16 - 32x^2 + 24x^4 - 8x^6 + x^8$; c) $8x^{12} - 36x^8y + 54x^4y^2 - 27y^3$. **B.3** $x = 3$ e $y = -1$. **B.4** $x = 3$ e $y = 1$ ou $x = 2$ e $y = 4$. **B.5** 625. **B.6** 243. **B.7** 1. **B.8** 1024 **B.9** 256. **B.10** $n = 11$. **B.11** b. **B.12** c. **B.13** e. **B.14** c. **B.15** e.

Exercícios complementares

C.1 $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1}1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2}1^2 \cdot 1^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}1^n \cdot 1^0 =$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}}_{\textbf{Linha } n \textbf{ do triângulo de Pascal}}.$$

C.2 $C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + \ldots + C_{10,10} = 2^{10} = 1024$. **C.3** 6. **C.4** $2^{11} - \binom{11}{0} - \binom{11}{1} - \binom{11}{2} = 1981$.

Questões dos vestibulares

V.1 $xy = 2$. **V.2** b. **V.3** b.

Capítulo 31

Exercícios básicos

B.1 6. **B.2** 28. **B.3** 495. **B.4** −21504. **B.5** 1792. **B.6** 45. **B.7** $T = \binom{11}{p}\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^p x^{11-p} \therefore T = \binom{11}{p} 2^p x^{-\frac{p}{2}} x^{11-p} \therefore$ $\therefore T = \binom{11}{p} 2^p x^{\frac{22-3p}{2}}$. Fazendo $\frac{22-3p}{2} = 0$, tem-se $p = \frac{22}{3}$. Como $p \notin \mathbb{N}$, segue-se que $\nexists \binom{11}{p}$. Logo, não existe o termo independente de x. **B.8** −20. **B.9** $160x^9$. **B.10** $-448x^{10}$. **B.11** $-160x^3y^{-3}$.

Exercícios complementares

C.1 13. **C.2** 3420. **C.3** 20.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** e. **V.3** c.

Capítulo 32

Exercícios básicos

B.1 $\frac{1}{2}$. **B.2** $\frac{1}{6}$. **B.3** $\frac{5}{36}$. **B.4** $\frac{2}{5}$. **B.5** $\frac{1}{36}$. **B.6** $\frac{1}{8}$. **B.7** $\frac{1}{4}$. **B.8** $\frac{3}{8}$. **B.9** $\frac{C_{4,2}}{C_{5,3}} = \frac{3}{5}$. **B.10** $\frac{1}{A_{6,3}} = \frac{1}{120}$. **B.11** $\frac{1}{5}$. **B.12** $\frac{35}{76}$. **B.13** a) $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$; b) $\frac{10}{2^{10}} = \frac{10}{1\,024} = \frac{5}{512}$; c) $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$. **B.14** $\frac{1}{C_{50,6}} = \frac{1}{15\,890\,700}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{2}{7}$. **C.2** $\frac{1}{2}$. **C.3** $\frac{1}{10\,000}$. **C.4** $\frac{1}{25\,000}$. **C.5** $\frac{6}{7}$. **C.6** $\frac{1}{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** a. **V.3** a. **V.4** a.

Capítulo 33

Exercícios básicos

B.1 0 (zero). **B.2** 1. **B.3** 82. **B.4** $1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$. **B.5** $1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$. **B.6** $1 - \frac{6}{216} = \frac{210}{216} = \frac{35}{36}$. **B.7** $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. **B.8** $\frac{2}{3}$. **B.9** $1 - \frac{17}{33} = \frac{16}{33}$. **B.10** a) $1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$; b) $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. **B.11** $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Exercícios complementares

C.1 Sejam $P(A) = \frac{n}{3}$, $P(B) = \frac{n-1}{3}$ e $P(C) = \frac{n-2}{3}$. Devemos ter $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, pois $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B = \varnothing$ e $B \cap C = \varnothing$. Logo, $\frac{n}{3} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-2}{3} = 1 \therefore n = 2$. Assim, $P(C) = 0$, isto é, C é o evento impossível ($\varnothing$). Logo, não há crianças com mais de 10 anos. **C.2** $\frac{1}{6}$. **C.3** $\frac{1}{3}$. **C.4** d.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** e. **V.3** c.

Capítulo 34

Exercícios básicos

B.1 $\frac{5}{9}$. **B.2** d. **B.3** b. **B.4** $\frac{4}{5}$. **B.5** e. **B.6** $\frac{11}{17}$. **B.7** $\frac{11}{25}$. **B.8** $\frac{9}{35}$. **B.9** $\frac{667}{1\,000}$. **B.10** $\frac{3}{5}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{4}{13}$. **C.2** 17%. **C.3** $\frac{22}{35}$. **C.4** $\frac{17}{20}$. **C.5** 6%.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** a. **V.3** 3%.

Capítulo 35

Exercícios básicos

B.1 $\frac{5}{9}$. **B.2** $\frac{2}{9}$. **B.3** $\frac{1}{2}$. **B.4** $\frac{5}{13}$. **B.5** $\frac{3}{7}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{4}{7}$. **C.2** $\frac{1}{30}$. **C.3** $\frac{1}{4}$. **C.4** $\frac{1}{C_{25,\,6}} = \frac{1}{177\,100}$.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** e. **V.3** a.

Capítulo 36

Exercícios básicos

B.1 a) $\frac{8}{243}$; b) $\frac{16}{81}$; c) $\frac{64}{729}$. **B.2** a) $\frac{6}{35}$, b) $\frac{18}{35}$; c) $\frac{31}{35}$. **B.3** a) $\frac{10}{21}$; b) $\frac{1}{21}$; c) $\frac{20}{21}$; d) $\frac{37}{42}$. **B.4** $\frac{1}{12}$. **B.5** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; b) $10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$. **B.6** e. **B.7** $\left(\frac{1}{5}\right)^{50}$. **B.8** $\frac{2}{15}$. **B.9** $\frac{1}{5}$. **B.10** $\frac{1}{2}$. **B.11** a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$; c) $\frac{18}{125}$; d) $\frac{36}{125}$. **B.12** a) $\frac{4}{11}$; b) $\frac{7}{11}$; c) $\frac{3}{11}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{22}{35}$. **C.2** 87,5%. **C.3** a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{1}{8}$; d) $\frac{3}{8}$.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** d. **V.3** b.

Capítulo 37

Exercícios básicos

B.1 Uma distribuição possível é:

Classe (em metros)	F	$F\%$
1,685 ——— 1,745	3	18,75%
1,745 ——— 1,815	5	31,25%
1,815 ——— 1,905	5	31,25%
1,905 ——— 1,935	3 $F_t = \sum F = 16$	18,75%

B.2 Uma distribuição possível é:

Classe (em gramas)	F	$F\%$
919,5 ⟝ 930,5	3	15%
930,5 ⟝ 960,5	6	30%
960,5 ⟝ 980,5	6	30%
980,5 ⟝ 1020,5	3	15%
1020,5 ⟝ 1040,5	2 $F_t = \sum F = 20$	10%

B.3 *Gráfico de barras verticais:*

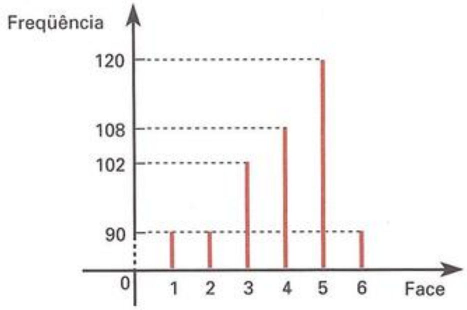


Gráfico de barras horizontais:

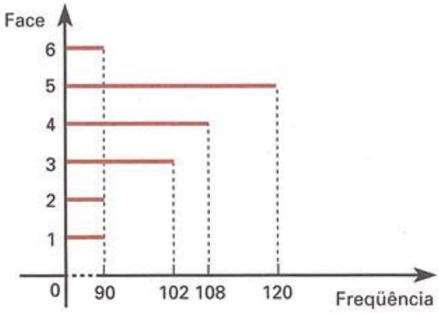
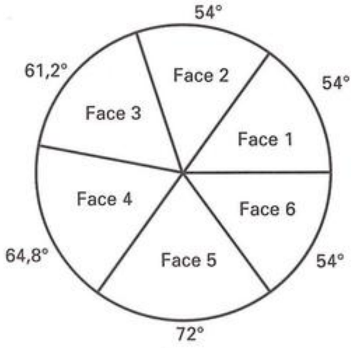


Gráfico por setores:



B.4 *Gráfico de barras verticais:*

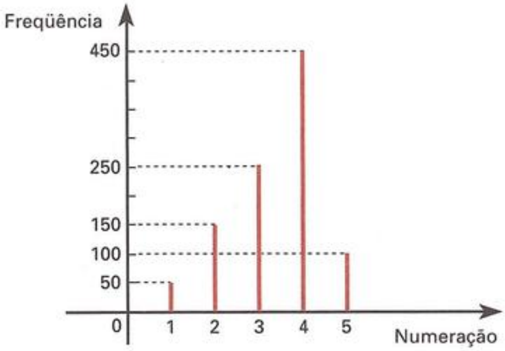


Gráfico de barras horizontais:

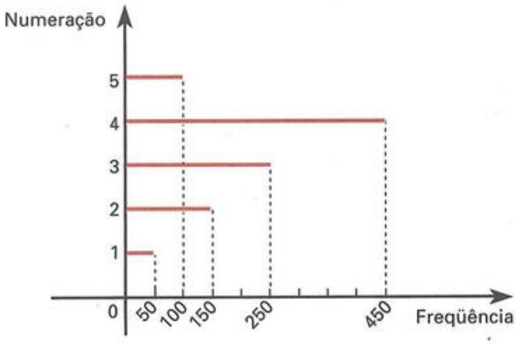
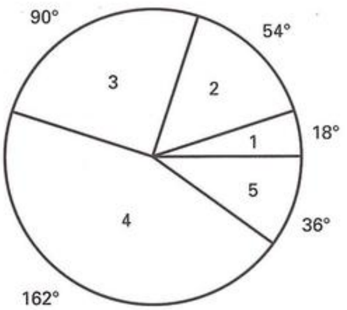


Gráfico por setores:



B.5 Uma distribuição possível é:

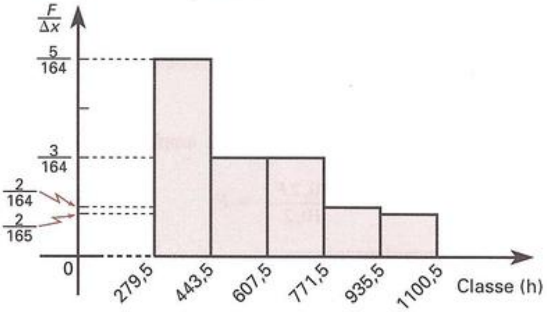
Classe (massa, em gramas)	F	$F\%$
469,5 ——— 480,5	3	20%
480,5 ——— 490,5	3	20%
490,5 ——— 500,5	4	26,666...%
500,5 ——— 510,5	4	26,666...%
510,5 ——— 550,5	1 $F_t = \sum F = 15$	6,666...%

B.6 a) 7 alunos; b) 20 alunos; c) 25%. **B.7** a) 700 garrafas; b) Aproximadamente 57,14%.

B.8 Uma distribuição possível é:

Classe (tempo, em horas)	F
279,5 ——— 443,5	5
443,5 ——— 607,5	3
607,5 ——— 771,5	3
771,5 ——— 935,5	2
935,5 ——— 1 100,5	2

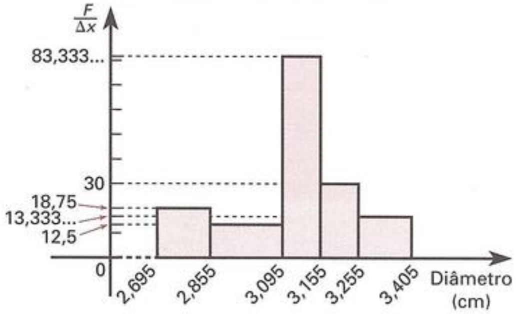
O histograma correspondente é:



B.9 Uma possível distribuição é:

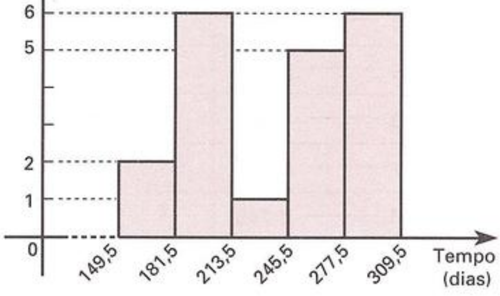
Classe (diâmetro, em centímetros)	F
2,695 ——— 2,855	3
2,855 ——— 3,095	3
3,095 ——— 3,155	5
3,155 ——— 3,255	3
3,255 ——— 3,405	2

O histograma correspondente é:



B.10

Classe (tempo, em dias)	F
149,5 ——— 181,5	2
181,5 ——— 213,5	6
213,5 ——— 245,5	1
245,5 ——— 277,5	5
277,5 ——— 309,5	6

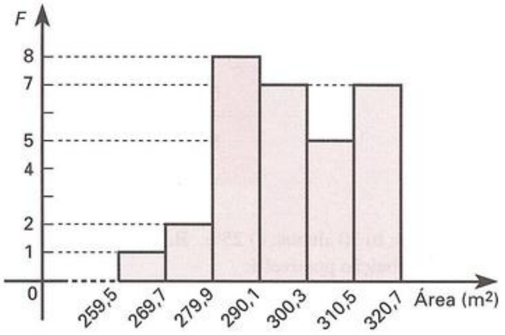


Nota: como as classes têm a mesma amplitude, $\Delta x = 32$, marcamos no eixo das ordenadas os valores $\frac{KF}{\Delta x}$, com $k = \Delta x = 32$.

Assim $\frac{32F}{32} = F$.

B.11

Classe (área, em metros quadrados)	*F*
259,5 ——— 269,7	1
269,7 ——— 279,9	2
279,9 ——— 290,1	8
290,1 ——— 300,3	7
300,3 ——— 310,5	5
310,5 ——— 320,7	7



Nota: como as classes têm a mesma amplitude, $\Delta x = 10{,}2$, marcamos no eixo das ordenadas os valores $\frac{KF}{\Delta x}$, com $K = \Delta x = 10{,}2$. Assim, $\frac{10{,}2F}{10{,}2} = F$.

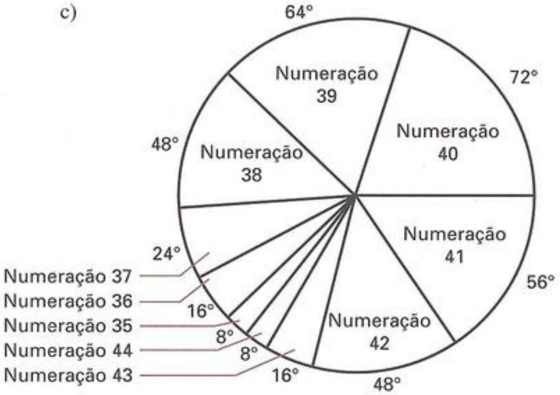
Exercícios complementares

C.1

Classe (numeração das bolas)	*F*	*F*%
1	30	30%
2	45	45%
3	10	10%
4	15 $F_t = \sum F = 100$	15%

C.2 a) 2250 pares; b) 20%;

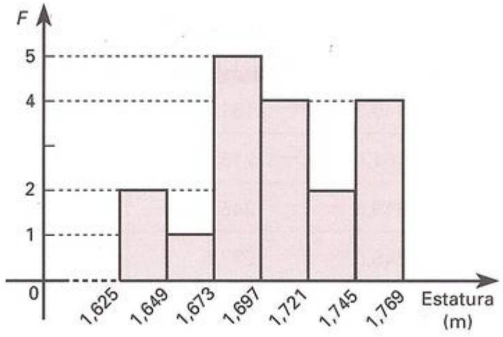
c)



C.3 a) 40 alunos; b) 30 alunos; c) 109 alunos. **C.4** a) 3 alunos; b) 10 alunos; c) 113 alunos.

C.5

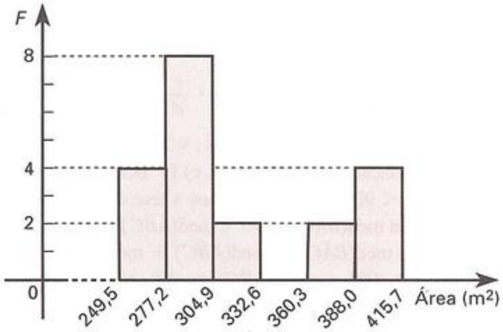
Classe (estatura, em metros)	*F*
1,625 ——— 1,649	2
1,649 ——— 1,673	1
1,673 ——— 1,697	5
1,697 ——— 1,721	4
1,721 ——— 1,745	2
1,745 ——— 1,769	4



Nota: escolhendo 1,625 como extremo inferior da primeira classe e 0,025 como amplitude de classe, obtém-se 1,65 como extremo superior da primeira classe e extremo inferior da segunda classe. Porém, 1,65 é elemento da amostra, portanto essa escolha não é conveniente.

C.6

Classe (área, em metros quadrados)	F
249,5 —— 277,2	4
277,2 —— 304,9	8
304,9 —— 332,6	2
332,6 —— 360,3	0
360,3 —— 388,0	2
388,0 —— 415,7	4



Questões dos vestibulares

V.1 3,333... cm. **V.2** a) 50%, pois a soma dos ângulos centrais dos setores correspondentes é 180º; b) sim, pois o ângulo central do setor correspondente à produção de milho do estado (I) é maior que o ângulo central correspondente à produção de milho do estado (II). **V.3** c.

Capítulo 38

Exercícios básicos

B.1 4. **B.2** 8. **B.3** 7. **B.4** R$ 710,00. **B.5** 6,48. **B.6** 16,325 t. **B.7** 6,15, aproximadamente. **B.8** 248,8 mililitros, aproximadamente. **B.9** a) 23,18 anos, aproximadamente; b) Md = 23 anos; c) Mo = 21 anos. **B.10** a) 168,9 cm; b) 169 cm; c) Mo = 168 e Mo′ = 172. **B.11** a) 81,06 kg, aproximadamente; b) Md = 80,75 kg; c) não existe moda. **B.12** Md = 6,5; Mo = 6,5. **B.13** a) 25 pontos por jogo; b) 3 pontos; c) $\sigma = \sqrt{11} \simeq 3{,}31$, d) $\sigma^2 = 11$. **B.14** a) 2,225 min; b) 0,0015; c) $\sigma = \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-6}} \simeq 0{,}001581$; d) $\sigma^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000025$. **B.15** a) 9; b) 0,5; c) $\sigma \simeq 0{,}62$; d) $\sigma^2 \simeq 0{,}39$. **B.16** a) 167 cm, b) 2,5 cm, c) $\sigma = \sqrt{12{,}5} \simeq 3{,}5$ cm, d) $\sigma^2 = 12{,}5$ cm². **B.17** a) 11,3 meses; b) 1,72 mês; c) $\sigma = \sqrt{8{,}91} \simeq 2{,}98$ meses; d) $\sigma^2 = 8{,}91$. **B.18** a) 1003,5 g; b) 17,6 g; c) $\sigma = \sqrt{376} \simeq 19{,}39$; d) $\sigma^2 = 376$.

Exercícios complementares

C.1 $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$. **C.2** a) $G = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$; b) $G = \sqrt[3]{4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt[3]{48} = 2\sqrt[3]{6}$; c) $G = \sqrt[4]{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[4]{256} = 4$.

C.3 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \therefore a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0 \therefore a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \therefore \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

C.4 a) $\frac{15}{4}$; b) $\frac{36}{13}$; c) $\frac{15}{7}$. **C.5** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0 \therefore a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \therefore \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \therefore$

$\therefore \frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} \therefore \frac{2}{a+b} \leqslant \frac{\sqrt{ab}}{ab} \therefore \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \therefore \frac{1}{\frac{a+b}{\frac{ab}{2}}} \leqslant \sqrt{ab} \therefore \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} \leqslant \sqrt{ab}$. **C.6** 75 km/h.

Questões dos vestibulares

V.1 a) 31; b) 5,7, aproximadamente. **V.2** a) Média = R$ 2.000,00, mediana = R$ 1.500,00; b) a variância da nova distribuição ficará menor. **V.3** a) Média de x: $\bar{x} = 26$. Média de y: $\bar{y} = 26$, b) Desvio padrão de x: $\sigma_x = 14{,}52$. Desvio padrão de y: $\sigma_y = 18{,}00$. Logo, o jogador x teve um desempenho mais regular.

Capítulo 39

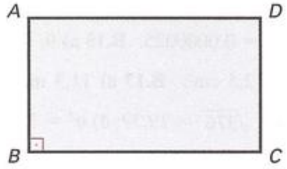
Exercícios básicos

B.1 a) Hipótese: x e y são números ímpares. Tese: $x + y$ é um número par. b) x e y são números ímpares. c) $x + y$ é número par.

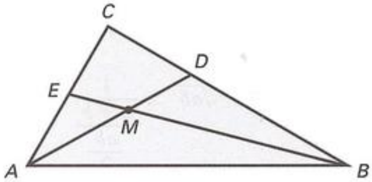
B.2 Se x é ímpar, então existe m, $m \in \mathbb{Z}$, tal que $x = 2m + 1$. Se y é ímpar, então existe k, $k \in \mathbb{Z}$, tal que $y = 2k + 1$. Temos $x + y = 2m + 1 + 2k + 1 = 2m + 2k + 2 = 2(m + k + 1)$. Como $m + k + 1 \in \mathbb{Z}$, temos que $2(m + k + 1)$ é número par. Logo, $x + y$ é par (c.q.d.). **B.3** a) Fazendo $x = 2$ e $y = 4$, temos que $x + y$ é número par $(2 + 4 = 6)$. Assim, para que a soma de dois números seja par, cada um dos números pode ser par. Portanto a afirmação (a) é falsa. b) I. F, II. F. **B.4** a) Hipótese: x e y são números racionais. Tese: xy é número racional. b) x e y são números racionais. c) xy é número racional. **B.5** Se x é número racional, então existem a e b, $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, tal que $x = \frac{a}{b}$. Se y é número racional, então existem c e d, $\{c, d\} \subset \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, tal que $y = \frac{c}{d}$. Temos $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Como $ac \in \mathbb{Z}$ e $bd \in \mathbb{Z}^*$, temos que $\frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$. Logo, xy é número racional (c.q.d.). **B.6** a) Basta fazer $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$, e teremos: $xy = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Assim, xy é racional e x e y são irracionais. Logo, a afirmação (a) é falsa. b) F. c) F. **B.7** Anexamos à hipótese "ABC é um triângulo com med $(B\hat{A}C) > 90°$" a negação de "med$(A\hat{B}C) < 90°$", isto é, negamos a tese do teorema, e devemos chegar a uma contradição. Assim, supomos que ABC é um triângulo com med$(B\hat{A}C) > 90°$ e med$(A\hat{B}C) \geqslant 90°$ (negação da tese). Temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°: med$(B\hat{A}C)$ + med$(A\hat{B}C)$ + med $(B\hat{C}A) = 180°$ **(I)** $\therefore$ med$(B\hat{A}C)$ + med$(A\hat{B}C) = 180°$ − med$(B\hat{C}A)$ **(II)**. Ora, se med$(B\hat{A}C) > 90°$ e med $(A\hat{B}C) > 90°$, concluímos que med$(B\hat{A}C)$ + med$(A\hat{B}C) > 180°$ **(III)**. De (II) e (III), obtemos $180°$ − med$(B\hat{C}A) > 180° \therefore$ −med$(B\hat{C}A) > 0° \therefore$ med$(B\hat{C}A) < 0°$ (absurdo!). Um ângulo interno de um triângulo não pode ter medida negativa. Essa contradição nos garante que a *negação da tese é falsa*. Logo, a *tese* é *verdadeira* (c.q.d.). **B.8** Suponhamos que $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}'$ e $a + b \in \mathbb{Q}$ (negação da tese). Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$\underbrace{a}_{\textbf{Racional}} + \underbrace{b}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{r}_{\textbf{Racional}} \therefore \underbrace{b}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{r}_{\textbf{Racional}} - \underbrace{a}_{\textbf{Racional}}$$

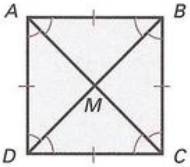
A diferença entre dois racionais é sempre racional. Logo, $\underbrace{b}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{r - a}_{\textbf{Racional}}$ (absurdo!). Essa contradição nos garante que a negação da tese é falsa. Logo, a tese é verdadeira (c.q.d.). **B.9** a) V, b) V, c) F, d) V, e) V. **B.10.** *Primeira parte*: se um paralelogramo é um retângulo, então um de seus ângulos internos é reto. Essa primeira parte é garantida pela própria definição de retângulo, ou seja: retângulo é todo quadrilátero plano que possui todos os ângulos internos retos. *Segunda parte*: se um dos ângulos internos de um paralelogramo é reto, então o paralelogramo é um retângulo. Seja $ABCD$ um paralelogramo cujo ângulo $A\hat{B}C$ é reto. Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.



Temos então que $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ (reto) são consecutivos; logo, $B\hat{A}D$ é reto. Temos também que $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}D$ (reto) são consecutivos; logo, $A\hat{D}C$ é reto. E temos ainda que $D\hat{C}B$ e $A\hat{D}C$ (reto) são consecutivos; logo, $D\hat{C}B$ é reto. Assim, $ABCD$ é um quadrilátero plano com todos os ângulos retos. Logo, $ABCD$ é um retângulo (c.q.d.). **B.11** a) V, b) V, c) F, d) F, e) V. **B.12** *Primeira parte*: existência. Consideremos um triângulo qualquer ABC e as bissetrizes internas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$.



As bissetrizes $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ têm em comum um único ponto M, interior ao triângulo. Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Logo, temos: I. M pertence à bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$; logo, M equidista de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. II. M pertence à bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$; logo, M equidista de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$. Por (I) e (II), temos que M equidista dos três lados do triângulo. *Segunda parte*: unicidade. Suponhamos que exista um outro ponto M' equidistante dos três lados do triângulo ABC. Ora, se M' equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, então M' pertence à bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Se M' equidista dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$, então M' pertence à bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Logo M' é ponto comum às bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Como essas bissetrizes têm um único ponto comum, segue-se que $M' \equiv M$ (c.q.d.). **B.13** *Primeira parte:* existência. Seja M o ponto comum às diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrado $ABCD$. Os triângulos ABM, BCM, CDM e DAM são congruentes pelo caso ALA.



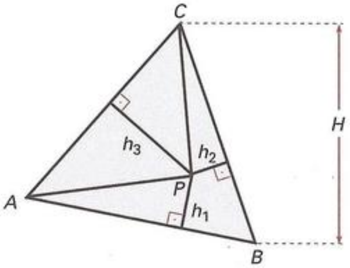
Logo, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ e $\overline{DM}$ são congruentes entre si. Portanto, existe uma circunferência λ de centro M e raio $r = AM = BM = CM = DM$, que passa pelos quatro vértices do quadrado. *Segunda parte:* unicidade. Suponhamos que exista uma outra circunferência λ' que passa pelos quatro vértices do quadrado. Lembrando que, "se um triângulo retângulo está inscrito em uma circunferência, então sua hipotenusa é diâmetro dessa circunferência", temos: I. o triângulo DAB é retângulo em A; logo, $\overline{BD}$ é diâmetro da circunferência λ'; II. o triângulo ABC é retângulo em B; logo, $\overline{AC}$ é diâmetro da circunferência λ'. Por (I) e (II) temos que o centro de λ' é o ponto M e seu raio é $r = AM = BM = CM = DM$. Logo, $\lambda' \equiv \lambda$ (c.q.d.).

Exercícios complementares

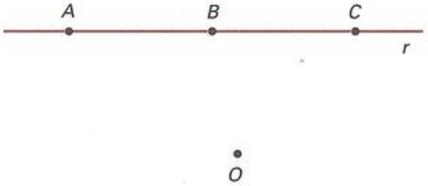
C.1 Consideremos os triângulos APB, BPC e CPD cujas alturas relativas ao vértice P são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3. A soma das áreas dos triângulos APB, BPC e CPA é igual à área do triângulo ABC. Sendo a a medida de cada lado do triângulo equilátero ABC e H a medida de cada uma de suas alturas, temos

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{aH}{2} \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = H$$

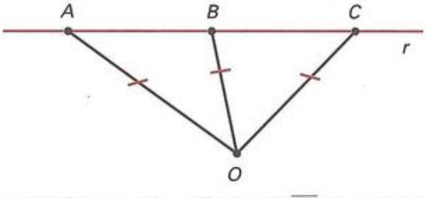
(c.q.d.).



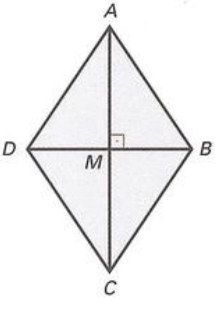
C.2 Suponhamos que r e λ sejam uma reta e uma circunferência, respectivamente, e que r e λ tenham três pontos distintos A, B e C em comum. Sem perda de generalidade, podemos supor que B esteja entre A e C.



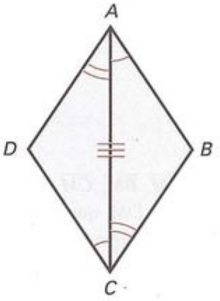
Sendo O o centro de λ, temos $OA = OB = OC$.



No plano que contém r e $\{O\}$, temos: como O equidista de A e B, concluímos que O pertence à mediatriz s de $\overline{AB}$; como O equidista de B e C, concluímos que O pertence à mediatriz t de $\overline{BC}$; logo, $s \perp r$ e $t \perp r$; como A, B e C são pontos distintos e colineares, temos que s e t são retas paralelas distintas (o que é um absurdo, pois $O \in t \cap s$). Logo, r e λ não podem ter mais do que dois pontos distintos em comum (c.q.d.). **C.3** *Primeira parte*: se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si, então os lados desse paralelogramo são congruentes entre si. Sejam $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ diagonais perpendiculares de um paralelogramo $ABCD$ e seja M o ponto comum a essas diagonais.

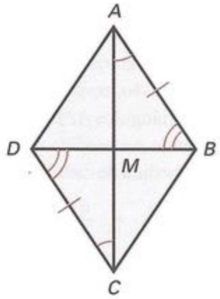


- Os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes pelo caso ALA.



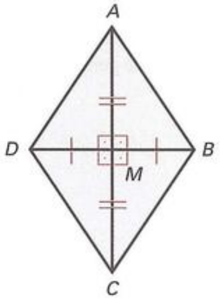
Logo, $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.

- Os triângulos *AMB* e *CMD* são congruentes pelo caso ALA.



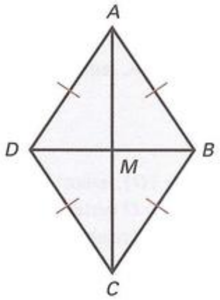
Logo, $\overline{MA} \cong \overline{MC}$ e $\overline{MB} \cong \overline{MD}$, ou seja, *M* é ponto médio de cada diagonal.

- Os triângulos *AMB*, *CMB*, *CMD* e *AMD* são congruentes entre si pelo caso LAL.

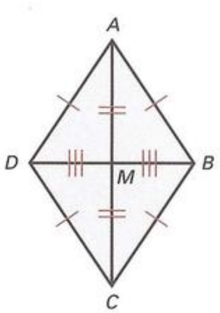


Logo, $\overline{AB} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.

Segunda parte: se os lados de um paralelogramo são congruentes entre si, então suas diagonais são perpendiculares. No paralelogramo *ABCD* temos que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ e *M* é o ponto comum às diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

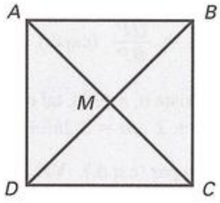


Sabemos que *M* é ponto médio de cada diagonal; logo, os triângulos *AMB*, *CMB*, *CMD* e *AMD* são congruentes entre si pelo caso LLL.

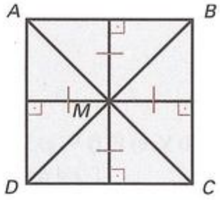


Assim, temos que os ângulos $A\hat{M}B$, $C\hat{M}B$, $C\hat{M}D$ e $A\hat{M}D$ são congruentes entre si. Como os ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}D$ são congruentes e adjacentes suplementares, temos que cada um deles é reto. O mesmo ocorre com os ângulos $C\hat{M}B$ e $C\hat{M}D$ (c.q.d.).

C.4 *Primeira parte*: existência. Seja M o ponto comum às diagonais do quadrado $ABCD$.



Como as diagonais de qualquer paralelogramo se interceptam no ponto médio de cada uma e o quadrado possui as diagonais congruentes, temos que os triângulos ABM, BCM, CDM e DMA são congruentes entre si. Assim, as alturas desses triângulos, relativas ao vértice M, são congruentes entre si.



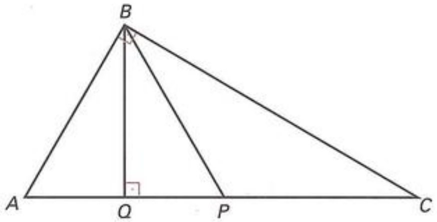
Portanto M equidista dos quatro lados do quadrado. *Segunda parte*: unicidade. Suponhamos que exista um outro ponto M', interior ao quadrado, equidistante dos quatro lados $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$ e $\overline{DC}$. Ora, se M' equidista de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$, então M' pertence à bissetriz de $A\hat{B}C$. Se M' equidista de $\overline{BA}$ e $\overline{DA}$, então M' pertence à bissetriz de $B\hat{A}D$. Como as bissetrizes de $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ têm um único ponto comum, que é exatamente o ponto comum às diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos que $M' \equiv M$ (c.q.d.).

Questões dos vestibulares

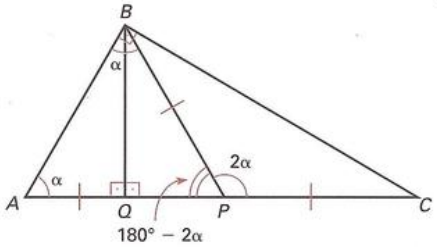
V.1 Hipótese $\begin{cases} \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ são medidas dos ângulos} \\ \text{internos de um triângulo } ABC \text{ e} \\ \alpha = \beta + \gamma. \end{cases}$ Tese {O triângulo ABC é retângulo.

Temos que $\begin{cases} \alpha = \beta + \gamma \ \textbf{(I)} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180° \ \textbf{(II)} \end{cases}$. Substituindo (I) em (II), temos: $\alpha + \alpha = 180° \therefore 2\alpha = 180° \therefore \alpha = 90°$. Logo, o triângulo é retângulo (c.q.d.).

V.2 A mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa. Assim, temos $BP = AP = PC$.



Fazendo med $(B\hat{A}P) = \alpha$ temos que med $(A\hat{B}P) = \alpha$, med $(B\hat{P}C) = 2\alpha$ e med $(B\hat{P}Q) = 180° - 2\alpha$.



No triângulo BPQ temos: $\cos(180° - 2\alpha) = \dfrac{QP}{BP} \Rightarrow -\cos 2\alpha = \dfrac{QP}{BP} \therefore -(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \dfrac{QP}{BP} \therefore \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{QP}{BP}$ **(I)**. No triângulo ABC temos: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$ **(II)** e $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$ **(III)**. Substituindo (II) e (III) em (I), concluímos:

$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{QP}{BP}$ (c.q.d.). **V.3** Hipótese $\begin{cases} a \text{ e } b \text{ são números naturais tais que} \\ a = 1 + b^2 \text{ e } b \text{ é ímpar.} \end{cases}$ Tese $\{\, a$ é par.

Se b é ímpar, então existe n, $n \in \mathbb{N}$, tal que $b = 2n + 1$. Como $a = 1 + b^2$, temos que $a = 1 + (2n + 1)^2 \therefore a = 1 + 4n^2 + 4n + 1 \therefore a = 4n^2 + 4n + 2 \therefore a = 2(2n^2 + 2n + 1)$. Como $n \in \mathbb{N}$, temos que $2n^2 + 2n + 1 \in \mathbb{N}$. Assim, $2(2n^2 + 2n + 1)$ é número par. Logo, a é número par (c.q.d.). **V.4** Substituindo $2a$ por x, temos $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \therefore$

$\therefore \cos x = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \therefore 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x \therefore \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \therefore \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ (c.q.d.).

Capítulo 40

Exercícios básicos

B.1 a) V, b) V, c) F, d) V, e) F, f) V, g) V, h) F, i) V, j) V, k) V, l) F, m) V, n) F, o) V, p) F, q) V, r) V, s) F, t) V, u) F, v) V, w) V, x) F, y) F. **B.2** Hipótese $\begin{cases} r \text{ é reta} \\ \alpha \text{ é plano} \\ r \not\subset \alpha \\ r \cap \alpha \neq \varnothing. \end{cases}$ Tese $\{ r$ e α têm um único ponto comum. Como $r \cap \alpha \neq \varnothing$, temos que existe um ponto A tal que $A \in (r \cap \alpha)$. Para provar que A é único, vamos admitir que exista um outro ponto B, distinto de A, de modo que $B \in (r \cap \alpha)$. Temos então que dois pontos distintos de r pertencem a α. Logo, pelo postulado P. 6, concluímos que $r \subset \alpha$. Mas essa conclusão é absurda, pois contraria a hipótese. Logo, o ponto A é único (c.q.d.). **B.3** Se α e β são planos distintos, têm um ponto comum; então, pelo postulado P. 7, a intersecção de α e β é uma reta r. Assim, se os pontos A, B e C são comuns a α e β, então esses pontos pertencem à reta r e, portanto, são colineares (c.q.d.). **B.4** Dois pontos distintos determinam uma reta. É o que diz o postulado P. 4. Assim sendo, se r e s têm em comum dois pontos distintos, então $r \equiv s$ (c.q.d.). **B.5** e. **B.6** b. **B.7** c. **B.8** a) V, b) F, c) F, d) F, e) V, f) V, g) V, h) F, i) V. **B.9** Sejam dois pontos distintos A e B. O postulado P. 4 nos garante que existe e é única a reta que passa por A e B. O postulado P.2 garante que existem infinitos pontos que não pertencem a r. Seja C um desses pontos. Temos desse modo que A, B e C não são colineares (c.q.d.). **B.10** Sejam A, B e C três pontos não-colineares. O postulado P. 5 nos garante que existe e é único o plano α que passa por A, B e C. O postulado P. 3 nos garante que existem infinitos pontos que não pertencem a α. Seja D um desses pontos. Temos desse modo que A, B, C e D não são coplanares (c.q.d.).

Exercícios complementares

C.1 Duas figuras geométricas F_1 e F_2 coincidem se, e somente se, todo ponto de F_1 pertence a F_2 e todo ponto de F_2 pertence a F_1. Assim sendo, uma reta r não pode coincidir com um plano α, pois, mesmo que todo ponto de r pertença a α, haverá pontos em α que não pertencem a r. **C.2** Seja P o ponto comum a r e s. Como $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, temos que P é ponto comum aos planos distintos α e β. Assim, pelo postulado P. 7, temos que $\alpha \cap \beta$ é uma reta, ou seja, α e β são secantes (c.q.d.).

C.3 Hipótese $\begin{cases} r, s \text{ e } t \text{ são retas distintas entre si} \\ r \cap s = \{A\} \\ r \cap t = \{B\} \\ s \cap t = \{C\} \\ A, B \text{ e } C \text{ são pontos distintos entre si.} \end{cases}$ Tese $\{ r, s$ e t são coplanares.

Temos:

$\begin{cases} \{A\} = r \cap s \\ \{B\} = r \cap t \\ A \text{ e } B \text{ distintos} \end{cases} \therefore \begin{cases} A \in r \\ B \in r \\ A \text{ e } B \text{ distintos} \end{cases} \therefore r = \overleftrightarrow{AB};$ $\begin{cases} \{A\} = r \cap s \\ \{C\} = s \cap t \\ A \text{ e } C \text{ distintos} \end{cases} \therefore \begin{cases} A \in s \\ C \in s \\ A \text{ e } C \text{ distintos} \end{cases} \therefore s = \overleftrightarrow{AC};$

$\begin{cases} \{B\} = r \cap t \\ \{C\} = s \cap t \\ B \text{ e } C \text{ distintos} \end{cases} \therefore \begin{cases} B \in t \\ C \in t \\ B \text{ e } C \text{ distintos} \end{cases} \therefore t = \overleftrightarrow{BC}.$ Como r, s e t são retas distintas entre si e A, B e C são pontos distintos entre si, concluímos que A, B e C não são colineares, pois se fossem teríamos $r \equiv s \equiv t$, o que contraria a hipótese. Logo, pelo postulado P.5, existe e é único o plano $\alpha = \text{pl}(A, B, C)$. Pelo postulado P. 6, temos $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$, ou seja, r, s e t são coplanares (c.q.d.). **C.4** 15 retas. **C.5** 10 planos.

Questões dos vestibulares

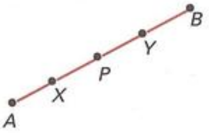
V.1 d. **V.2** e. **V.3** d.

Capítulo 41

Exercícios básicos

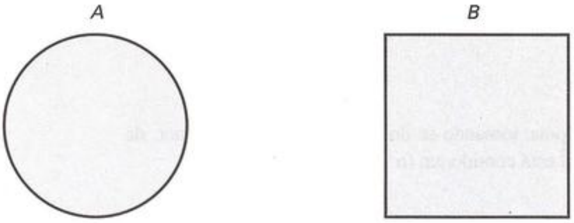
B.1 Seja $A = \{M, N\}$, onde M e N são pontos distintos. Pelo postulado P.11, existe um ponto X tal que X está entre M e N. Ou seja, $X \in \overline{MN}$ e $X \notin A$. Logo, $\overline{MN} \not\subset A$ e, portanto, A não é convexo. **B.2** Seja $\{M\}$, onde M é ponto. Temos que $\overline{MM} = \{M\}$; logo $\overline{MM} \subset \{M\}$ e, portanto, $\{M\}$ é convexo. **B.3** É convexo pois $\forall \{X, Y\}$. Se $\{X, Y\} \subset (\overline{AB} - \{A\})$, então $\overline{XY} \subset (\overline{AB} - \{A\})$.

B.4

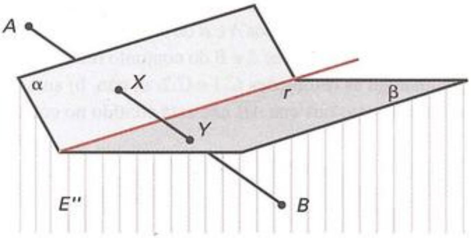


$\overline{AB} - \{P\}$ não é convexo, pois, tomando-se X entre A e P, e Y entre P e B, tem-se que $\overline{XY} \not\subset \overline{AB}$.

B.5 c. **B.6** Não. Por exemplo, considere a reunião dos conjuntos A e B a seguir:



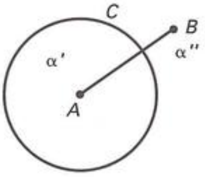
B.7 Sim. Suponhamos dois conjuntos convexos X e Y. Se $X \cap Y = \varnothing$, então $x \cap y$ é convexo, pois convencionamos que $\varnothing$ é um conjunto convexo. Sendo $X \cap Y \neq \varnothing$, tomemos pontos quaisquer A e B tais que: $\begin{cases} A \in X \cap Y \Rightarrow A \in X \text{ e } A \in Y \\ B \in X \cap Y \Rightarrow B \in X \text{ e } B \in Y. \end{cases}$ **I.** Como X é convexo, $A \in X$ e $B \in X$, tem-se que $\overline{AB} \subset X$. **II.** Como Y é convexo e $A \in Y$ e $B \in Y$, tem-se que $\overline{AB} \subset Y$. Por (I) e (II), concluímos que $\overline{AB} \subset X \cap Y$. Logo $X \cap Y$ é convexo. **B.8** • Todo semi-espaço é convexo. E' é a intersecção de dois semi-espaços. No problema B.7 provamos que a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Logo, E' é convexo. • Tomemos os pontos X e Y tais que $X \in \alpha$, $X \notin r$, $Y \in \beta$ e $Y \notin r$. Sejam os pontos A e B tais que X e Y estão entre A e B.



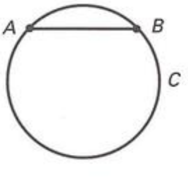
Temos que $A \in E''$, $B \in E''$ e $\overline{AB} \notin E''$. Logo, E'' não é convexo.

Exercícios complementares

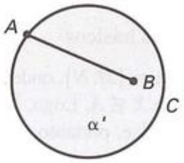
C.1 a) Não, pois se um ponto A pertence a α' e um ponto B pertence a α'', então o segmento $\overline{AB}$ passa por um ponto de C. Logo $\overline{AB} \not\subset (\alpha' \cup \alpha'')$.



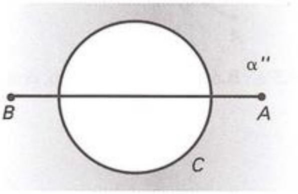
b) Não, pois se A e B são pontos distintos quaisquer de C, o segmento $\overline{AB}$ não está contido em C.



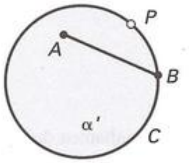
c) $\alpha' \cup C$ é convexo pois, se A e B são pontos quaisquer de $\alpha' \cup C$, então $\overline{AB} \subset (\alpha' \cup C)$.



d) $\alpha'' \cup C$ não é convexo, pois, tomando-se dois pontos A e B tais que exista X, $X \in \alpha'$ e $X \in \overline{AB}$, temos que $\overline{AB} \not\subset (\alpha'' \cup C)$.

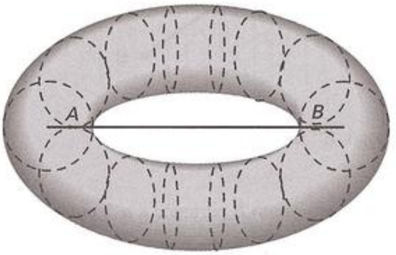


e) $(\alpha' \cup C) - \{P\}$ é convexo pois, tomando-se dois pontos A e B, quaisquer, de $(\alpha' \cup C) - \{P\}$, o segmento $\overline{AB}$ está contido em $(\alpha' \cup C) - \{P\}$.



f) $(\alpha' \cup C) - \{Q\}$ não é convexo, pois, tomando-se dois pontos A e B de $(\alpha' \cup C) - \{Q\}$ de modo que $Q \in \overline{AB}$, temos que $\overline{AB} \not\subset (\alpha' \cup C) - \{Q\}$.

C.2 a) Sim, pois, tomando-se quaisquer dois pontos A e B do conjunto remanescente, o segmento $\overline{AB}$ está contido nesse conjunto; b) Não, pois o ponto retirado está entre dois pontos A e B do conjunto remanescente e, portanto, o segmento $\overline{AB}$ não está contido nesse conjunto; c) Sim, pois, tomando-se quaisquer dois pontos A e B do conjunto remanescente, o segmento $\overline{AB}$ está contido nesse conjunto; d) Não, pois o ponto retirado está entre dois pontos A e B do conjunto remanescente e, portanto, o segmento $\overline{AB}$ não está contido nesse conjunto. **C.3** Resolução análoga às resoluções C.1 e C.2. a) não. b) sim. c) sim. d) não. e) não. f) sim. **C.4** Não, pois existem pontos A e B pertencentes ao conjunto tais que $\overline{AB}$ não está contido no conjunto.



C.5 Sim, pois, tomando-se dois pontos quaisquer A e B do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está contido no conjunto. **C.6** Sim, pois tomando-se dois pontos quaisquer A e B do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está contido no conjunto.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** a.

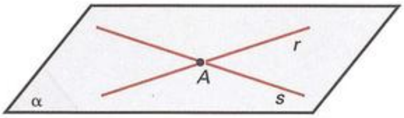
Capítulo 42

Exercícios básicos

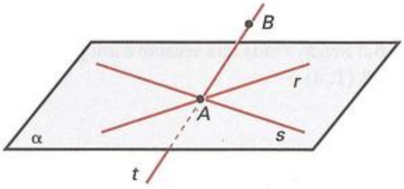
B.1 a) V, b) V, c) F, d) V, e) F, f) V, g) V, h) F, i) V, j) V, k) F, l) V, m) F, n) V, o) V, p) F. **B.2** a) F, b) V, c) V, d) V, e) F, f) F, g) V, h) V, i) F, j) V, k) F, l) F, m) V, n) F, o) V. **B.3** *Primeira parte:* existência. Por definição, duas retas paralelas distintas devem ser coplanares e $r \cap s = \varnothing$. Assim, existe um plano α que contém duas retas paralelas distintas. *Segunda parte:* unicidade. Suponhamos que exista um outro plano α' contendo r e s. Sejam os pontos A, B e C distintos entre si, tais que $\{A, B\} \subset r$ e $C \in s$.

Temos que A, B e C não são colineares e $\{A, B, C\} \subset \alpha'$; logo, $\alpha' = \text{pl}(A, B, C)$, pelo postulado P. 5; A, B e C não são colineares e $\{A, B, C\} \subset \alpha$; logo, $\alpha = \text{pl}(A, B, C)$, pelo postulado P.5. Portanto $\alpha' \equiv \alpha$ (c.q.d.). **B.4** a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V, g) F, h) F. **B.5** Hipótese $\begin{cases} r, s \text{ e } t \text{ são retas coplanares} \\ r \parallel s \text{ e } s \parallel t. \end{cases}$ Tese $\{r \parallel t$. Se duas dessas retas coincidirem, a demonstração é imediata.

Suponhamos que r, s e t sejam distintas entre si. Como r e t são coplanares, temos duas e apenas duas alternativas: ou $r \parallel t$ ou r é concorrente com t. A segunda alternativa é absurda, pois, se $r \parallel s$ (hipótese) e t concorrente com r, temos t concorrente com s (exercício R.3), o que contraria a hipótese ($s \parallel t$). Resta, portanto, apenas a possibilidade $r \parallel t$. (c.q.d.). **B.6** a) F, b) V, c) F, d) V, e) F, f) V, g) F, h) V. **B.7** Não. Tomemos duas retas r e s concorrentes no ponto A. As retas r e s determinam o plano α.



Pelo postulado P.3, existem infinitos pontos que não pertencem a α. Seja B um desses pontos. Pelo postulado P. 4, A e B determinam uma reta t:



As retas r, s e t são distintas entre si, concorrentes duas a duas e não são coplanares. **B.8** a) F, b), V, c) F, d) V, e) F, f) V.

B.9 4 planos. **B.10** Hipótese $\begin{cases} r, s \text{ e } t \text{ são retas} \\ r \parallel s \\ r \text{ concorre com } t \\ s \text{ concorre com } t. \end{cases}$ Tese $\{r, s \text{ e } t$ são coplanares. Se r coincide com s, a demonstração é imediata.

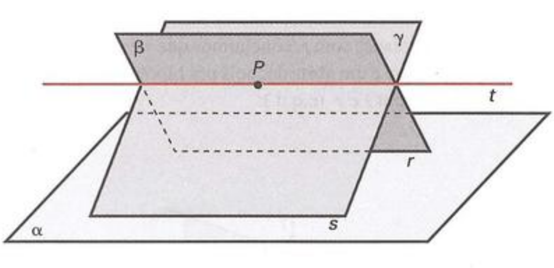
Suponhamos que r e s sejam distintas. Como r e s são paralelas distintas, existe um único plano α que contém r e s. Sejam: A o ponto tal que $r \cap t = \{A\}$ e B o ponto tal que $s \cap t = \{B\}$. Temos $A \in r$ e $r \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$; $B \in s$ e $s \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha$. Logo, A e B são pontos distintos do plano α. Então, pelo postulado P. 6, concluímos que $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$. Mas $\overleftrightarrow{AB} = t$; logo, $t \subset \alpha$. Assim, r, s e t são retas contidas em α e, portanto, coplanares (c.q.d.).

Exercícios complementares

C.1 a) F, b) V, c) F, d) F, e) V. **C.2** $r \parallel s$. **C.3** Sejam $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ as diagonais de um quadrilátero reverso $ABCD$. Suponhamos que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ não fossem reversas. Então, teríamos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ou $\overleftrightarrow{AB}$ concorrente com $\overleftrightarrow{BC}$. Porém essas duas suposições são absurdas, pois em ambos os casos os quatro pontos A, B, C e D seriam coplanares, o que contraria a hipótese de o quadrilátero ser reverso. Logo, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são reversas (c.q.d.). **C.4** a) V, b) F, c) V, d) F.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d. **V.3** d. **V.4** c. **V.5** a) Duas retas r e s são paralelas se, e somente se, são coplanares e não têm ponto comum ($r \cap s = \varnothing$) ou são coincidentes ($r \equiv s$). b) Sejam $\alpha = \text{pl}(r, s)$, $\beta = \text{pl}(r, P)$, $\gamma = \text{pl}(s, P)$ e $t = \beta \cap \gamma$.



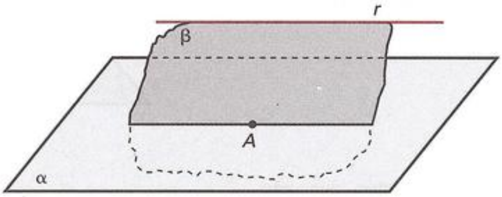
As retas t e r são coplanares. Logo, ocorre uma, e apenas uma, das alternativas: t concorre com r (**I**); ou $t \parallel r$. (**II**). Se t concorre com r, então existe um único ponto Q tal que $t \cap r = \{Q\}$. Assim: $\begin{cases} Q \in t \text{ e } t = \beta \cap \gamma \Rightarrow Q \in \beta \cap \gamma \\ Q \in r \text{ e } r \subset \alpha \Rightarrow Q \in \alpha. \end{cases} \therefore$

$\therefore Q \in \beta \cap \gamma \cap \alpha \Rightarrow Q \in \beta$ e $Q \in \gamma \cap \alpha$. Como $\gamma \cap \alpha = s$, temos $Q \in s$. Concluímos então que as retas r, s e t têm em comum o ponto Q, o que é um absurdo, pois, por hipótese, r e r são paralelas distintas. Portanto a alternativa (I) é impossível, restando apenas a alternativa (II), ou seja, $t \parallel r$. De modo análogo, prova-se que $t \parallel s$ (c.q.d.).

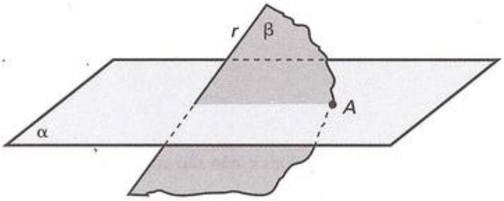
Capítulo 43

Exercícios básicos

B.1 a) V, b), V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) V, h) F, i) V, j) V, k) F, l) V. **B.2** Sendo r uma reta paralela a um plano α, tomemos um ponto A, $A \in \alpha$. A reta r e o ponto A determinam um plano β (T. 4).



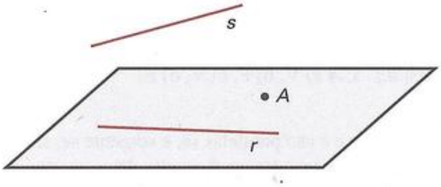
Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm um ponto A em comum. Logo, pelo postulado P. 7, α e β são secantes. (c.q.d.) **B.3** Sendo r uma reta secante a um plano α, tomemos um ponto A tal que $A \in \alpha$ e $A \notin r$. A reta r e o ponto A determinam um plano β (T. 4).



Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm um ponto A em comum. Logo, pelo postulado P. 7, α e β são secantes. **B.4** a) F, b) V, c) F, d) V, e) F, f) F, g) V, h) F, i) F, j) V. **B.5** r pode ser secante ao plano ou pode estar contida no plano. **B.6** r pode ser paralela a s ou reversa a s. **B.7** r pode ser paralela a α ou estar contida em α. **B.8** Se existisse um plano β contendo r e s, teríamos que r e s seriam coplanares e não teriam ponto comum, pois $r \parallel \alpha$ e $s \subset \alpha$. Assim, r e s seriam paralelas, o que contraria a hipótese. Logo, r e s não são coplanares, ou seja, são reversas (c.q.d.). **B.9** Demonstração imediata pelo problema R. 6. **B.10** a) V, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) V.

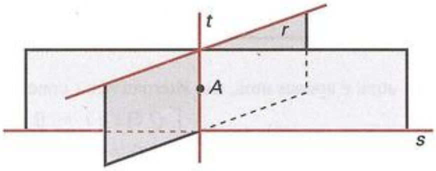
Exercícios complementares

C.1



Suponhamos que exista uma reta t que passa por A e concorre com as retas r e s. Se t concorre com r, então existe e é único o plano pl(r, t). Como s concorre com t, e não é coplanar com r, concluímos que s é secante ao plano pl(r, t). Mas pl(r, t) = pl(r, A). Temos então que s é secante ao plano pl(r, A), o que é um absurdo, pois por hipótese temos que s é paralela ao plano pl(r, A). Logo, não existe uma reta que passa por A e concorre com s e r (c.q.d.).

C.2



Como as retas r e s são reversas, os planos pl(r, A) e pl(s, A) são distintos. Esses planos têm o ponto A em comum; logo, pelo postulado P.7, são planos secantes segundo uma reta t que passa por A. Sendo t a reta comum aos planos pl (r, A) e pl(s, A), temos que t é coplanar com r. Desse modo, deve ocorrer uma, e apenas uma, das alternativas: $t \parallel r$ **(I)**; ou t concorre com r **(II)**. Como $t \subset$ pl(s, A) e r não é paralela a pl(s, A), concluímos que r não é paralela a t (T.12). Logo, resta a alternativa (II), ou seja, t concorre com r (c.q.d.). **C.3** A reta s é secante a α. **C.4** Não, pois uma reta contida em α é paralela a β e não é paralela a α. **C.5** Não, pois a reta r pode ser secante aos planos e concorrentes com t.

Questões dos vestibulares

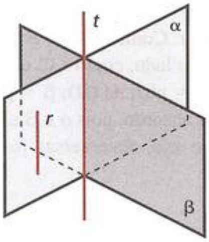
V.1 c. **V.2** d. **V.3** b.

Capítulo 44

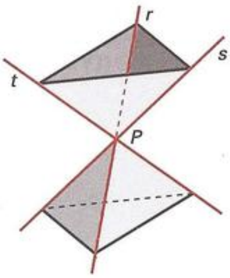
Exercícios básicos

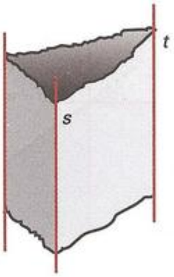
B.1 a) V, b) V, c) V, d) F, e) V, f) V, g) F, h) V. **B.2** a) V, b) F, c) V, d) F, e) F, f) V, g) F, h) V, i) V, j) F, k) V, l) V, m) F.
B.3. Não, pois os planos podem ser paralelos coincidentes.

B.4



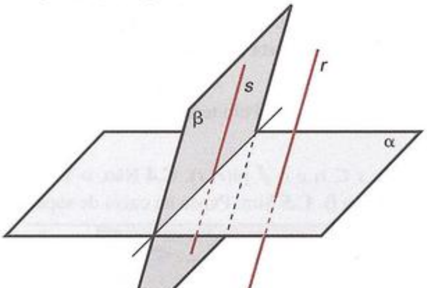
Como r e t são coplanares, temos que ocorre uma, e apenas uma, das alternativas: r é concorrente com t **(I)**; ou $r \parallel t$ **(II)**. Se r é concorrente com t, então existe um único ponto P tal que $\{P\} = r \cap t$. Essa alternativa é absurda, pois, se $P \in r \cap t$ e $t \subset \beta$, temos que $P \in r$ e $P \in \beta$, o que contraria a hipótese ($r \parallel \beta$). Assim, resta apenas a segunda alternativa, ou seja, $r \parallel t$ (c.q.d.). **B.5** A reta $\overleftrightarrow{AB}$. **B.6** Não, pois o teorema 22 (exercício R.8) nos garante que existem duas, e apenas duas, possibilidades: ou r, s e t concorrem num mesmo ponto P ou r, s e t são paralelas distintas.





Logo, os planos podem ter um ou nenhum ponto comum. **B.7** $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$, onde P é um ponto, ou $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$. **B.8** Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro (T. 19). Ora, α e γ são planos distintos paralelos e $t \subset \alpha$, logo $t \parallel \gamma$ (c.q.d.).

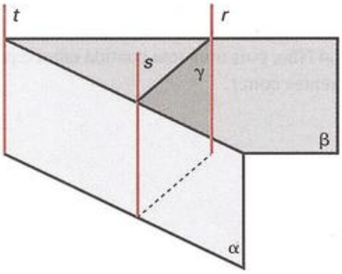
B.9



Seja s uma reta contida em β e $s \parallel r$ (T.12). Se r é secante a α e $r \parallel s$, então s é secante a α (T. 16). Os planos α e β são distintos, pois r é secante a α e $r \parallel \beta$, e têm um ponto comum, pois s é secante a α e $s \subset \beta$. Logo, pelo postulado P. 7, α e β são secantes (c.q.d.).

B.10 α e β são secantes.

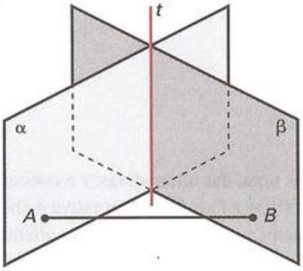
B.11 Não, pois α e β podem ser secantes segundo uma reta t e $\gamma \parallel t$.



B.12 a) F, b) V, c) V, d) V, e) F, f) V, g) F, h) F, i) F, j) V, k) F, l) F, m) F, n) F. **B.13** Os planos pl(r, s) e pl(u, v) são coincidentes.

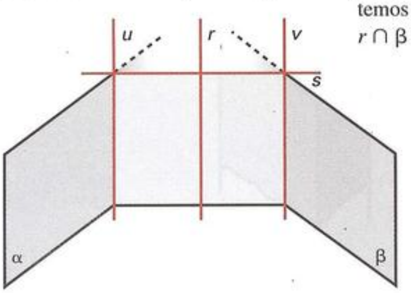
B.14 Paralelas (coincidentes ou distintas).

B.15 Suponhamos que $\overleftrightarrow{AB}$ e t não sejam reversas. Assim sendo, existe um plano γ que contém $\overleftrightarrow{AB}$ e t. Como $A \notin t$ e $B \notin t$, podemos afirmar que $\gamma = \text{pl}(t, A) = \text{pl}(t, B)$ **(I)**. Por outro lado, como $t \subset \alpha$, $t \subset \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $A \notin t$ e $B \notin t$, podemos garantir que $\alpha = \text{pl}(t, A)$ **(II)**; $\beta = \text{pl}(t, B)$ **(III)**. Por (I), (II) e (III) temos $\gamma = \beta = \alpha$, o que é um absurdo, pois α e β são, por hipótese, secantes. Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ e t não são coplanares, ou seja, são reversas (c.q.d.).



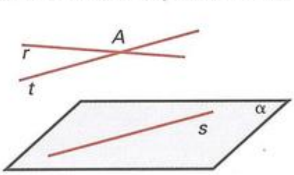
Exercícios complementares

C.1 As retas u e r são coplanares, pois $u = \text{pl}(r, s) \cap \alpha$ **(I)**. Como $r \cap \alpha = \varnothing$ e $u \subset \alpha$, temos que $r \cap u = \varnothing$ **(II)**. Por (I) e (II), temos $r \parallel u$. As retas v e r são coplanares, pois $v = \text{pl}(r, s) \cap \beta$ **(III)**. Como $r \cap \beta = \varnothing$ e $v \subset \beta$, temos que $r \cap v = \varnothing$ **(IV)**. Por (III) e (IV) temos $r \parallel v$ (c.q.d.).

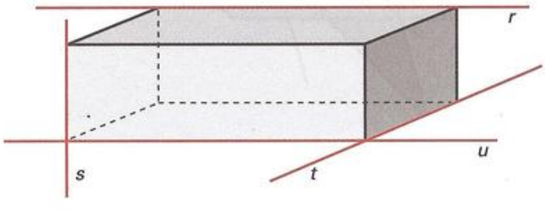


C.2 Hipótese $\begin{cases} r \text{ é uma reta paralela a um plano } \alpha. \\ s \parallel r \text{ e } s \not\subset \alpha. \end{cases}$ Tese $\{s \parallel \alpha$. Existe uma reta t, $t \subset \alpha$, tal que $r \parallel t$ (T. 12). Temos então $r \parallel t$ e $r \parallel s \Rightarrow s \parallel t$ (T. 23). Logo, como $s \not\subset \alpha$ e s é paralela à reta t de α, concluímos que $r \parallel \alpha$ (T.12) (c.q.d.).

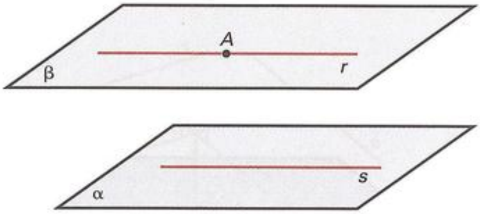
C.3 Pelo teorema T. 15, existe um único plano α que contém s e é paralelo a α. Seja a reta t paralela a α e concorrente com r.



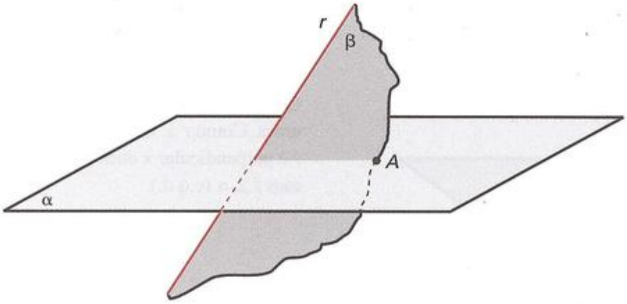
Temos então que: $\begin{cases} r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \\ r \parallel \alpha \\ t \parallel \alpha. \end{cases}$ Pelo teorema T. 20, o plano pl(r, t) é paralelo a α. Assim, $r \subset \text{pl}(r, t)$, $s \subset \alpha$ e $\alpha \parallel \text{pl}(r, t)$. **C.4** Não, o T. 15 garante a unicidade de cada um dos planos α e β. **C.5** Sim. Pense na caixa de sapatos:



C.6 Com o auxílio do T.18 provaremos simultaneamente a existência e a unicidade. Existe s, $s \subset \alpha$ e $s \parallel r$ (T. 12). Existe *um único* plano β que passa por A, $A \in r$, e é paralelo a α (T. 18). $s \parallel \beta$, $r \parallel s$ e $A \in \beta \Rightarrow r \subset \beta$ (T.13). Logo, existe e é único o plano β. Note que a unicidade fica garantida pelo (T. 18).



C.7 *Primeiro caso*: r é secante a α.



Tomemos um ponto A tal que $A \in \alpha$ e $A \notin r$. O plano $\beta = \text{pl}(r, A)$ é distinto de α, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e tem o ponto A em comum com α. Logo, pelo postulado P. 7, α e β são secantes. O segundo e o terceiro caso são análogos (c.q.d.).

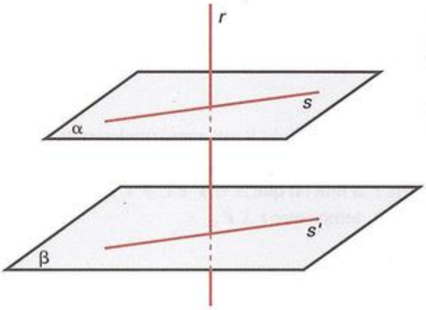
Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** b. **V.3** e.

Capítulo 45

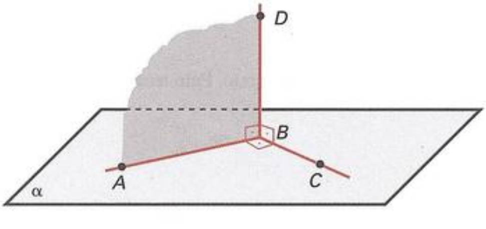
Exercícios básicos

B.1 a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) F, g) F, h) V, i) V, j) V, k) F, l) V, m) V. **B.2** Se $\alpha \equiv \beta$, então $r \perp \beta$, pois $r \perp \alpha$. Suponha-se $\alpha \not\equiv \beta$. Se α e β são paralelos e r é secante a α, então r é secante a β (T. 16). Qualquer que seja s, $s \subset \alpha$ e s concorrente com r, temos $s \perp r$ (definição de reta perpendicular a plano). Tomemos s', $s' \subset \beta$ e $s' \parallel s$. Os ângulos correspondentes formados por s, s' e r são congruentes. Logo, $s \perp r \Rightarrow s' \perp r$. Assim, r é perpendicular a qualquer reta s', $s' \subset \beta$ e s' concorrente com r. Ou seja, $r \perp \beta$ (c.q.d.). **B.3** e. **B.4** a) F, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) F, h) F, i) V, j) V, k) F, l) V. **B.5** d. **B.6** a. **B.7** a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) V, g) V, h) F, i) F, j) V.

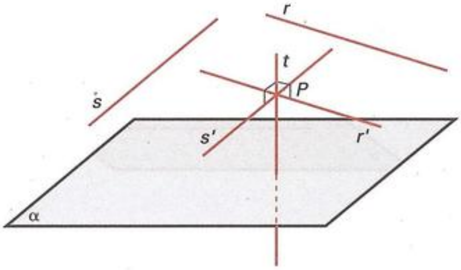


B.8 Se $\overleftrightarrow{DB}$ é perpendicular a α, então $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Temos então: $\begin{cases} \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DB} \end{cases}$.

Logo, pelo (T. 30), temos $\overleftrightarrow{BC} \perp \text{pl}\,(A, D, B)$ (c.q.d.).



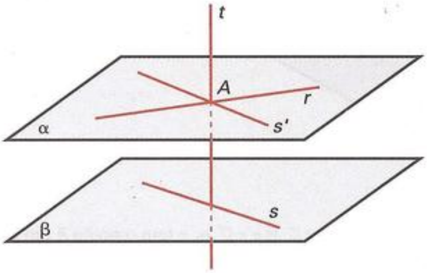
B.9



Seja P um ponto da reta t e sejam s' e r' retas que concorrem em P e $s' \parallel s$ e $r' \parallel r$. Temos que $t \perp s'$ e $t \perp r'$, por definição de retas ortogonais. Logo, $t \perp \text{pl}(s', r')$, pelo T. 30. Temos ainda que $\text{pl}(s', r') \parallel \alpha$, pelo T.20. Portanto, pelo exercício B.2, temos $t \perp \alpha$ (c.q.d.). **B.10** Um único. **B.11** Sim, pelo T.31.

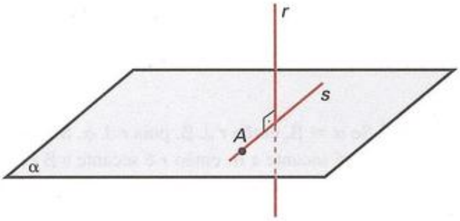
Exercícios complementares

C.1



Sejam o ponto A e a reta s' tais que $\{A\} = t \cap r$, $s' \subset \alpha$ e $s' \parallel s$. Os ângulos correspondentes formados por s, s' e t são congruentes. Como $t \perp s$, temos que $t \perp s'$. Por hipótese, $t \perp r$. Assim, t é perpendicular a duas retas concorrentes de α. Pelo T. 30, temos $t \perp \alpha$ (c.q.d.).

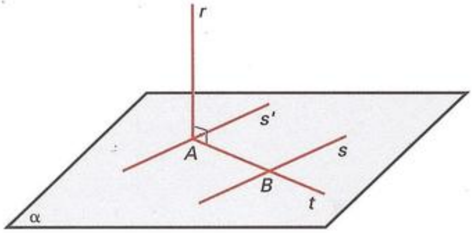
C.2



Como $r \perp \alpha$, então r é perpendicular a todas as retas contidas em α e concorrentes com r. Seja s' tal que $s' \subset \alpha$, $A \in s'$ e $s' \perp r$. Como $A \notin r$, existe uma única reta que passa por A e é perpendicular a r.

Temos que: $\begin{cases} A \in s \text{ e } s \perp r \\ A \in s' \text{ e } s' \perp r \end{cases} \Rightarrow s \equiv s'$. Portanto $s \subset \alpha$ (c.q.d.).

C.3



Primeira parte: existência. Seja B um ponto qualquer da reta s. Existe uma única reta t concorrente com s em B e perpendicular a r em A. Seja s' a reta tal que $A \in s'$ e $s' \parallel s$. Por definição de retas ortogonais, temos que $r \perp s'$.

Assim: $\begin{cases} r \perp s' \\ r \perp t \\ t \text{ concorrente com } s' \end{cases} \Rightarrow r \perp \text{pl}(t, s')$, pelo T. 30.

Como $s \parallel s'$, $B \in s$ e $B \in \alpha$, então $s \subset \alpha$ (T.13). Logo, existe o plano $\alpha = \text{pl}(t, s')$ que contém s e é perpendicular a r. *Segunda parte:* unicidade. Suponhamos que exista um outro plano α' contendo s e perpendicular a r. Como $r \perp \alpha$ e $r \perp \alpha'$, temos (pelo exercício B.2) que $\alpha \parallel \alpha'$. Seja M um ponto de s. Como $M \notin r$, existe uma única reta u que passa por M e é perpendicular a r. Assim, $u \subset \alpha$ e $u \subset \alpha'$ (pelo exercício C.2).

Assim, $\begin{cases} \alpha \parallel \alpha' \\ u \subset (\alpha \cap \alpha') \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \alpha'$ (c.q.d.). **C.4** O ângulo é reto. Pelo teorema das três perpendiculares (T. 32). **C.5** d. **C.6** b.

Questões dos vestibulares

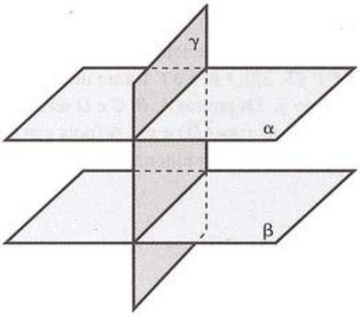
V.1 c. **V.2** e. **V.3** d.

Capítulo 46

Exercícios básicos

B.1 a) V, b) V, c) F, d) V, e) F, f) V, g) V, h) F.

B.2

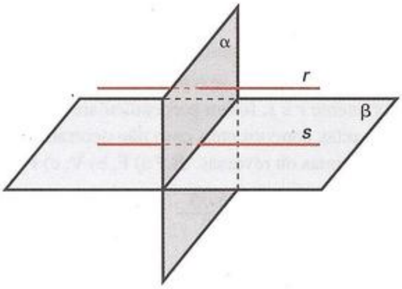


Como γ é perpendicular a α, existe uma reta r, $r \subset \gamma$ e $r \perp \alpha$. Temos, pelo exercício B.2 do capítulo 45, que: $\begin{cases} r \perp \alpha \\ \alpha /\!/ \beta \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow r \perp \beta$. Assim, a reta r, $r \subset \gamma$, é perpendicular a β.

Logo, $\gamma \perp \beta$ (c.q.d.).

B.3 a) F, b) V, c) V, d) F, e) V, f) V, g) V, h) F. **B.4** c.

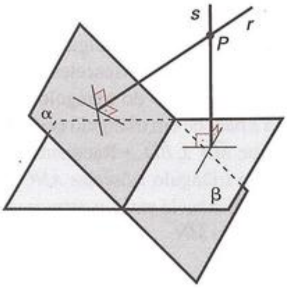
B.5



Existe s, $s \subset \beta$ e $s /\!/ r$ (T. 13). Como $r /\!/ s$ e $r \perp \alpha$, temos $s \perp \alpha$ (T.33). Logo, existe s, $s \subset \beta$ e $s \perp \alpha$ e, portanto, $\beta \perp \alpha$ (c.q.d.).

B.6 b. **B.7** a) V, b) F, c) F, d) V, e) F.

B.8



Sejam r e s retas tais que $r \cap s = \{P\}$, $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. O plano $\gamma = \text{pl}(r, s)$ é perpendicular a α e a β, pois: $\begin{cases} r \subset \gamma \text{ e } r \perp \alpha \\ s \subset \gamma \text{ e } s \perp \beta \end{cases}$

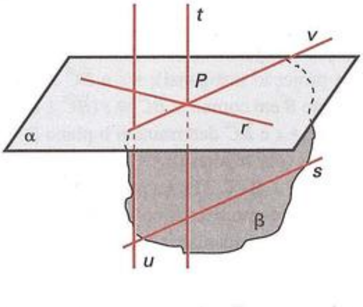
(c.q.d.).

B.9 A unicidade de γ fica garantida pelo fato de existir uma única reta r, $P \in r$ e $r \perp \alpha$, e uma única reta s, $P \in s$ e $s \perp \beta$.

B.10 r deve ser perpendicular ou ortogonal à reta t comum a α e β.

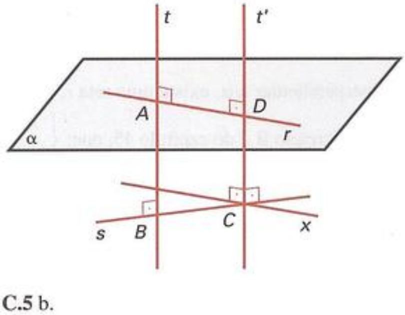
Exercícios complementares

C.1 c. **C.2**



• Existe um único plano α que contém r e é paralelo a s (T. 15); • existe um único plano β que contém s e é perpendicular a α (T. 38); • a reta v, $v = \alpha \cap \beta$, é paralela a s, pois v e s são coplanares ($v \subset \beta$ e $s \subset \beta$), $v \subset \alpha$ e $s /\!/ \alpha$; • a reta r não é paralela a v, pois, caso contrário, teríamos $r /\!/ v$ e $v /\!/ s \Rightarrow r /\!/ s$, o que é absurdo, pois r e s são reversas; • como r e v são coplanares e não-paralelas, temos que r e v concorrem num ponto P; • como $\beta \perp \alpha$, existe uma reta u, $u \subset \beta$ e $u \perp \alpha$; • seja t reta que passa por P e é paralela a u (P. 15); • $u \subset \beta$, $P \in \beta$, $t /\!/ u$ e $P \in t \Rightarrow t \subset \beta$ (T. 13); • $t \perp \alpha$, $v \subset \alpha$ e v concorre com $t \Rightarrow$ $\Rightarrow t \perp v$ (definição de reta perpendicular a plano); • $s /\!/ v$ e $t \perp v \Rightarrow t \perp s$ (ângulos correspondentes congruentes); • $t \perp \alpha$, $r \subset \alpha$ e r concorrente com $t \Rightarrow t \perp r$. Portanto existe uma reta t perpendicular a r e s simultaneamente (c.q.d.).

C.3



• Suponhamos que exista uma outra reta t' perpendicular a r e s; • sejam os pontos A, B, C e D tais que $\{A\} = r \cap t$, $\{B\} = t \cap s$, $\{C\} = s \cap t'$ e $\{D\} = r \cap t'$; • seja x a reta paralela a r, que passa por C. A reta x é perpendicular à reta t' (ângulos correspondentes congruentes); • a reta t' é perpendicular ao plano pl(s, x) (T. 30); • pl(s, x) $/\!\!/$ α (T. 20); • pl(s, x) $/\!\!/$ α e $t' \perp$ pl(s, x) $\Rightarrow t' \perp \alpha$ (exercício B.2, capítulo 45); • $t \perp \alpha$ e $t' \perp \alpha \Rightarrow t /\!\!/ t'$ (T. 33); • se t e t' forem distintas, então determinam um plano γ. Os pontos A, B, C e D serão, portanto, coplanares, $r \subset \gamma$ (pois $r \equiv \overleftrightarrow{AD}$) e $s \subset \gamma$ (pois $s \equiv \overleftrightarrow{BC}$), o que é um absurdo, pois r e s são ortogonais. Logo, $t' \equiv t$ (c.q.d.).

C.4 a. **C.5** b.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** a. **V.3** c. **V.4** a.

Capítulo 47

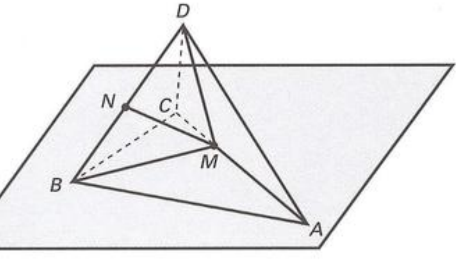
Exercícios básicos

B.1 a) 18 cm; b) 18 cm; c) $18\sqrt{3}$ cm; d) 30º; e) 18 cm; f) obtemos a diagonal $\overline{DF}$ do retângulo $CDEF$; g) obtemos o triângulo AHE. **B.2** I. um par de retas concorrentes, se pl(r, s) não for perpendicular a α; II. ou uma reta, se o plano pl(r, s) for perpendicular a α. **B.3** I. duas retas paralelas, se os planos paralelos, que contêm respectivamente r e s, forem perpendiculares a α; II. ou uma reta e um ponto fora dela, se uma das retas for perpendicular a α; III. ou duas retas concorrentes, caso não ocorram os itens (I) e (II). **B.4** Um triângulo. **B.5** Paralelas distintas. **B.6** r e s podem ser paralelas distintas ou reversas. **B.7** a) F, b) V, c) F, d) V, e) F, f) V. **B.8** 60º. **B.9** 30. **B.10** 16 cm. **B.11** 140º. **B.12** 3 cm. **B.13** a) $3\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm. **B.14** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. **B.15** 150º. **B.16** 8 cm. **B.17** 4 cm.

Exercícios complementares

C.1 arccos $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.2** 4,8 cm.

C.3

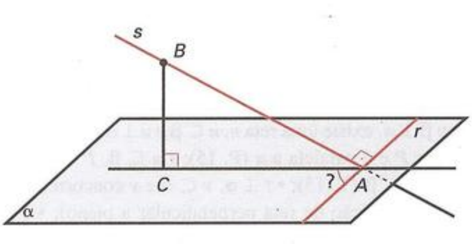


• $\overline{MD} \cong \overline{MB}$, pois são alturas de triângulos equiláteros congruentes. Logo, o triângulo BMD é isósceles de base $\overline{BD}$. • Como M é ponto médio da base $\overline{BD}$ do triângulo isósceles BMD e a mediana relativa à base de um triângulo isósceles coincide com a altura, temos que $\overline{MN} \perp \overline{BD}$. • Raciocinando de modo análogo em relação ao triângulo isósceles ANC, concluímos que $\overline{MN} \perp \overline{AC}$. Logo, a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é a medida do segmento $\overline{MN}$.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** d.

V.3



Sejam os pontos A, B e C tais que $\{A\} = r \cap s$, $B \in s$, $B \not\equiv A$ e C é a projeção ortogonal de B sobre α. Temos: • $\overleftrightarrow{BC} \perp \alpha$ (por definição de projeção ortogonal); • s e $\overleftrightarrow{BC}$ são concorrentes pois têm o ponto B em comum e $\overleftrightarrow{BC} \not\equiv s$ ($\overleftrightarrow{BC} \perp \alpha$ e s não é perpendicular a α); • s e $\overleftrightarrow{BC}$ determinam o plano $\beta =$ pl($\overleftrightarrow{BC}$, s), pelo T. 5; • $r \perp s$ (por hipótese); • $r \perp \overleftrightarrow{BC}$, pois $\overleftrightarrow{BC} \perp \alpha$, $r \subset \alpha$ e $r \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$; • $r \perp \beta$ (T. 31); • a reta $\overleftrightarrow{AC}$ está contida em β e concorre com r e, como $r \perp \beta$, concluímos que $\overleftrightarrow{AC} \perp r$ (por definição de reta perpendicular a plano). Logo, a projeção ortogonal $\overleftrightarrow{AC}$ de s sobre α é perpendicular a r (c.q.d.).

V.4 e.

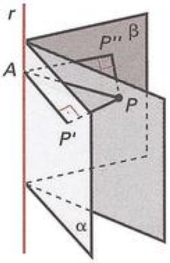
Capítulo 48

Exercícios básicos

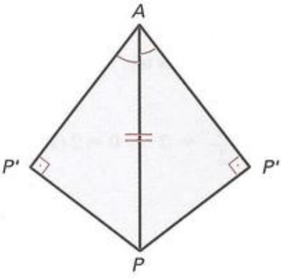
B.1 50°. **B.2** 110°. **B.3** 110° ou 70°. **B.4** 45°. **B.5** 60°. **B.6** $4\sqrt{3}$ m. **B.7** 80°. **B.8** 60°. **B.9** a) não; b) sim; c) não; d) sim; e) não; f) não. **B.10** a) $40° < x < 120°$, b) $70° < x < 90°$, c) $10° < x < 30°$, d) $70° < x < 110°$. **B.11** a) sim; b) não; c) não; d) sim; e) não; f) não. **B.12** a) V, b) V, c) F, d) F, e) F.

Exercícios complementares

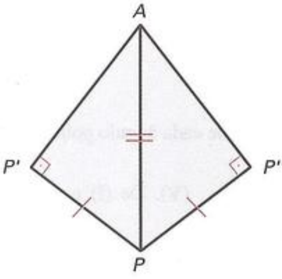
C.1 90°. **C.2** 60°. **C.3** 60° e 20°. **C.4** 5. **C.5** $\sqrt{2}$. **C.6** Se $P \in r$, então a demonstração é imediata. Suponhamos que $P \notin r$. *Primeira parte*: se o ponto P pertence ao bissetor do diedro $\alpha\hat{r}\beta$, então P equidista de α e β.



Sejam P' e P'' as projeções ortogonais de P sobre α e β, respectivamente, e A o ponto de intersecção de r com o plano pl(P, P', P'').



Temos: $\overline{AP}$ é lado comum aos triângulos PAP' e PAP''; $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz do ângulo $P'\hat{A}P''$, logo $P\hat{A}P' \cong P\hat{A}P''$; $A\hat{P}'P$ e $A\hat{P}''P$ são retos. Assim, os triângulos PAP' e PAP'' são congruentes pelo caso LAA. Portanto $\overline{PP'} \cong \overline{PP''}$. Ou seja, P equidista das faces do diedro. *Segunda parte:* se o ponto P, interior ao diedro $\alpha\hat{r}\beta$, equidista das faces α e β, então P pertence ao bissetor desse diedro. Sejam P' e P'' as projeções ortogonais de P sobre α e β, respectivamente, e A o ponto de intersecção de r com o plano pl(P, P', P'').



Temos: $\overline{PP'} \cong \overline{PP''}$ (hipótese); $\overline{AP}$ é lado comum aos triângulos PAP' e PAP''; os ângulos $P\hat{P}'A$ e $P\hat{P}''A$ são retos. Assim os triângulos PAP' e PAP'' são congruentes, pelo caso especial. Portanto $P\hat{A}P' \cong P\hat{A}P''$, ou seja, P pertence ao bissetor do diedro $\alpha\hat{r}\beta$ (c.q.d.).

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** d. **V.3** 60°.

Capítulo 49

Exercícios básicos

B.1 30. **B.2** 32. **B.3** 18. **B.4** 20. **B.5** 21. **B.6** 25. **B.7** 30. **B.8** 25. **B.9** Não, pois para todo poliedro convexo vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, e, nesse caso, temos $V - A + F = 20 - 18 + 12 = 14$. **B.10** 10. **B.11** 6. **B.12** 33. **B.13** 12, **B.14** 9. **B.15** 10. **B.16** 1440°. **B.17** 5760°. **B.18** 5040°. **B.19** 20. **B.20** 10.

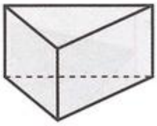
Exercícios complementares

C.1 Não, pois $V - A + F = 2$ em todo poliedro convexo, e, se $V = A$, teríamos $F = 2$ (absurdo, pois o menor número possível de faces para um poliedro é 4). **C.2** $\begin{cases} V - A + F = 2 \\ V = F \end{cases}$ $\therefore V - A + V = 2 \therefore A = 2V - 2 \therefore A = 2(V - 1)$. Como $V - 1$ é inteiro, temos que $2(V - 1)$ é par. Logo, A é par (c.q.d.).

C.3 Não, pois deveríamos ter $\begin{cases} V - A + F = 2 \\ V + A + F = 17 \end{cases} \therefore \begin{cases} V + F = A + 2 \\ V + F = 17 - A \end{cases} \therefore A + 2 = 17 - A \therefore 2A = 15 \therefore A = \frac{15}{2}$. Essa igualdade é absurda, pois o número de arestas deve ser natural e maior que 3. **C.4** 24. **C.5** 6 quadrangulares e 2 hexagonais. **C.6** 8 ângulos triédricos e 4 tetraédricos.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** d. **V.3** d. **V.4** $F = 5$



Capítulo 50

Exercícios básicos

B.1 Se existisse poliedro de Platão com faces triangulares e ângulos hexaédricos, deveríamos ter:

$$\begin{cases} 3F = 2A \Rightarrow F = \dfrac{2A}{3} \quad \textbf{(I)} \\ 6V = 2A \Rightarrow V = \dfrac{A}{3} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2 \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos $\frac{2A}{3} - A + \frac{A}{3} = 2 \therefore 0 = 2$ (absurdo!). Logo, não existe tal poliedro (c.q.d.).

B.2 Se existisse poliedro de Platão com faces quadrangulares e ângulos tetraédricos, deveríamos ter:

$$\begin{cases} 4F = 2A \Rightarrow F = \dfrac{A}{2} \quad \textbf{(I)} \\ 4V = 2A \Rightarrow V = \dfrac{A}{2} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) bem (III), temos $\frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} = 2 \therefore 0 = 2$ (absurdo!). Logo, não existe tal poliedro (c.q.d.)

B.3 Se existisse um poliedro de Platão com faces heptagonais, teríamos:

$$\begin{cases} 7F = 2A \Rightarrow F = \dfrac{2A}{7} \quad \textbf{(I)} \\ mV = 2A \Rightarrow V = \dfrac{2A}{m} \quad \textbf{(II)} \\ V - A + F = 2, \quad \textbf{(III)} \end{cases}$$

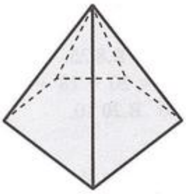
em que m é o número de arestas de cada ângulo poliedro. Substituindo (I) e (II) em (III), temos $\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{7} = 2$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $2A$, obtemos:

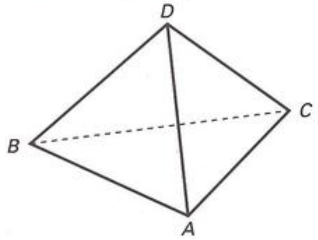
$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{5}{14} = \frac{1}{A}$ **(IV)**. Como m é o número de arestas de cada ângulo poliédrico, temos $m \geqslant 3 \therefore \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3} \therefore \frac{1}{m} - \frac{5}{14} \leqslant \frac{1}{3} - \frac{5}{14} \therefore \frac{1}{m} - \frac{5}{14} \leqslant -\frac{1}{42}$ **(V)**. De (I) e (II), concluímos que $\frac{1}{A} \leqslant -\frac{1}{42}$ (absurdo!). Essa desigualdade é absurda porque o primeiro membro é um número positivo ($A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 3$). Logo, não existe tal poliedro (c.q.d.). **B.4** Análogo ao B.3. **B.5** Octaedro. **B.6** Icosaedro. **B.7** Dodecaedro. **B.9** a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) F, g) V. **B.10** Hexaedro regular (cubo). **B.11** 5 cm.

Exercícios complementares

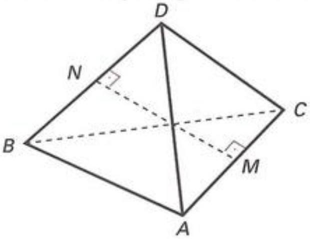
C.1

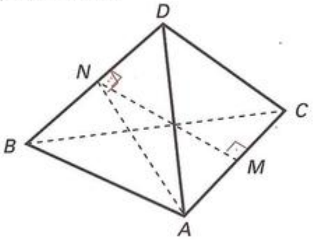


C.2 30. **C.3** 12. **C.4**. Octaedro regular. **C.5** Hexaedro não-regular. **C.6** Tetraedro regular. **C.7** $d = 3\sqrt{2}$ cm (reveja o exercício C.3 do capítulo 47). **C.8** Consideremos o tetraedro regular *ABCD*. As arestas $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ não têm ponto comum porque, se tivessem, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* seriam coplanares, o que contraria a hipótese (*ABCD* é tetraedro regular).



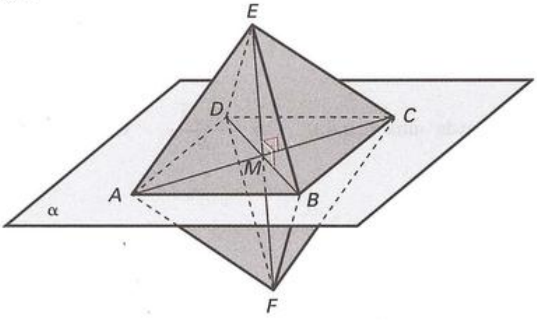
As retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ não são coplanares; logo, são reversas. Sejam *M* e *N* os pontos médios das arestas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Provamos no exercício C.3 do capítulo 47 que $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AC}$. O triângulo *ABD* é equilátero e *N* é ponto médio do lado $\overline{BD}$. Como toda mediana do triângulo equilátero também é altura, temos que $\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{BD}$.





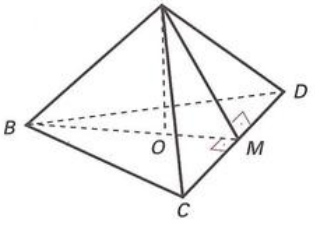
Portanto $\overleftrightarrow{BD} \perp$ pl(*M*, *N*, *A*), pois $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AN}$. Como a reta $\overleftrightarrow{AC}$ está contida em pl(*M*, *N*, *A*) e não concorre com $\overleftrightarrow{BD}$, temos que $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ (c.q.d.).

C.9



Seja α o plano que contém quatro vértices *A*, *B*, *C* e *D* de um octaedro regular *ABCDEF*. O quadrilátero *AECF* é um losango, pois as arestas do poliedro regular são congruentes entre si. Assim, as diagonais $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares entre si no ponto médio *M* de cada uma. Analogamente *EBFD* é um losango; logo, as diagonais $\overline{EF}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares entre si no ponto *M*. Assim, a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{MB}$ e $\overleftrightarrow{MA}$; logo, $\overleftrightarrow{EF} \perp$ pl(*A*, *B*, *M*). Como pl(*A*, *B*, *M*) = α, temos $\overleftrightarrow{EF} \perp \alpha$ (c.q.d.). *Nota*: é fácil provar que os losangos *AECF* e *EBFD* têm todos os ângulos internos retos; logo, são quadrados.

C.10



Consideremos o tetraedro regular *ABCD* e seja *M* o ponto médio de $\overline{CD}$. Qualquer mediana do triângulo equilátero também é altura; logo, $\overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{BM}$ são perpendiculares a $\overleftrightarrow{CD}$. Logo, $\overleftrightarrow{CD} \perp$ pl(*A*, *B*, *M*). Qualquer altura de um triângulo equilátero passa pelo seu centro *O*; logo, $O \in \overleftrightarrow{BM}$. Temos então que $\overleftrightarrow{AO} \subset$ pl(*A*, *B*, *M*). Como $\overleftrightarrow{CD} \perp$ pl(*A*, *B*, *M*), $\overleftrightarrow{AO} \subset$ pl(*A*, *B*, *M*) e $\overleftrightarrow{AO} \cap \overleftrightarrow{CD} = \varnothing$, concluímos que $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Analogamente, prova-se que $\overleftrightarrow{AO}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{BC}$. Assim, $\overleftrightarrow{AO}$ é ortogonal a duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, $\overleftrightarrow{AO} \perp$ pl(*B*, *C*, *D*), pelo T. 31 (c.q.d.).

C.11 120°.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** d. **V.3** c.

Capítulo 51

Exercícios básicos

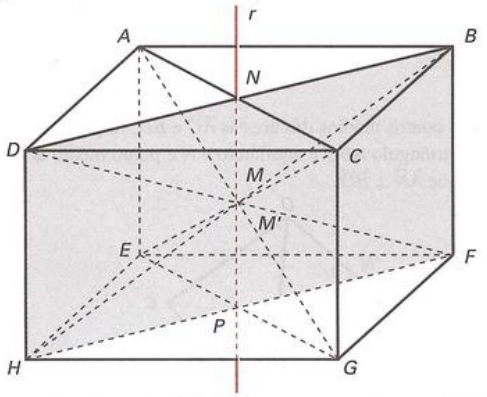
B.1 a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V, g) F, h) V, i) V, j) F, k) V. **B.2** 6 cm. **B.3** $(\sqrt{6} - 1)$ m, $\sqrt{6}$ m e $(\sqrt{6} + 1)$ m.

B.4 16 cm, 32 cm e 64 cm. **B.5** 34 m². **B.6** 3 cm, 6 cm e 12 cm. **B.7** $\sqrt{22}$ cm. **B.8** 192 cm². **B.9** 40 cm³. **B.10** 400000 litros. **B.11** 9600 cm³. **B.12** 36 cm³. **B.13** a) $6\sqrt{3}$ cm; b) 216 cm²; c) 144 cm²; d) 216 cm³. **B.14** $2\sqrt{2}$ cm³. **B.15** 2 cm². **B.16** $\sqrt{3}$ m. **B.17** $a = 1$.

Exercícios complementares

C.1 $\dfrac{20 - 2\sqrt{74}}{3}$ cm. **C.2** Não existe x. **C.3** 2 m³. **C.4** $16(3 + 2\sqrt{2}\,)$ cm³.

C.5



Seja o paralelepípedo de faces opostas $ABCD$ e $EFGH$.As diagonais de um retângulo são congruentes e interceptam-se no ponto médio de cada uma. Sendo M o ponto comum às diagonais da secção $DBFH$, temos que M equidista de D, B, F e H. Os planos pl(A, C, G) e pl(D, B, F) são perpendiculares às bases $ABCD$ e $EFGH$, pois as retas $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{BF}$ são perpendiculares a essas bases. Assim, pelo teorema T. 39, temos que a reta r, $r = \text{pl}(A, C, G) \cap \text{pl}(D, B, F)$, é perpendicular a essas bases. As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ interceptam-se no ponto N, médio de cada uma. Logo, N equidista de A, C, B e D.

$$\text{Temos: } \begin{cases} N \text{ é ponto médio de } \overline{BD} \text{ e } \overline{AC} \\ N \in r \\ r \perp \overline{AC} \\ r \perp \overline{BD}. \end{cases}$$

Logo, r é mediatriz de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e, portanto, $M \in r$, pois M equidista de B e D, $M \in \text{pl}(D, B, F)$ e $r \subset \text{pl}(B, D, F)$. Sejam os pontos M' e P tais que $\{M'\} = \overline{AG} \cap \overline{EC}$ e $\{P\} = \overline{EG} \cap \overline{HF}$. Assim, M' equidista de A, G, E e C. O ponto M' pertence à mediatriz r, pois $r \subset \text{pl}(A, C, G)$, r é mediatriz de $\overline{AC}$, $M' \in \text{pl}(A, C, G)$ e M' equidista de A e C. Na secção $ACGE$, temos $\triangle CNM' \cong \triangle EPM'$ (caso LAL) $\Rightarrow \overline{M'N} \cong \overline{M'P}$. Na secção $DBFH$, temos $\triangle ANM \cong \triangle GPM$ (caso LAL) $\Rightarrow \overline{MN} \cong \overline{MP}$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \{M, M', P\} \subset r \\ \overline{MN} \cong \overline{MP} \\ \overline{M'N} \cong \overline{M'P} \end{cases} \Rightarrow M \text{ é ponto médio de } \overline{NP} \text{ e } M' \text{ é ponto médio de } \overline{NP}. \text{ Logo, } M \equiv M' \text{ e, portanto, as diagonais do}$$

paralelepípedo reto-retângulo interceptam-se no ponto M, médio de cada uma (c.q.d.). **C.6** $\dfrac{D^3\sqrt{3}}{9}$. **C.7** $\dfrac{d\sqrt{6}}{2}$.

C.8 $a\,(\sqrt[3]{2} - 1)$. **C.9** $\dfrac{1}{3}$. **C.10** $36\sqrt{3}$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d. **V.3**. c. **V.4** a.

Capítulo 52

Exercícios básicos

B.1 Os volumes são iguais, pelo princípio de Cavalieri. **B.2** 80 cm³. **B.3** 144 cm³. **B.4** $120\sqrt{2}$ cm³. **B.5** 60 cm³. **B.6** 300 m³. **B.7** 32 cm³. **B.8** a) 18; b) 10 cm. **B.9** a) $90\sqrt{3}$ cm³; b) 180 cm²; c) $18(10 + \sqrt{3}\,)$ cm². **B.10** $8(6 + \sqrt{3}\,)$ dm².

B.11 a) $30\sqrt{3}$ cm³; b) 60 cm²; c) $12(5 + \sqrt{3}\,)$ cm². **B.12** $96\sqrt{3}$ m³.

Exercícios complementares

C.1 a) $125\sqrt{3}$ cm³; b) $50(\sqrt{3} + 2)$ cm²; c) $50(\sqrt{3} + 3)$ cm². **C.2** a) 264 cm³; b) 192 cm²; c) 280 cm². **C.3** $4\sqrt{3}$ cm³.

C.4 216 m³. **C.5** a) $900\sqrt{3}$ cm³; b) 720 cm²; c) $5(25\sqrt{3} + 144)$ cm². **C.6** $48\sqrt{3}$ cm². **C.7** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.8** 18 cm³.

C.9 a) $\dfrac{2\sqrt[4]{27B^2}}{3}$; b) $4\sqrt{3}\ B$; c) $2B(1 + 2\sqrt{3}\,)$; d) $\dfrac{2}{3}B\sqrt[4]{27B^2}$. **C.10** $\dfrac{1}{6}$. **C.11** 40 cm². **C.12** 24 cm².

Questões dos vestibulares

V.1 60. **V.2** d. **V.3** b. **V.4** d.

Capítulo 53

Exercícios básicos

B.1 25 cm. **B.2** 5 cm. **B.3** 10 cm. **B.4** 10 cm. **B.5** 9 cm. **B.6** $2\sqrt{5}$ cm. **B.7** $\sqrt{6}$ cm. **B.8** a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $\sqrt{3}$ cm.

B.9 $A_\ell = \dfrac{135\sqrt{3}}{2}$ cm², $A_t = 108\sqrt{3}$ cm². **B.10** $A_\ell = 240$ cm², $A_t = 384$ cm². **B.11** $A_\ell = 27$ cm², $A_t = 9(3 + \sqrt{3})$ cm².

B.12 $A_t = 48\sqrt{3}$ cm². **B.13** $4\sqrt{3}$ cm². **B.14** 5 cm.

Exercícios complementares

C.1 30°. **C.2** 60°. **C.3** 60°. **C.4** $\sqrt{91}$. **C.5** $8(9 + \sqrt{3})$ cm². **C.6** $8(3 + \sqrt{3})$ cm². **C.7** $4\sqrt{3}$ cm. **C.8** $8\sqrt{3}$ cm².

C.9 $2\sqrt{2}$ cm. **C.10** $a^2\sqrt{3}$. **C.11** 90°.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** c. **V.3** e ($\sqrt{30}$). **V.4** c.

Capítulo 54

Exercícios básicos

B.1 6 cm². **B.2** 9 dm. **B.3** 6 cm. **B.4** Os volumes são iguais, pois as pirâmides têm bases equivalentes e alturas iguais. **B.5** 6 cm³.

B.6 6 cm. **B.7** $\dfrac{200}{3}$ cm³. **B.8** $\dfrac{32}{3}$ dm³. **B.9** 120 cm³. **B.10** 140 cm³. **B.11** 264 cm³. **B.12** $12\sqrt{3}$ cm³. **B.13** $36\sqrt{3}$ m³.

B.14 $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$ cm³. **B.15** $54\sqrt{6}$ cm³. **B.16** $16\sqrt{6}$ cm³. **B.17** $18\sqrt{2}$ cm³. **B.18** 78 cm³. **B.19** $V = 42$ cm³, $A_\ell = 15\sqrt{17}$ cm²,

$A_t = (17 + 15\sqrt{17})$ cm². **B.20** $A_\ell = 30\sqrt{91}$ cm²; $A_t = (30\sqrt{91} + 102\sqrt{3})$ cm²; $V = \dfrac{1008\sqrt{3}}{3}$ cm³.

Exercícios complementares

C.1 $\dfrac{64}{3}$ cm. **C.2** 36 cm². **C.3** $\left(\dfrac{D}{d}\right)^3$. **C.4** 16 cm³. **C.5** $6\sqrt[3]{4}$ cm. **C.6** $48\sqrt{3}$ cm. **C.7** $72\sqrt{2}$ cm³. **C.8** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm³.

C.9 9 cm. **C.10** $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$ cm³.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** a. **V.3** a. **V.4** e.

Capítulo 55

Exercícios básicos

B.1 $A_\ell = 60\pi$ m² e $A_t = 78\pi$ m². **B.2** $A_\ell = 72\pi$ cm² e $A_t = 104\pi$ cm². **B.3** 5 cm. **B.4** 12 cm. **B.5** $A_\ell = 400\pi$ cm² e $A_t = 600\pi$ cm².

B.6 $\dfrac{2}{3}$. **B.7** 32π dm³. **B.8** 128π cm³. **B.9** 3 cm. **B.10** $\dfrac{5}{\pi}$ cm. **B.11** 320π cm³. **B.12** 2 cm. **B.13** $V = 1600\pi$ cm³ e $A_\ell = 320\pi$ cm². **B.14** 72π cm³. **B.15** 175π cm³. **B.16** 3 cm.

Exercícios complementares

C.1 $A_\ell = 25\pi^2$ cm² e $A_t = 25\pi(\pi + 2)$ cm². **C.2** $A_\ell = 100\pi$ m² e $A_t = 150\pi$ m². **C.3** 1 cm. **C.4** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **C.5** $\dfrac{4}{\pi}$ dm. **C.6** $\dfrac{r}{R}$.

C.7 200. **C.8** $9\sqrt[3]{2\pi}$ cm². **C.9** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2\pi}$. **C.10** $A_t = \dfrac{3\pi A}{2}$ e $V = \dfrac{\pi A\sqrt{A}}{4}$. **C.11** $\dfrac{\sqrt[4]{3\pi^2}}{\pi}$ cm. **C.12** 30°. **C.13** 1 m.

C.14 $\dfrac{243\pi}{4}$ cm³.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** c. **V.3** a **V.4** a **V.5** 1000π cm³.

Capítulo 56

Exercícios básicos

B.1 15 cm. **B.2** $5\sqrt{3}$ cm. **B.3** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **B.4** 45°. **B.5** a) 65π cm²; b) 90π cm²; c) $\dfrac{10\pi}{13}$ rad. **B.6** a) 18π cm²; b) 27π cm²; c) 180°. **B.7** $2\sqrt{3}$ cm. **B.8** 5 cm. **B.9** $(12 - 3\sqrt{2})$ cm. **B.10** 75π cm³. **B.11** $15\pi\sqrt{2}$ m³. **B.12** 12π dm³. **B.13** 24π dm³.

B.14 6 cm. **B.15** 6 m. **B.16** $\frac{2\pi}{3}$ cm³. **B.17** 4π dm³. **B.18** $\frac{520}{3}$ cm³. **B.19** 105π cm³. **B.20** $V = 268\pi$ cm³, $A_\ell = 117\pi$ cm² e $A_t = 170$ cm². **B.21** $V = 28\pi$ cm³, $A_\ell = 25\pi$ cm² e $A_t = 42\pi$ cm².

Exercícios complementares

C.1 $V = 72\pi$ cm³, $A_\ell = 36\sqrt{2}\,\pi$ cm² e $A_t = 36\pi(\sqrt{2} + 1)$ cm². **C.2** $18\sqrt{6}\,\pi$ cm³. **C.3** 384π cm². **C.4** 64π m². **C.5** 60°.

C.6 12π cm³. **C.7** $V = \frac{\pi A\sqrt{3A\sqrt{3}}}{9}$. **C.8** $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. **C.9** $V = \frac{7\pi R^3}{3}$, $A_\ell = 3\sqrt{2}\,\pi R^2$ e $A_t = \pi R^2(3\sqrt{2} + 5)$.

C.10 $63\pi\sqrt{3}$ cm³.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** $\frac{4\pi r^3}{3}$. **V.3** d. **V.4** c.

Capítulo 57

Exercícios básicos

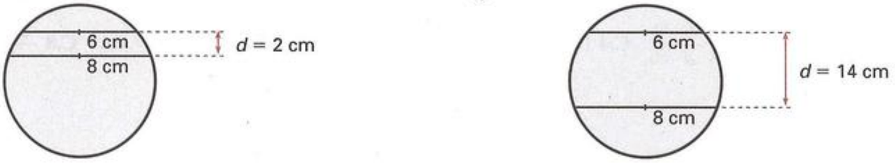
B.1 12 cm. **B.2** 8 cm. **B.3** 5 cm. **B.4** 8 cm. **B.5** 13π cm². **B.6** 36π cm³. **B.7** $\frac{40\sqrt{10}\,\pi}{3}$ cm³. **B.8** 36π dm³. **B.9** π cm².

B.10 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm. **B.11** 36π cm². **B.12** $4\pi\sqrt[3]{4}$ cm². **B.13** $\frac{500\pi}{3}$ m³. **B.14** a) $\left(\frac{R}{r}\right)^3$; b) $\left(\frac{R}{r}\right)^2$. **B.15** $\sqrt{15}$ cm.

B.16 36π cm³. **B.17** $\frac{200\pi}{9}$ m². **B.18** $\frac{8\pi}{5}$ cm². **B.19** 2π cm³. **B.20** $\frac{2\pi}{27}$ m³.

Exercícios complementares

C.1 Há duas possibilidades:



a)

b)

C.2 144π cm². **C.3** 8 cm. **C.4**. 42 cm. **C.5** $V = \frac{2\pi R^3}{3}$ e $A = 3\pi R^2$. **C.6** $V = \frac{4A\sqrt{A\pi}}{3\pi}$ e Área = 4A **C.7** 6π cm².

C.8 6π cm³. **C.9** $\frac{2\pi v}{V}$. **C.10** $\frac{52\pi}{9}$ cm².

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** c. **V.3** e. **V.4** 36.

Capítulo 58

Exercícios básicos

B.1 264 cm². **B.2** $180\sqrt{3}$ cm³. **B.3** 24π cm³. **B.4** $30\sqrt{3}$ m². **B.5** 120 dm³. **B.6** $\frac{\pi(72\sqrt{3} + 32)}{3}$ cm². **B.7** 72π cm³.

B.8 $360\sqrt{3}$ cm³. **B.9** $9\sqrt{3}$ cm³. **B.10** 36π cm². **B.11** $\sqrt{14}$ cm. **B.12** 100π cm³. **B.13** 72π cm³. **B.14** $5(2\sqrt{3} - 3)$ cm.

B.15 $16\pi\sqrt{5}$ cm². **B.16** 288π cm³. **B.17** 4 dm. **B.18** 216 cm². **B.19** 75π cm². **B.20** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³. **B.21** $\frac{32\pi}{3}$ cm³.

B.22 $6\pi\sqrt[3]{9}$ cm². **B.23** 13π cm². **B.24** $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.25** 9 cm. **B.26** $\frac{2304\,\pi}{25}$ cm². **B.27** 8 cm. **B.28** 6,5 cm.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{3}{4}$. **C.2** $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$. **C.3** $(2 - \sqrt{2})$ cm. **C.4** $\frac{2}{9}$. **C.5** $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **C.6** 2 cm. **C.7** 4 cm. **C.8** $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** $\frac{\pi\ell^3}{12}$. **V.3** a. **V.4** $\frac{32}{3}$ cm³.

O resgate do verdadeiro ensino da matemática

Esta é a proposta de Manoel Rodrigues Paiva, professor com mais de 20 anos de experiência, ao conceber uma obra completa, em que a matemática é enfocada com toda sua amplitude e rigor conceitual.

Ao mesmo tempo em que constrói e orienta a aprendizagem, a obra valoriza o espírito crítico e questionador do aluno, estimulando sua criatividade e raciocínio lógico.

Mais de 1.300 exercícios resolvidos auxiliam na fixação da teoria, assegurando um maior aproveitamento durante o estudo em casa.

O conjunto de atividades da coleção (cerca de 3.800) é estruturado em três séries de exercícios propostos — básicos, complementares e questões dos vestibulares — que objetivam sedimentar o aprendizado e estreitar a relação do estudante com a realidade dos exames vestibulares.

Longe de apresentar um mero manual técnico, o autor oferece a educadores e educandos uma alternativa ao simplismo a que se pode reduzir o estudo da ciência matemática.

ISBN 85-16-01214-X

9 788516 012144

EDITORA MODERNA